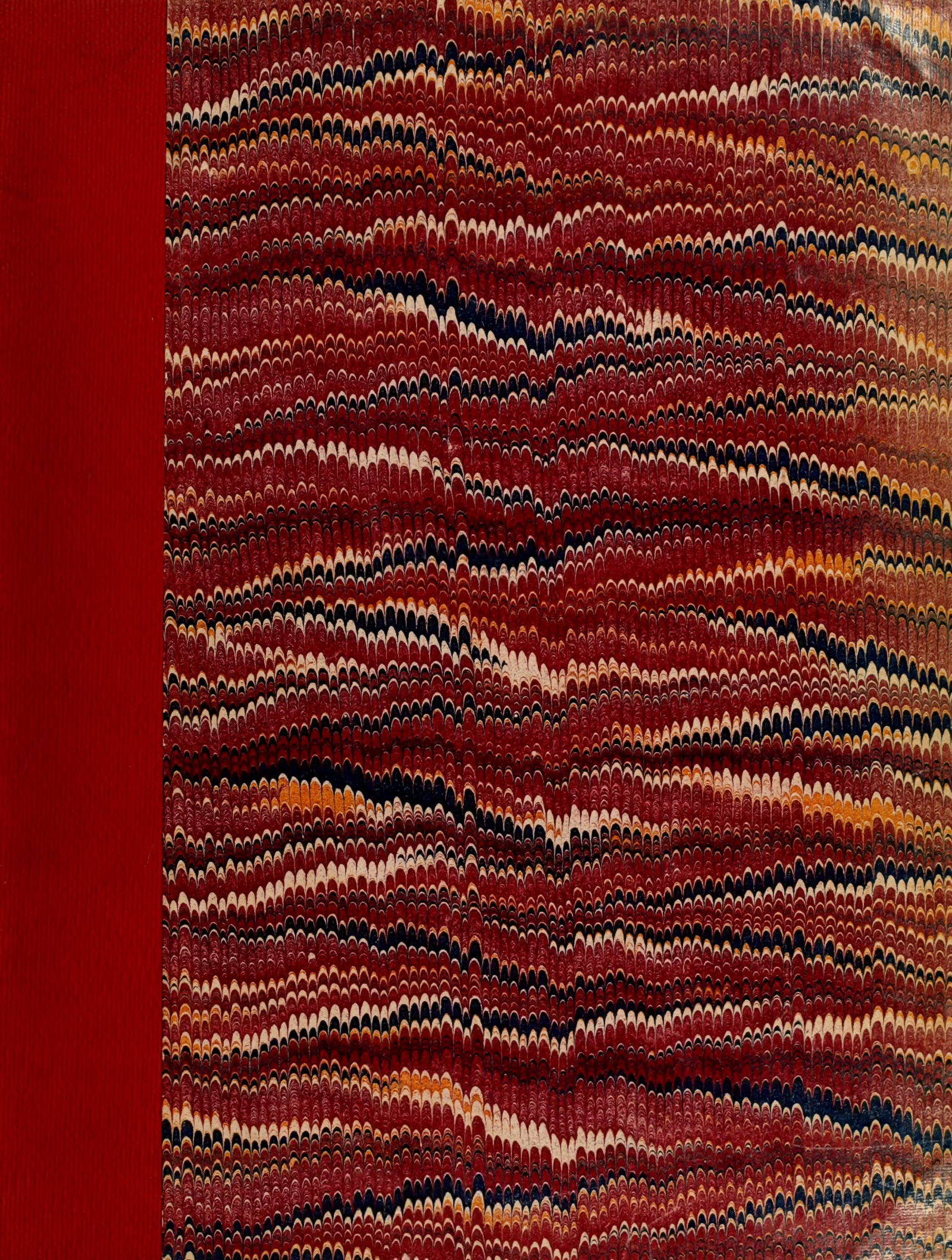
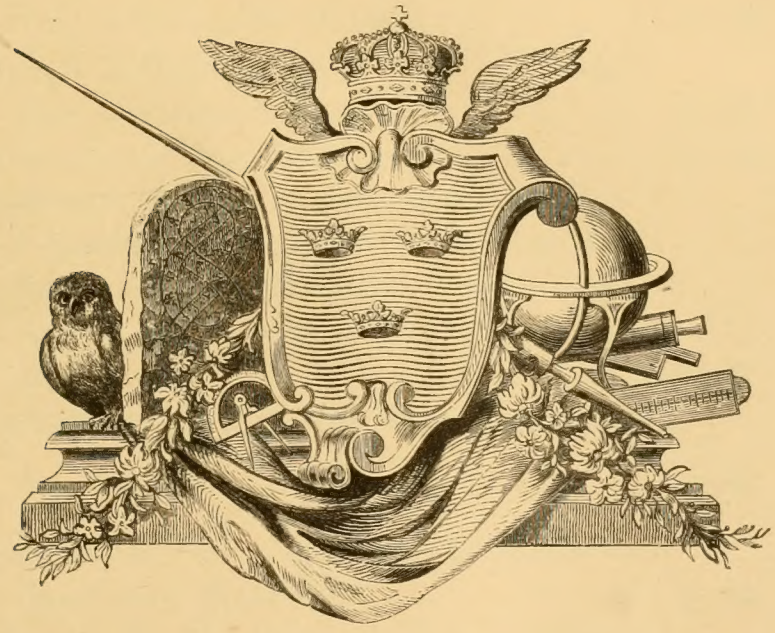


NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.



SERIEI TERTIÆ VOL. XIV.

UPSALIÆ,
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.
MDCCCXCI.

INDEX ACTORUM.

		Pag.	Tab.
	Introductio	I—XVII.	
I.	Lindman, C. F.: Supplément au Traité d'une Fonction transcendente, publié en 1874 . .	1—15.	
II.	Berger, A.: Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres	1—130.	
III.	Mohn, H. et Hildebrandsson, H. H.: Les orages dans la Péninsule Scandinave	1—55.	I—XII.
IV.	Bovallius, C.: The Oxycephalids	1—141.	I—VII.
V.	Söderblom, A.: De la convergence du développement analytique de la fonction elliptique $p(u)$ et du calcul de la valeur de l'argument u, la valeur de la fonction $p(u)$ étant donnée	1—67.	
VI.	Pfannenstiel, E.: Eine Methode zur Berechnung des Integrals $\int_{-\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z_3 - g_2 z - g_3}}$	1—24.	
VII.	Solander, E.: Die magnetische Inklination in Upsala und Stockholm	1—15.	
VIII.	Solander, E.: Ueber den Einfluss der Fadentorsion bei magnetischen Ablenkungsversuchen	1—10.	
IX.	Juhlin, J.: Sur la température nocturne de l'air à différentes hauteurs	1—24.	
X.	Solander, E.: Modificierte Lloydsche Wage . .	1—15.	

54430

		Pag.	Tab.
XI.	Solander, E.: Konstantenbestimmung mit einem Lamontschen Theodolit	1—32.	
XII.	Berger, A.: Déduction des propriétés principales de la fonction elliptique générale du second ordre	1—50.	
XIII.	Dunér, N. C.: Recherches sur la rotation du Soleil	1—78.	I.

INTRODUCTIO.

I.

Proximo quadriennio, quod post Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis (Ser. III. Vol. XIII) anno 1887 mense Junio edita præteriit,

hi **Socii mortui** sunt

Honorarii:

	Adscriptus.	Mortuus.
ERICSSON, Ioannes, in exercitu Svecano a. h. Centurio . . .	1870	1889.
HUSS, Magnus, Nosocomiorum Sveciæ a. h. Director Generalis .	1885	1890.

Ordinarii Svecani:

DAUG, Hermannus Theodorus, Mathesis Professor Upsaliensis, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1883—84*	1862	1888.
EDLUND, Ericus, Physices Professor Holmiensis	1858	1888.
HAMMARSTRAND, Sveno Fromholdus, Historiarum Professor Upsaliensis	1879	1889.
SVEDELIUS, Vilelmus Ericus, Eloquentiæ et Politices Professor Upsaliensis emeritus	1876	1889.
MESTERTON, Carolus Benedictus, Chirurgiæ et Artis obstetriciæ Professor Upsaliensis	1860	1889.

	Adscriptus.	Mortuus.
ARRHENIUS, Ioannes Petrus, R. Academiæ agric. a. h. Secretarius	1858	1889.
BERGFALK, Petrus Ericus, Juris Professor Upsaliensis emeritus	1858	1890.
SCHULTZ, Hermannus, Astronomiæ Professor Upsaliensis emeritus	1873	1890.

Ordinarii Exteri:

KIRCHHOFF, Gustavus Robertus, Physices Professor Berolinensis	1873	1887.
DE BARY, Antonius, Botanices Professor Argentoratensis . . .	1877	1888.
GRAY, Asa, Botanices Professor Cantabrigensis (Americ.) . . .	1850	1888.
CLAUSIUS, Rudolphus, Physices Professor Bonnensis	1887	1888.
KJERULF, Theodorus, Mineralogiæ Professor Christianiensis . .	1876	1888.
BAMBERGER, Henricus a, Medicinæ Professor Vindobonensis .	1877	1888.
RIANT, Paulus, Comes, Instituti Parisiensis Membrum	1887	1889.
DONDERS, Franciscus Cornelius, Physiologiæ Professor Trajectinus	1877	1889.
TRAUTVETTER, Ernestus Rudolphus a, Horti Botanici Petropol. a. h. Director	1882	1889.
DE LA RUE, Warren, Reg. Institutionis Magnæ Britanniæ Vicepræses	1879	1889.
BERKELEY, Miles Josephus, Botanicus Britannus	1875	1889.
VOLKMANN, Richardus, Chirurgiæ Professor Halensis. . . .	1887	1889.
GIESEBRECHT, Fredericus Vilelmus Benjamin a, Historiarum Professor Monacensis	1882	1890.
BRANDT, Fredericus Petrus, a. h. Juris Professor Christianiensis	1885	1891.
NÄGELI, Carolus Vilelmus a, Botanices Professor Monacensis	1880	1891.
WEBER, Vilelmus Eduardus, Physices Professor Gottingensis	1844	1891.

Novi Socii adscripti sunt

Honorarii:

	Adscriptus.
LOVÉN, Sveno, Musei Zoologici Holmiensis Præfectus.	1889.
BERLIN, Nicolaus Ioannes, a. h. Collegii Medici Præses	1889.
AGARDH, Jacobus Georgius, Botanices Professor Lundensis emeritus .	1889.
LINDHAGEN, Daniel Georgius, Reg. Academiæ Scient. Holmiensis Secretarius	1889.
EHRENHEIM, Petrus Jacobus ab, Universitatum Upsal. et Lund. Cancellarius	1891.

Ordinarii Svecani:

ARESCHOUG, Fredericus Vilelmus Christianus, Botanices Professor Lundensis	1887.
BJÖRLING, Carolus Fabian Emanuel, Mathesis Professor Lundensis .	1888.
DUNÉR, Nicolaus Christophorus, Astronomiæ Professor Upsaliensis. .	1888.
FORSSELL, Ioannes Ludovicus, Præses Collegii Reg. Cameralis Holmiensis	1889.
THÉEL, Ioannes Hjalmar, Anatomiæ Comparatæ Professor E. O. Upsaliensis	1889.
WARFVINGE, Franciscus Vilelmus, Nosocomii Præfectus Holmiensis .	1889.
ALIN, Oscar Josephus, Eloquentiæ et Politices Professor Upsaliensis . .	1889.
NILSON, Laurentius Fredericus, Chemiæ agronomicæ Professor Holmiensis	1889.
LINDSTRÖM, Gustavus, Palæontologiæ Professor Holmiensis	1889.
HILDEBRAND, Ioannes Olavus Hildebrand, Antiquarius Regni Svecani	1890.
LUNDSTRÖM, Axelius Nicolaus, Botanices Docens Upsaliensis . . .	1890.
HASSELBERG, Claudius Bernhardus, Physices Professor Holmiensis .	1890.
WIDMAN, Oscar, Chemiæ Professor E. O. Upsaliensis	1890.

Ordinarii Exteri:

MÜLLER, Ferdinandus a, Horti Botanici Melbournensis Director . . .	1887.
VOLKMANN, Richardus, Chirurgiæ Professor Halensis	1887.
CLAUSIUS, Rudolphus, Physices Professor Bonnensis	1887.

Adscriptus.

SCHWENDENER, Simon, Botanices Professor Berolinensis . . . . . 1888.
STEFAN, Josephus, Physices Professor Vindobonensis . . . . . 1888.
BACKLUND, Ioannes Oscar, Academiæ imp. Scientiarum Petropol. membrum 1888.
LANGE, Ioannes, Botanices Professor Hauniensis . . . . . 1888.
BRÖGGER, Valdemar Christophorus, Geologiæ et Mineralogiæ Professor Christianiensis . . . . . 1889.
GROTH, Paulus, Mineralogiæ Professor Monacensis . . . . . 1889.
DELISLE, Leopoldus, Bibliothecæ Parisiensis Præfectus . . . . . 1889.
ZIEMSEN, Hugo a, Medicinæ Professor Monacensis . . . . . 1889.
CHARCOT, Ioannes Martinus, Medicinæ Professor Parisiensis . . . . 1889.
ENGLER, Adolphus, Botanices Professor Berolinensis . . . . . 1889.
VOGEL, Hugo Carolus, Observatorii Astrophysici Postampiensis Præfectus 1889.
REGEL, Eduardus, Horti Botanici Petropol. Director . . . . . 1889.
ESTLANDER, Carolus Gustavus, Aestetices Professor Helsingforsiensis . 1890.
HOPPE-SEYLER, Ernestus Felix Immanuel, Chemiæ medicinalis Professor Argentoratensis . . . . . 1890.

II.

AUGUSTISSIMUS HUJUS SOCIETATIS

PATRONUS

OSCAR II

SVECORUM NORVEGORUM GOTHORUM

VANDALORUMQUE

REX.

PRÆSES ILLUSTRIS

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

OSCAR GUSTAVUS ADOLPHUS

SVECIÆ ET NORVEGIÆ PRINCEPS SUCCESSOR

SOCII HONORARII PRIMARII

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

OSCAR CAROLUS AUGUSTUS BERNADOTTE.

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

OSCAR CAROLUS VILELMUS

SVECIÆ ET NORVEGIÆ PRINCEPS HEREDITARIUS.

SERENISSIMUS PRINCEPS AC DOMINUS

EUGENIUS NAPOLEON NICOLAUS

SVECIÆ ET NORVEGIÆ PRINCEPS HEREDITARIUS.

A. Socii Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis

secundum electionis ordinem

Honorarii:

PETRUS II, Imperator Brasiliæ.

WREDE, Fabian Jacobus, Lib. Baro, Ph. Dr, Rei Tormentariæ a. h. Præfectus Generalis, Regg. Ordd. Eques et Commendator, etc.

SUNDBERG, Antonius Nicolaus, Ph. Jur. Utr. et Th. Dr, Ecclesiæ Sviogothicæ Archiepiscopus, Acad. Upsaliensis Procancellarius, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Regg. Ordd. Commendator, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1885—86.*

DICKSON, Oscar, Lib. Baro, Ph. Dr, Negotiator Gothoburgensis, Ordd. St. Pol. c. m. Cr. et Was. Commendator, etc.

NORDENSKIÖLD, Adolphus Ericus, Lib. Baro, Ph. Dr, Professor, Musei Mineralogici Holmiensis Præfectus, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

DE GEER, Ludovicus, Lib. Baro, Jur. Utr. Dr, Summæ Rei Judiciariæ a. h. Præfectus, Universitatum Ups. et Lund. a. h. Cancellarius, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Regg. Ordd. et Ord. S. Ol. c. m. Cr. Commendator, etc.

HAMILTON, Adolphus Ludovicus, Comes, Ph. Dr, Gubernator Uplandiarum, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1888—89.*

OLIVECRONA, Samuel Rudolphus Detlof Canutus, Ph. et Jur. Utr. Dr, Supremi Judicii Svecani a. h. Assessor, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

LILLJEBORG, Vilelmus, Ph. et Med. Dr, Zoologiæ Professor Upsaliensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1880—81.*

SAHLIN, Carolus Yngve, Ph. Dr, Philosophiæ practicæ Professor Upsaliensis, Ordd. St. Pol. et S. Ol. Commendator, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1889—90.*

LJUNGGREN, Gustavus, Ph. Dr, Aestetices et Literarum Artiumque Elegantium Historiæ Professor Lundensis emeritus, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

LOVÉN, Sveno, Ph. et Med. Dr, Professor et Musei Zoologici Holmiensis Præfectus, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

BERLIN, Nicolaus Ioannes, Ph. et Med. Dr, a. h. Collegii Med. Præses, Ordd. St. Pol. c. m. Cr. et S. Ol. Commendator, etc.

AGARDH, Jacobus Georgius, Ph. et Med. Dr, Botanices Professor Lundensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator.

LINDHAGEN, Daniel Georgius, Ph. Dr, Professor, Reg. Academiæ Scient. Holm. Secretarius, Ordd. St. Pol. et S. Ol. Commendator, etc.

EHRENHEIM, Petrus Jacobus ab, a. h. Consiliarius Regis, Universitatum Ups. et Lund. Cancellarius, Regg. Ordd. Eques et Commendator, etc.

Ordinarii Svecani:

STYFFE, Carolus Gustavus, Ph. Dr, ad Reg. Academiam Upsaliensem a. h. Bibliothecarius, St. Pol. Ord. adscriptus.

THALÉN, Tobias Robertus, Ph. Dr, Physices Professor Upsaliensis, Ord. St. Pol. Commendator, etc., *Reg. Societatis Scient. Ups. Secretarius et Bibliothecarius.*

FRIES, Theodorus Magnus, Ph. Dr, Botanices Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1882—83.*

THORELL, Thord Tamerlan Theodorus, Ph. Dr, Professor, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

ALMÉN, Augustus Theodorus, Ph. et Med. Dr, Collegii Med. Præses, Ord. St. Pol. Commendator, etc., *R. Soc. Sc. Ups. a. h. Quæstor.*

GYLDÉN, Ioannes Augustus Hugo, Ph. Dr, Professor et Observatorii Astronomici Holmiensis Director, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

LINDMAN, Christianus Fredericus, Ph. Dr, ad Scholam Strengnesiensem Mathesis Lector emeritus, St. Pol. Ord. adscriptus.

WALMSTEDT, Laurentius Eduardus, Ph. Dr, Mineralogiæ et Geologiæ Professor Upsaliensis emeritus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

DILLNER, Georgius, Ph. Dr, Mathesis Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HEDENIUS, Petrus, Ph. et Med. Dr, Anatomiæ Pathologicæ Professor Upsaliensis, Reg. Academiæ Upsaliensis Rector Magnificus, Ord. Was. Commendator et St. Pol. Ord. adscriptus, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1884—85.*

HOLMGREN, Alaricus Frithiof, Med. Dr, Physiologiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1887—88.*

FRISTEDT, Robertus Fredericus, Ph. et Med Dr, Pharmacologiæ et Naturalis Historiæ medicinalis Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

CLASON, Eduardus Claudius Hermannus, Med. Dr, Anatomiæ Professor Upsaliensis, St Pol. Ord. adscriptus.

RUBENSON, Robertus, Ph. Dr, Professor et Instituti Meteorologici Suecani Præfectus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

CLEVE, Petrus Theodorus, Ph. Dr, Chemiæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc., *Præses R. Soc. Sc. Ups. 1886—87.*

NAUMANN, Carolus Fredericus, Ph. et Med. Dr, Anatomiæ Professor Lundensis emeritus, Ord. Was. Commendator et St. Pol. Ord. adscriptus.

MALMSTRÖM, Carolus Gustavus, Ph. Dr, a. h. Archivarius Regni Svecani, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. Commendator et S. Ol. Ord. adscriptus, etc.

TEGNÉR, Esaias Henricus Vilelmus, Ph. Dr, Linguarum Orientalium Professor Lundensis, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, St. Pol. Ord. adscriptus, etc., *Præses Reg. Societatis Scient. Ups. designatus.*

MÖLLER, Dietricus Magnus Axelius, Ph. Dr, Astronomiæ Professor Lundensis, Ord. St. Pol. Commendator.

LUNDQUIST, Carolus Gustavus, Ph. Dr, Mechanices Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, *Reg. Societatis Scient. Upsal. Quæstor.*

HILDEBRANDSSON, Hugo Hildebrand, Ph. Dr, Meteorologiæ Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, *Reg. Societatis Scient. Ups. h. t. Præses.*

WITTROCK, Veit Brecher, Ph. Dr, Professor et Musei botanici Holmiensis Præfectus, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

BLOMSTRAND, Christianus Vilelmus, Ph. Dr, Chemiæ Professor Lundensis, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

HAMMARSTEN, Olavus, Med. Dr, Chemiæ Medicinalis et Physiologicæ Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

FALK, Mathias, Ph. Dr, Mathesis Professor Upsaliensis.

KEY, Ernestus Axelius, Ph. et Med. Dr, Anatomiæ Pathologicae Professor Holmiensis.

RETZIUS, Magnus Gustavus, Med. Dr, a. h. Histologiæ Professor E. O. Holmiensis.

ODHNER, Claudius Theodorus, Ph. Dr, Archivarius Regni Svecani, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord. St. Pol. Commendator.

RYDIN, Hermannus Ludovicus, Ph. et Jur. Utr. Dr, Juris Professor Upsaliensis emeritus, Ord. St. Pol. Commendator et S. Ol. Ord. adscriptus.

BLIX, Magnus Gustavus, Med. Dr, Physiologiæ Professor Lundensis.

ANNERSTEDT, Claudius, Ph. Dr, ad Reg. Academiam Upsaliensem Bibliothecarius, Regg. Ordd. a. h. Historiographus, St. Pol. Ord adscriptus.

NYRÉN, Magnus, Ph. Dr, ad Observatorium Pulkovense Astronomus.

KJELLMAN, Franciscus Reinholdus, Ph. Dr, Botanices Professor E. O. Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

TULLBERG, Tycho, Ph. Dr, Zoologiæ Professor Upsaliensis.

KJELLBERG, Nicolaus Gustavus, Med. Dr, Psychiatrices Professor E. O. Upsaliensis, Ord. Was. Commendator et St. Pol. Ord. adscriptus.

MITTAG-LEFFLER, Gustavus, Ph. Dr, Mathesis Professor Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

HÄGGSTRÖM, Franciscus Vilelmus, Ph. Dr, Linguæ Litterarumque Latinarum Professor Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

ARESCHOUG, Fredericus Vilelmus Christianus, Ph Dr, Botanices Professor Lundensis.

BJÖRLING, Carolus Fabian Emanuel, Ph. Dr, Mathesis Professor Lundensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

DUNÉR, Nicolaus Christophorus, Ph. Dr, Astronomiæ Professor Upsaliensis, etc.

FORSSELL, Ioannes Ludovicus, Ph. Dr., Collegii Reg. Cameralis Præses, Academiæ Svecanæ Octodecimvir, Ord St. Pol. c. m. Cr. Commendator, etc.

THÉEL, Ioannes Hjalmar, Ph. Dr, Anatomiæ Comparatæ Professor E. O. Upsaliensis.

WARFVINGE, Franciscus Vilelmus, Med. Dr, Nosocomii Præfectus Holmiensis, Ord. Was. Commendator, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus.

ALIN, Oscar Josephus, Ph. Dr, Eloquentiæ et Politices Professor Skytteanus Upsaliensis, St. Pol. Ord. adscriptus, etc.

NILSON, Laurentius Fredericus, Ph. Dr, Chemiæ Agronomicæ Professor Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

LINDSTRÖM, Gustavus, Ph. Dr, Palæontologiæ Professor Holmiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HILDEBRAND, Ioannes Olavus Hildebrand, Ph. Dr, Antiquarius Regni Svecani, Ord. St. Pol. Commendator, etc.

LUNDSTRÖM, Axelius Nicolaus, Ph. Dr, Botanices Docens Upsaliensis.

HASSELBERG, Claudius Bernhardus, Ph. Dr, Physices Professor Holmiensis, etc.

WIDMAN, Oscar, Ph. Dr, Chemiæ Professor E. O. Upsaliensis.

Ordinarii Exteri:

AIRY, Georgius Biddle, a. h. Director Observatorii Astronomici Grenovicensis, Ord. St. Pol. Commendator.

OWEN, Richardus, Med. Dr, Musei Britannici Historiæ Naturalis a. h. Director.

THOMSON, Vilelmus, Physices Professor Glascovensis.

BONSDORFF, Evert Julius, Anatomiæ et Physiologiæ Professor Helsingforsiensis emeritus.

BUNSEN, Robertus Vilelmus, Chemiæ Professor Heidelbergensis, Ord. St. Pol. Commendator.

STEENSTRUP, Ioannes Iapetus Smith, Zoologiæ Professor Hauniensis emeritus, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.

WEGENER, Casp. Fredericus, Regi Dan. a Consiliis intimis, Ordd. St. Pol. c. m. Cr. et S. Ol. Commendator.

LATHAM, Robertus Gordon, Medicinæ Doctor Britannus.

DECANDOLLE, Alphons, a. h. Botanices Professor Genevensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

STOKES, Georgius Gabriel, Mathesis Professor Cantabrigensis.

HOOKER, Josephus Dalton, Horti Botanici Kewensis a. h. Director, St. Pol. Ord. adscriptus.

UNGER, Carolus Richardus, Linguarum Litterarumque Recent. Professor Christianiensis, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus.

STEPHENS, Georgius, Linguarum Anglicar. Professor Hauniensis, Ord. St. Pol. Commendator.

ADAMS, Ioannes C., Observatorii Astronomici Cantabrigensis Director.

ARPPE, Adolphus Eduardus, Chemiæ Professor emeritus Helsingforsiensis.

VIRCHOW, Rudolphus, Anatomiæ Pathologicæ Professor Berolinensis, Ord. S. Ol. Commendator et St. Pol. Ord. adscriptus.

TYNDALL, Ioannes, Physices Professor Londinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

STRUVE, Otto Vilelmus, Observatorii Astronomici Pulkovensis a. h. Director, Ord. St. Pol. Commendator.

RAWLINSON, Henricus, Generalis Excubiarum Præfectus Britannus.

MÜLLER, Max., Professor Taylorianus Oxoniensis, Ord. St Pol. Commendator.

FIZEAU, Hippol. Ludovicus, Physices Professor Paris., Instit. Paris. Membrum.

HELMHOLTZ, Hermannus Ludovicus Ferdinandus ab, Physices Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

BUGGE, Elseus Sophus, Linguarum Indo-Europæar. Professor E. O. Christianiensis, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus.

DANIELSSEN, Daniel Cornelius, Medicinæ Doctor Bergensis, S. Ol. Ord. adscriptus.

GÜNTHER, Albertus, ad Museum Britannicum Zoologiæ Præfectus.

RECHLINGHAUSEN, Fredericus a, Medicinæ Professor Argentoratensis.

HERMITE, Carolus, Mathesis Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, Ord. St. Pol. Commendator.

HUGGINS, Vilelmus, Socius Reg. Societatis Londinensis.

CAYLEY, Arthur, Mathesis Professor Cantabrigensis.

SCHERING, Ernestus Christianus Julius, Mathesis Professor Gottingensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

MARIGNAC, Ioannes Carolus, Chemiæ Professor Genevensis.

HOPPE, Ernestus Reinholdus Eduardus, Mathesis Professor Berolinensis.

LUDVIG, Carolus, Physiologiæ Professor Lipsiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HUXLEY, Thomas Henricus, Anatomiæ et Physiologiæ Professor Londinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

BRÜCKE, Ernestus R. a, Physiologiæ Professor Vindobonensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

STEINTHAL, Henricus, Philologiæ Professor Berolinensis.

SARS, Georgius Ossian, Zoologiæ Professor Christianiensis.

DU BOIS-REYMOND, Aemilius Henricus, Physiologiæ Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

WEIERSTRASS, Carolus Vilelmus Theodorus, Mathesis Professor Berolinensis, Ord. St. Pol. Commendator.

WIEDEMANN, Gustavus, Physico-Chemiæ Professor Lipsiensis.

NEWCOMB, Simon, ad Observatorium Washingtoniense Mathesis Professor.

COHN, Ferdinandus, Botanices Professor Vratislaviensis.

PRINGSHEIM, Natan., Socius Academiæ Scientiarum Berolinensis.

SCHIAPARELLI, Ioannes Virginius, Director Observatorii Mediolanensis.

BUCHAN, Alexander, Societatis Meteorologicæ Scotorum Secretarius.

DES CLOISEAUX, Alfredus Ludovicus Oliv., Instituti Paris. Membrum, Ord. St. Ol. Commendator.

CORNU, Alfredus, Physices Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum.

PARIS, Gaston, Professor, Instituti Paris. Membrum, Ord. St. Pol. Commendator.

BILLROTH, Theodorus, Chirurgiæ Professor Vindobonensis, Ord. St. Pol. Commendator.

MAREY, Stephanus Julius, Historiæ naturalis Professor Parisiensis, Instit. Paris. Membrum

MAURER, Conradus a, Hist. Juris Septentrionalis Professor Monacensis, Ordd. St Pol. et S. Ol. Commendator.

WHITNEY, Vilelmus D., Linguæ Sanscritæ Professor Novoportuensis.

ASCHEHOUG, Torkil Halvordsen, Juris Professor Christianiensis, Ordd. St. Pol. et S Ol. Commendator.

MOHN, Henricus, Meteorologiæ Professor Christianiensis, St. Pol. et S. Ol. Ordd. adscriptus.

BJERKNES, Carolus Antonius, Mathesis Professor Christianiensis, S. Ol. Ord. adscriptus.

QUINCKE, Gustavus, Physices Professor Heidelbergensis.

BAEYER, Adolphus, Chemiæ Professor Monacensis.

KRONECKER, Leopoldus, Mathesis Professor Berolinensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HANN, Julius, Instituti Meteorologici Vindobonensis Præfectus.

PAGET, Jacobus, Medicinæ Professor Londinensis.

PASTEUR, Ludovicus, Professor, Instituti Parisiensis Membrum, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.

LISTER, Josephus, Chirurgiæ Professor Londinensis.

GEGENBAUR, Carolus, Anatomiæ Professor Heidelbergensis.

BAILLON, Henricus Ernestus, Naturalis Historiæ Medicinalis Professor Parisiensis.

THOMSEN, Julius, Chemiæ Professor Hauniensis.

KRIEGER, Andreas Fredericus, Supremi Judicii Danici E. O. Assessor, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.

FRANKLAND, Eduardus, Chemiæ Professor Londinensis.

POINCARÉ, Julius Henricus, Mathesis Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.

LEUCKART, Rudolphus, Anatomiæ Comparatæ Professor Lipsiensis

GROT, Jacobus Constantinus, a Consiliis intimis, imp. Academiæ Scientiarum Petropolitanæ Socius, Ord. St. Pol. c. m. Cr. Commendator.

FICK, Adolphus, Physiologiæ Professor Virceburgensis.

HIS, Vilelmus, Anatomiæ Professor Lipsiensis.

KÖLLIKER, Albertus a, Anatomiæ Professor Virceburgensis.

HIRSCH, Augustus, Medicinæ Professor Berolinensis.

MASCART, Eleutherus, Physices Professor et Instituti Meteorologici Parisiensis Præfectus, Instituti Paris. Membrum.

LÜTKEN, Christianus Fredericus, Zoologiæ Professor Hauniensis.

GEFFROY, Augustus, Historiarum Professor Parisiensis et Instituti Paris. Membrum, Ord. St. Pol. Commendator.

WIESNER, Julius, Botanices Professor Vindobonensis.

WIMMER, Ludovicus Franciscus Adalbertus, Linguarum Septentrionalium Professor Hauniensis.

AMIRA, Carolus ab, Juris Professor Friburgensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

DROYSEN, Gustavus, Historiarum Professor Halensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

MÜLLER, Ferdinandus a, Horti Botanici Melbournensis Director.

SCHWENDENER, Simon, Botanices Professor Berolinensis.

STEFAN, Josephus, Physices Professor Vindobonensis.

BACKLUND, Ioannes Oscar, Academiæ imp. Scientiarum Petropol. membrum, St. Pol. Ord. adscriptus.

LANGE, Ioannes Henricus, Botanices Professor Hauniensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

BRÖGGER, Valdemar Christophorus, Geologiæ et Mineralogiæ Professor Christianiensis.

GROTH, Paulus, Mineralogiæ Professor Monacensis.

DELISLE, Leopoldus, Bibliothecæ Parisiensis Præfectus, Ord. St. Pol Commendator.

ZIEMSSEN, Hugo a, Medicinæ Professor Monacensis.

CHARCOT, Ioannes Martinus, Medicinæ Professor Parisiensis, Instituti Paris. Membrum.

ENGLER, Adolphus, Botanices Professor Berolinensis.

VOGEL, Hugo Carolus, Observatorii Astrophysici Postampiensis Præfectus.

REGEL, Eduardus, Horti Botanici Petropol. Director, St. Pol. Ord. adscriptus.

ESTLANDER, Carolus Gustavus, Aestetices Professor Helsingforsiensis, St. Pol. Ord. adscriptus.

HOPPE-SEYLER, Ernestus Felix Immanuel, Chemiæ medicinalis Professor Argentoratensis.

B. Socii Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis

secundum disciplinas

Ordinarii Svecani

I. In Classe

Physico-Mathematica:

Thalén, T. R. . . . 1863.	Cleve, P. T. . . . . 1875.	Mittag-Leffler, G. 1886.
Almén, A. T. . . . . 1870.	Möller, D. M. A. . 1876.	Björling, C. F. E. 1888.
Gyldén, J. A. H. . 1872.	Lundquist, C. G. . 1876.	Dunér, N. Ch. . . . 1888.
Lindman, C. F. . . . 1873.	Hildebrandsson, H. 1876.	Nilson, L. F. . . . . 1889.
Walmstedt, E. . . . 1873.	Blomstrand, C. V. 1878.	Hasselberg, C. B. 1890.
Dillner, G. . . . . 1873.	Falk, M. . . . . 1878.	Widman, O. . . . . 1890.
Rubenson, R . . . . 1875.	Nyrén, M. . . . . 1885.	

II. In Classe

Medica et Historiæ Naturalis:

Fries, T. M. . . . . 1866.	Wittrock, V. B. . . 1877.	Kjellberg, N. G. . 1886.
Thorell, T. T. T. . 1866.	Hammarsten, O. . . 1878.	Areschoug, F. V. Ch. 1887.
Hedenius, P. . . . . 1873.	Key, E. A. . . . . 1880.	Théel, J. H. . . . . 1889.
Holmgren, A. F. . . 1873.	Retzius, M. G. . . . 1882.	Warfvinge, F. V. 1889.
Fristedt, R. F. . . 1873.	Blix, M. G. . . . . 1883.	Lindström, G. . . . 1889.
Clason, E. C. H. . 1873.	Kjellman, F. R. . . 1885.	Lundström, A. N. . 1890.
Naumann, C. F. . . 1875.	Tullberg, T. . . . . 1885.	

III. In Classe

Historico-Archæologica:

Styffe, C. G. . . . 1863.	Rydin, H. L. . . . . 1882.	Alin, O. J. . . . . 1889.
Malmström, C. G. . 1876.	Annerstedt, C. . . . 1884.	Hildebrand, J. O. H. 1890.
Tegnér, E. H. V. . 1876.	Häggström, F. V. . 1887.	
Odhner, C. T. . . . 1882.	Forssell, J. L. . . . 1889.	

Ordinarii Exteri

I. In Classe
Physico-Mathematica:

Airy, G. B. . . . . 1851.	Marignac, J. C. . 1875.	Hann, J. . . . . 1881.
Thomson, V. . . . . 1852.	Hoppe, E. R. E. . . 1875.	Thomsen, J. . . . . 1885.
Bunsen, R. V. . . . 1856.	Weierstrass, C.V.T. 1876.	Frankland, E. . . . 1885.
Stokes, G. G. . . . 1865.	Wiedemann, G. . . . 1877.	Poincaré, J. H. . . 1885.
Adams, J. C. . . . . 1866.	Newcomb, S. . . . . 1877.	Mascart, E. . . . . 1886.
Arppe, A. E. . . . . 1866.	Schiaparelli, I. V. 1878.	Stefan, J. . . . . 1888.
Tyndall, J. . . . . 1868.	Buchan, A. . . . . 1878.	Backlund, J. O. . . 1888
Struve, O. V. . . . 1868.	Des Cloiseaux, A. 1878.	Brögger, V. Ch. . . 1889.
Fizeau, H. L. . . . 1870.	Cornu, A. . . . . 1878.	Groth, P. . . . . 1889.
Helmholtz, H. L. F. 1872.	Mohn, H. . . . . 1879.	Vogel, H. C. . . . . 1889.
Hermite, C. . . . . 1874.	Bjerknes, C. A. . . 1879	. . . . .
Huggins, V. . . . . 1875.	Quincke, G. . . . . 1879.	. . . . .
Cayley, A. . . . . 1875.	Baeyer, A. . . . . 1879.	
Schering, E. C. J. 1875.	Kronecker, L. . . . 1879	

II. In Classe
Medica et Historiæ Naturalis:

Owen, R. . . . . 1851.	DuBois-Reymond, E. 1876.	Hirsch, A. . . . . 1885.
Bonsdorff, E. J. . 1856.	Cohn, F. . . . . 1877.	Lütken, C. F. . . . 1886.
Steenstrup, J. J. S. 1856.	Pringsheim, N. . . . 1877.	Wiesner, J. . . . . 1886.
Latham, R. G. . . . 1859.	Billroth, Th. . . . 1878.	Müller, F. . . . . 1887.
Decandolle, A. . . 1860.	Marey, S. J. 1878	Schwendener, S. . 1888.
Hooker, J. D. . . . 1865.	Paget, J. . . . . 1882.	Lange, I. . . . . 1888.
Virchow, R. . . . . 1867.	Pasteur, L. . . . . 1882.	Ziemssen, H. . . . . 1889.
Danielssen, D. C. . 1873.	Lister, J. . . . . 1884.	Charcot, J. M. . . . 1889.
Günther, A. . . . . 1873.	Gegenbaur, C. . . . 1884.	Engler, A. . . . . 1889.
Rechlinghausen, F. 1873.	Baillon, H. E. . . . 1884.	Regel, E. . . . . 1889.
Ludvig, C. . . . . 1875.	Leuckart, R. . . . . 1885.	Hoppe-Seyler, E.F.J. 1890.
Huxley, T. H. . . . 1875.	Fick, A. . . . . 1885.	. . . . .
Brücke, E. R. . . . 1875.	His, V. . . . . 1885.	
Sars, G. O. . . . . 1875.	Kölliker, A. 1885	

III. In Classe
Historico-Archæologica:

Wegener, C. F. . . 1857.	Paris, G. . . . . 1878.	Wimmer, C. F. . . . 1886.
Unger, C. R. . . . . 1865.	Maurer, C. . . . . 1878.	Amira, C. . . . . 1887.
Stephens, G. . . . . 1865.	Whitney, V. D. . . 1878.	Droysen, G. . . . . 1887.
Rawlinson, H. . . . 1868.	Aschehoug, T. H. . 1879.	Delisle, L. . . . . 1889.
Müller, Max. . . . 1869.	Krieger, A. F. . . . 1885.	Estlander, C. G. . 1890.
Bugge, E. S. . . . . 1872.	Grot, J. C. . . . . 1885.	. . . . .
Steinthal, H. . . . 1875.	Geffroy, A. 1886	

III.

Academiæ et Societates, cum quibus Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis communicantur.

In **Africa:**

Alger, ... Société de Climatologie.

In **America:**

Boston, ... American Academy of Arts and Sciences.
» Society of Natural History.
Buenos Aires, . Musée de la Plata.
Buffalo, ... Society of Natural Sciences.
Cambridge, . . Museum of Comparative Zoology.
Chicago, ... Academy of Sciences.
Córdoba, . . . Academia nacional de Ciencias de la Républica Argentina.
Davenport, . . Academy of Natural Sciences.
Granville, . . . Denison University.
Madison, . . . Wisconsin State, Agricultural Society.
New-Haven, . . Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New-York, . . Academy of Sciences.
» American Geographical and Statistical Society.
Philadelphia, . Academy of Natural Sciences.
» American Philosophical Society.
» Entomological Society.
» Second Geological Survey of Pensylvania
Saint-Louis, . . Academy of Sciences.
Salem, ... American Association for the Advancement of Science.
» Essex Institute.
» Peabody Academy of Science.
San-Francisco, California Academy of Natural Sciences.
Washington, . Department of Agriculture.
Washington, . National Academy.
» Naval Observatory.
» Office U. S. Geological Survey.
» Smithsonian Institution.
» U. S. Chief Signal Office.

In **Asia:**

Batavia, ... Magnetical and Meteorological Observatory.
Tokio, ... University.

In **Australia:**

Melbourne, . . Roy. Society of Victoria.
Sydney, ... Linnean Society of New South Wales.

In **Europa:**

Cambridge, . . Observatory.
» Philosophical Society.
Dublin, ... Roy. Dublin Geological Society.
» Roy. Irish Academy.
Edinburg, . . . Botanical Society.
» Geological Society.
» Physical Society.
» Roy. Observatory.
» Roy. Society.
Greenwich, . . Roy. Observatory.
London, ... Linnean Society.
» Natural History Museum.
» Roy. Astronomical Society.
» Roy. Institution of Great Britain.
» Roy. Microscopical Society.
» Royal Society.
» Zoological Society.
Manchester, . . Literary and Philosoph. Society.
Oxford, ... Radcliffe Observatory.

Amsterdam, . . Kon. Akademie van Wetenschappen.
» Kon. Zoologisch Genootschap, (Natura Artis Magistra).
Delft, ... Ecole Polytechnique.
Harlem, ... Société Teyler.
» Société Hollandaise des Sciences.

Bruxelles, . . . Académie Roy. des Sciences, des Lettres etc.
» Observatoire Royal.
» Société Entomologique de Belgique.
» Société Malacologique de Belgique.
» Société Roy. de Botanique.
Luxembourg, . Institut des Sciences naturelles et mathématiques.

Bordeaux, . . . Société des Sciences physiques et naturelles.
Caën, ... Société Linnéenne de Normandie.
Cherbourg, . . Société des Sciences naturelles.
Dijon, ... Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
Lyon, ... Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.
» Société d'Agriculture, d'Histoire naturelle etc.
» Société Linnéenne.
Montpellier, . . Académie des Sciences et Lettres.
Nancy, ... Société des Sciences naturelles.
Paris, ... Académie des Sciences.
» Ecole Polytechnique.
» Musée Guimet.
» Muséum d'Histoire naturelle.
» Observatoire Astronomique.
» Société Mathématique de France.

Bern, ... Naturforschende Gesellschaft.
» Société Helvétique des Sciences naturelles.
Genève, ... Société de Physique et d'Histoire naturelle.
Lausanne, . . . Société Vaudoise des Sciences naturelles.

Bologna, . . . R. Accademia della Scienze.
Genova, ... Museo civico di Storia Naturale.
Milano, ... Reale Instituto Lombardo di Scienze e Lettere.
Modena, ... R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti.
Napoli, ... R. Accademia delle Scienze.
Palermo, . . . Società di Scienze Naturale ed Economiche.
Pisa, ... Società Toscana di Scienze Naturali.
» R. Scuola Normale Superiore.
Roma, ... R. Accademia de'Nuovi Lincei.
Torino, ... R. Accademia delle Scienze.

Dorpat, ... Meteorologisches Observatorium.
» Naturforscher Gesellschaft.
» Observatoire impérial.
Helsingfors, . . Finska Vetenskaps Societeten.
» Societas Pro Fauna et Flora Fennica.
Kiev, ... Université imp. de St. Wladimir.
Moscou, ... Société imp. des Naturalistes.
Pulcowa, . . . Observatoire impérial
S:t Petersbourg, Académie imp des Sciences.
» Commission archéologique.
» K. Botanischer Garten.
» Observatoire physique central de Russie.

Agram, ... Société d'Histoire naturelle Croate (Kroatischer Naturforscher-Verein).
Berlin, ... K. Preuss. Akademie der Wissenschaften.
» Physikalische Gesellschaft.
» Redaktion des Archiv der Mathematik und Physik.
Braunschweig, . Verein für Naturwissenschaft.
Bremen, ... Naturwissenschaftlicher Verein.
Breslau, ... Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.
Brünn, ... Naturforschender Verein.
Buda-Pest, . . Société Roy. Hongroise des Sciences naturelles.
Cassel, ... Verein für Naturkunde.

Dürkheim, . . . Naturwissenschaftlicher Verein »Pollichia».
Frankfurt am Main, Senckenbergische naturforschende Gesellschaft.
Frankfurt a. Oder, Naturwissenschaftlicher Verein.
Giessen, ... Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Greifswald, . . Naturwissenschaftlicher Verein von Neu-Vorpommern und Rügen.
Göttingen, . . . K. Gesellschaft der Wissenschaften.
Halle, ... K. Leopold. Carol. Akademie der Naturforscher.
» Naturforschende Gesellschaft.
Hamburg, . . . Verein für Naturwissenschaftliche Unterhaltung.
Heidelberg, . . Naturhistorisch-medicinischer Verein.
Innsbruck, . . . Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein.
Jena, ... Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft.
Kiel, ... Naturwissenschaftlicher Verein.
Königsberg, . . K. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft.
Leipzig, ... Astronomische Gesellschaft.
» Fürstlich Jablonowski'sche Gesellschaft.
» K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
München, . . . K. Bayerische Akademie der Wissenschaften.
» Hof- u. Staats-Bibliothek.
Osnabrück, . . Naturwissenschaftlicher Verein.
Prag, ... K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
Presburg, . . . Verein für Naturkunde.
Regensburg, . . K. Bayerische botanische Gesellschaft.
Stuttgart, . . . Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.
Triest, ... Museo civico di Storia naturali.
Ulm, ... Verein für Kunst und Altherthum.
Wien, ... K. k. Akademie der Wissenschaften.
K. k. Geologische Reichsanstalt.
K. k. Naturhistorisches Hofmuseum.
K. k. Sternwarte.
K. k. zoologisch-botanische Gesellschaft.
Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kentnisse.
Wiesbaden, . . Verein für Naturkunde in Nassau.

Kjöbenhavn, . . Carlsberg Laboratoriet.
» K. Danske Videnskabernes Selskab.
K. Nordiske Oldskrift-Selskab.
» Naturhistoriske Forening.
» Universitets Bibliotheket.
Reykjavik, . . . Islands Stifts-Bibliothek.

Bergen, ... Museum.
» Observatorium.
Christiania, . . Observatorium.
» Universitets Bibliotheket.
» Videnskabs-Selskabet.
Tromsö, ... Museum.
Trondhjem, . . K. Norske Videnskabs Selskabet.

Göteborg, . . . K. Vetenskaps- och Vitterhets-Samhället.
Lund, ... K. Fysiografiska Sällskapet.
Stockholm, . . . Geologiska Byrån.
» K. Vetenskaps-Akademien.
» K. Vitterhets- Historie- och Antiqvitets-Akademien.

Upsaliæ, die XXII mensis Julii anni MDCCCXCI.

PROPERTY OF
THE ARKIVAR ASSOCIATION

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ VOL. XIV.

FASCICULUS PRIOR.

UPSALIÆ,
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.
MDCCCXC.

INDEX

HUJUS FASCICULI.

		Pag.	Tab.
I.	Lindman, C. F.: Supplément au Traité d'une Fonction transcendente, publié en 1874	1—15.	
II.	Berger, A.: Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres	1—130.	
III.	Mohn, H. et Hildebrandsson, H. H.: Les orages dans la Péninsule Scandinave.	1—55.	I—XII.
IV.	Bovallius, C.: The Oxycephalids	1—141.	I—VII.

SUPPLÉMENT AU TRAITÉ

D'UNE FONCTION TRANSCENDENTE

PUBLIÉ EN 1874

PAR

C. F. LINDMAN.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 26 Octobre 1888).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1888.

AVANT-PROPOS.

La Société royale a bien voulu — il y a quatorze ans — donner une place en ses Actes à mon traité »d'une fonction transcendente» [1]). J'y ai déjà montré qu'un grand nombre d'intégrales définies dépendent de cette fonction, mais dans la suite, en examinant les tables d'intégrales définies de M. Bierens de Haan (Amsterdam 1858), j'en ai trouvé plusieurs autres; c'est pourquoi j'ai cru qu'une table à moindres intervalles des valeurs numériques de cette fonction ne serait pas inutile. C'est une table de ce genre, calculée pour chaque centième, que j'ai l'honneur d'offrir à la Société royale. Cette table est suivie d'une autre pour chaque vingt-quatrième partie de l'unité, parce qu'on rencontre souvent des arguments qui sont des fractions vulgaires et dont les dénominateurs ont les facteurs 3 et 6.

Comme les logarithmes naturels de Sinus et de Cosinus ne sont donnés nulle part, que je sache, avec un assez grand nombre de décimales, je vais donner aussi ceux qu'il a été nécessaire de calculer en construisant la table. Il se peut qu'ils deviennent utiles à quelqu'un.

La table même est calculée avec dix-huit décimales, mais il n'y a que quatorze de conservées. Il faut remarquer, qu'un point (.) derrière un nombre désigne que ce nombre est trop grand, mais un petit cinq (5) signifie que la $15^{\text{ième}}$ et la $16^{\text{ième}}$ décimale font un nombre entre 40 et 60 inclusivément.

1) Nova Acta Reg. Soc. Sc. Upsal., Ser. III. Vol. IX, f. I.

a	$l \operatorname{Sin} \frac{a\pi}{4}$		a	$l \operatorname{Sin} \frac{a\pi}{4}$	
0,01	4,8467 4494 2117 6388	1,99	0,41	1,1505 0481 3563 9225.	1,59
0,02	4,1536 2860 4388 5390	1,98	0,42	1,1272 6667 7782 2489.	1,58
0,03	3,7482 1490 1844 0619.	1,97	0,43	1,1046 1661 3213 2111	1,57
0,04	3,4606 0479 8957 3313	1,96	0,44	1,0825 2856 7216 5497.	1,56
0,05	3,2375 5378 2985 6738.	1,95	0,45	1,0609 7824 5887 2438	1,55
0,06	3,0553 4532 9595 7379.	1,94	0,46	1,0399 4295 9461 3087.	1,54
0,07	2,9013 2832 4026 0240	1,93	0,47	1,0194 0148 4349 0720.	1,53
0,08	2,7679 5117 9813 0536	1,92	0,48	0,9993 3393 9695 0467.	1,52
0,09	2,6503 4297 0531 5231	1,91	0,49	0,9797 2167 6666 8293	1,51
0,10	2,5451 7786 3530 4028.	1,90	0,50	0,9605 4717 8929 7305.	1,50
0,11	2,4500 8367 9492 9565	1,89	0,51	0,9417 9397 2977 8255	1,49
0,12	2,3633 0889 0719 0337	1,88	0,52	0,9234 4654 7172 8464	1,48
0,13	2,2835 2336 9559 6533$_5$	1,87	0,53	0,9054 9027 8495 5193.	1,47
0,14	2,2096 9318 8579 8116$_5$	1,86	0,54	0,8879 1136 6144 2232.	1,46
0,15	2,1409 9871 9800 1442	1,85	0,55	0,8706 9677 1226 9898	1,45
0,16	2,0767 7922 0290 1565.	1,84	0,56	0,8538 3416 1887 9824	1,44
0,17	2,0164 9424 6922 5879	1,83	0,57	0,8373 1186 3291 2394$_5$	1,43
0,18	1,9596 9611 6768 7938.	1,82	0,58	0,8211 1881 1954 7532	1,42
0,19	1,9060 0982 3353 9827$_5$	1,81	0,59	0,8052 4451 3988 6254.	1,41
0,20	1,8551 1811 0440 3035$_5$	1,80	0,60	0,7896 7900 6843 5519.	1,40
0,21	1,8067 5019 1330 4390.	1,79	0,61	0,7744 1282 4221 4569$_5$	1,39
0,22	1,7606 7309 4827 4743	1,78	0,62	0,7594 3696 3839 7339.	1,38
0,23	1,7166 8493 6468 2135	1,77	0,63	0,7447 4285 7775 1130	1,37
0,24	1,6746 0962 2869 8466.	1,76	0,64	0,7303 2234 5143 3853	1,36
0,25	1,6342 9263 7831 3855$_5$	1,75	0,65	0,7161 6764 6897 6707.	1,35
0,26	1,5955 9765 5398 5053.	1,74	0,66	0,7022 7134 2551 1481	1,34
0,27	1,5584 0379 2478 1396	1,73	0,67	0,6886 2634 8650 5979.	1,33
0,28	1,5226 0336 1343 0950	1,72	0,68	0,6752 2589 8845 1169$_5$	1,32
0,29	1,4881 0001 6701 6963	1,71	0,69	0,6620 6352 5410 2765	1,31
0,30	1,4548 0721 7021 7358$_5$	1,70	0,70	0,6491 3304 2102 0656$_5$	1,30
0,31	1,4226 4693 8245 0025	1,69	0,71	0,6364 2852 8227 4445$_5$	1,29
0,32	1,3915 4859 1786 6052	1,68	0,72	0,6239 4431 3829 4115.	1,28
0,33	1,3614 4810 9081 9449$_5$	1,67	0,73	0,6116 7496 5894 3478.	1,27
0,34	1,3322 8716 2834 8082$_5$	1,66	0,74	0,5996 1527 5498 1902	1,26
0,35	1,3040 1250 1179 6759$_5$	1,65	0,75	0,5877 6024 5815 8221	1,25
0,36	1,2765 7537 5664 4796	1,64	0,76	0,5761 0508 0925 0867	1,24
0,37	1,2499 3104 7623 8949.	1,63	0,77	0,5646 4517 5343 1024.	1,23
0,38	1,2240 3836 0395 0228	1,62	0,78	0,5533 7610 4238 1907.	1,22
0,39	1,1988 5936 7109 9256$_5$	1,61	0,79	0,5422 9361 4265 7835	1,21
0,40	1,1743 5900 5619 5487$_5$	1,60	0,80	0,5313 9361 4981 2219$_5$	1,20

$l \operatorname{Cos} \frac{a\pi}{4}$	a	$l \operatorname{Cos} \frac{a\pi}{4}$	a

a	$l \operatorname{Sin} \frac{a\pi}{4}$		a	$l \operatorname{Sin} \frac{a\pi}{4}$	
0,81	0,5206 7217 0786 4555	1,19	1,21	0,2062 7604 8976 2629.	0,79
0,82	0,5101 2549 3371 3440.	1,18	1,22	0,2007 0993 0490 1395.	0,78
0,83	0,4997 4993 4613 5970	1,17	1,23	0,1952 3596 8355 9885$_5$	0,77
0,84	0,4895 4197 9904 4047.	1,16	1,24	0,1898 5315 9110 0088$_5$	0,76
0,85	0,4794 9824 1869 5398$_5$	1,15	1,25	0,1845 6052 6654 3106$_5$	0,75
0,86	0,4696 1545 4458 1894	1,14	1,26	0,1793 5712 1435 5958	0,74
0,87	0,4598 9046 7374 0154$_5$	1,13	1,27	0,1742 4201 9657 1501.	0,73
0,88	0,4503 2024 0824 9892$_5$	1,12	1,28	0,1692 1432 2522 5982.	0,72
0,89	0,4409 0184 0570 3954	1,11	1,29	0,1642 7315 5509 9589.	0,71
0,90	0,4316 3243 3245 0945	1,10	1,30	0,1594 1766 7674 6149	0,70
0,91	0,4225 0928 1942 6721	1,09	1,31	0,1546 4703 0979 8891.	0,69
0,92	0,4135 2974 2040 5090.	1,08	1,32	0,1499 6043 9653 9865	0,68
0,93	0,4046 9125 7251 0905.	1,07	1,33	0,1453 5710 9572 1312.	0,67
0,94	0,3959 9135 5885 0481	1,06	1,34	0,1408 3627 7662 7837	0,66
0,95	0,3874 2764 7312 5014.	1,05	1,35	0,1363 9720 1336 8896.	0,65
0,96	0,3789 9781 8610 2516	1,04	1,36	0,1320 3915 7939 1582.	0,64
0,97	0,3706 9963 1383 2851$_5$	1,03	1,37	0,1277 6144 4220 4281	0,63
0,98	0,3625 3091 8749 8693.	1,02	1,38	0,1235 6337 5830 2203.	0,62
0,99	0,3544 8958 2480 2893.	1,01	1,39	0,1194 4428 6828 6279.	0,61
1,00	0,3465 7359 0279 9726$_5$	1,00	1,40	0,1154 0352 9216 7353.	0,60
1,01	0,3387 8097 3208 3936$_5$	0,99	1,41	0,1114 4047 2484 7984	0,59
1,02	0,3311 0982 3225 7436	0,98	1,42	0,1075 5450 3177 4581	0,58
1,03	0,3235 5829 0859 9013	0,97	1,43	0,1037 4502 4475 2945.	0,57
1,04	0,3161 2458 2986 7418	0,96	1,44	0,1000 1145 5792 0643$_5$	0,56
1,05	0,3088 0696 0717 2900	0,95	1,45	0,0963 5323 2386 9968	0,55
1,06	0,3016 0373 7385 6553	0,94	1,46	0,0927 6980 4991 5525$_5$	0,54
1,07	0,2945 1327 6632 0835	0,93	1,47	0,0892 6063 9450 0814.	0,53
1,08	0,2875 3399 0575 8304	0,92	1,48	0,0858 2521 6373 8407	0,52
1,09	0,2806 6433 8072 9043$_5$	0,91	1,49	0,0824 6303 0807 8634	0,51
1,10	0,2739 0282 3054 0413	0,90	1,50	0,0791 7359 1910 1875.	0,50
1,11	0,2672 4799 2938 5706.	0,89	1,51	0,0759 5642 2642 9853.	0,49
1,12	0,2606 9843 7120 1015.	0,88	1,52	0,0728 1105 9475 1503.	0,48
1,13	0,2542 5278 5520 2163	0,87	1,53	0,0697 3705 2095 9214$_5$	0,47
1,14	0,2479 0970 7206 5886	0,86	1,54	0,0667 3396 3139 1456.	0,46
1,15	0,2416 6790 9072 1668.	0,85	1,55	0,0638 0136 7917 7960.	0,45
1,16	0,2355 2613 4572 2660	0,84	1,56	0,0609 3885 4168 3849.	0,44
1,17	0,2294 8316 2516 6023.	0,83	1,57	0,0581 4602 1804 9236.	0,43
1,18	0,2235 3780 5913 4785	0,82	1,58	0,0554 2248 2682 1011.	0,42
1,19	0,2176 8891 0863 4990	0,81	1,59	0,0527 6786 0367 3668	0,41
1,20	0,2119 3535 5500 3419.	0,80	1,60	0,0501 8178 9921 6185.	0,40

$l \operatorname{Cos} \frac{a\pi}{4}$	a	$l \operatorname{Cos} \frac{a\pi}{4}$	a

a	$l \operatorname{Sin} \frac{a\pi}{4}$		a	$l \operatorname{Sin} \frac{a\pi}{4}$	
1,61	0,0476 6391 7688 2103	0,39	1,81	0,0111 7571 7600 9854.	0,19
1,62	0,0452 1390 1090 0092	0,38	1,82	0,0100 2643 9455 6311$_5$	0,18
1,63	0,0428 3140 8434 2406	0,37	1,83	0,0089 4009 6472 1656$_5$	0,17
1,64	0,0405 1611 8724 8772.	0,36	1,84	0,0079 1655 2056 3941.	0,16
1,65	0,0382 6772 1482 3350	0,35	1,85	0,0069 5567 7781 5369	0,15
1,66	0,0360 8591 6570 2540	0,34	1,86	0,0060 5735 3323 2287.	0,14
1,67	0,0339 7041 4029 1385.	0,33	1,87	0,0052 2146 6398 7972	0,13
1,68	0,0319 2093 3916 7254.	0,32	1,88	0,0044 4791 2710 7581$_5$	0,12
1,69	0,0299 3720 6154 6767.	0,31	1,89	0,0037 3659 5894 4631	0,11
1,70	0,0280 1897 0381 7613	0,30	1,90	0,0030 8742 7469 8461.	0,10
1,71	0,0261 6597 5813 0025	0,29	1,91	0,0025 0032 6797 2159$_5$	0,09
1,72	0,0243 7798 1104 8327	0,28	1,92	0,0019 7522 1037 0481$_5$	0,08
1,73	0,0226 5475 4226 0288$_5$	0,27	1,93	0,0015 1204 5113 7329	0,07
1,74	0,0209 9607 2334 2864$_5$	0,26	1,94	0,0011 1074 1683 2412.	0,06
1,75	0,0194 0172 1658 2902$_5$	0,25	1,95	0,0007 7126 1104 6743.	0,05
1,76	0,0178 7149 7385 1454	0,24	1,96	0,0004 9356 1415 6676	0,04
1,77	0,0164 0520 3553 0405.	0,23	1,97	0,0002 7760 8311 6213	0,03
1,78	0,0150 0265 2949 0207.	0,22	1,98	0,0001 2337 5128 7376	0,02
1,79	0,0136 6366 7011 7552	0,21	1,99	0,0000 3084 2830 8455	0,01
1,80	0,0123 8807 5739 1905	0,20			

$l \operatorname{Cos} \frac{a\pi}{4}$	a	$l \operatorname{Cos} \frac{a\pi}{4}$	a

b	$\pi l\left(2\,\mathrm{Cos}\,\frac{b\pi}{2}\right)$	b	$\pi l\,\mathrm{tg}\,\frac{b\pi}{4}$
0,01	+ 2,1771 9849 5905 5243$_5$	0,01	15,2264 0140 8369 4616
0,02	+ 2,1760 3552 1386 0454	0,02	13,0486 2151 4889 3820
0,03	+ 2,1740 9659 2391 4957	0,03	11,7744 9226 7476 7277
0,04	+ 2,1713 8075 0404 3956	0,04	10,8702 6004 4464 3787$_5$
0,05	+ 2,1678 8665 0845 8423	0,05	10,1686 5219 2009 1921$_5$
0,06	+ 2,1636 1256 0407 6756$_5$	0,06	9,5951 6094 3725 7492
0,07	+ 2,1585 5635 3603 1492.	0,07	9,1100 4151 8590 9446$_5$
0,08	+ 2,1527 1550 8521 4733	0,08	8,6895 6975 2096 6835$_5$
0,09	+ 2,1460 8710 1768 1285.	0,09	8,3184 4299 7417 4756
0,10	+ 2,1386 6780 2569 2472$_5$	0,10	7,9862 1263 8688 7189.
0,11	+ 2,1304 5386 6014 6015$_5$	0,11	7,6854 2602 5963 8426
0,12	+ 2,1214 4112 5409 7801	0,12	7,4105 8031 9350 4334.
0,13	+ 2,1116 2498 3703 9679	0,13	7,1574 9652 1629 7901
0,14	+ 2,1010 0040 3955 3088$_5$	0,14	6,9229 2615 1229 2889
0,15	+ 2,0895 6189 8791 1107	0,15	6,7042 9394 3250 0711$_5$
0,16	+ 2,0773 0351 8815 0924.	0,16	6,4995 2375 9809 3656.
0,17	+ 2,0642 1883 9908 4380.	0,17	6,3069 1737 0738 7451$_5$
0,18	+ 2,0503 0094 9365 5561	0,18	6,1250 6793 5173 8144
0,19	+ 2,0355 4243 0799 0936.	0,19	5,9527 9690 6405 0020.
0,20	+ 2,0199 3534 7741 8591$_5$	0,20	5,7891 0713 9566 2815.
0,21	+ 2,0034 7122 5865 8058	0,21	5,6331 4745 2050 4331
0,22	+ 1,9861 4103 3730 0245.	0,22	5,4841 8543 5794 1981$_5$
0,23	+ 1,9679 3516 1960 7303.	0,23	5,3415 8631 7973 9233
0,24	+ 1,9488 4340 0756 3805$_5$	0,24	5,2047 9632 3944 8622
0,25	+ 1,9288 5491 5600 2409.	0,25	5,0733 2943 8598 2868.
0,26	+ 1,9079 5822 1050 7896$_5$	0,26	4,9467 5676 5685 4084
0,27	+ 1,8861 4115 2467 1829.	0,27	4,8246 9789 6330 4215
0,28	+ 1,8633 9083 5512 4324.	0,28	4,7068 1384 7978 2994
0,29	+ 1,8396 9365 3260 7996.	0,29	4,5928 0124 2888 7608
0,30	+ 1,8150 3521 0717 9715.	0,30	4,4823 8747 3872 4059$_5$
0,31	+ 1,7894 0029 6542 6275	0,31	4,3753 2666 2917 9768.
0,32	+ 1,7627 7284 1735 7604.	0,32	4,2713 9626 1581 5113$_5$
0,33	+ 1,7351 3587 5039 2684$_5$	0,33	4,1703 9417 4582 2086$_5$
0,34	+ 1,7064 7147 4757 5425	0,34	4,0721 3631 2838 6581.
0,35	+ 1,6767 6071 6684 6128.	0,35	3,9764 5450 1216 7975$_5$
0,36	+ 1,6459 8361 7784 4338.	0,36	3,8831 9468 1003 1136
0,37	+ 1,6141 1907 5232 2518	0,37	3,7922 1535 8629 1078$_5$
0,38	+ 1,5811 4480 0382 7842	0,38	3,7033 8626 1224 5908$_5$
0,39	+ 1,5470 3724 7173 2618	0,39	3,6165 8716 6749 2612$_5$
0,40	+ 1,5117 7153 4427 7869$_5$	0,40	3,5317 0688 2169 6461

b	$\pi l\left(2\,\mathrm{Cos}\,\frac{b\pi}{2}\right)$	b	$\pi l\,\mathrm{tg}\,\frac{b\pi}{4}$
0,41	+ 1,4753 2136 1446 2370	0,41	3,4486 4234 7736 3421.
0,42	+ 1,4376 5891 6202 9702.	0,42	3,3672 9784 9119 4894.
0,43	+ 1,3987 5477 5389 7867.	0,43	3,2875 8432 2166 0424.
0,44	+ 1,3585 7779 5444 7507.	0,44	3,2094 1873 7495 0195
0,45	+ 1,3170 9499 3599 5208$_5$	0,45	3,1327 2355 4158 4230
0,46	+ 1,2742 7141 7853 2165.	0,46	3,0574 2623 3253 2037
0,47	+ 1,2300 7000 4637 6021.	0,47	2,9834 5880 3742 0197.
0,48	+ 1,1844 5142 2773 3171.	0,48	2,9107 5747 3881 6825
0,49	+ 1,1373 7390 2126 1909.	0,49	2,8392 6228 2611 0218.
0,50	+ 1,0887 9304 5151 8011.	0,50	2,7689 1678 6048 6807
0,51	+ 1,0386 6161 9259 8725$_5$	0,51	2,6996 6777 4923 5484$_5$
0,52	+ 0,9869 2932 7631 0786.	0,52	2,6314 6501 9328 2622$_5$
0,53	+ 0,9335 4255 5770 0735$_5$	0,53	2,5642 6103 7667 3963$_5$
0,54	+ 0,8784 4409 0668 2568$_5$	0,54	2,4980 1088 7081 1493
0,55	+ 0,8215 7280 8969 7264	0,55	2,4326 7197 2974 4447.
0,56	+ 0,7628 6332 9965 0294$_5$	0,56	2,3682 0387 5580 1141.
0,57	+ 0,7022 4562 8565 5222.	0,57	2,3045 6819 1741 2606
0,58	+ 0,6396 4460 2612 1222	0,58	2,2417 2839 0318 6290
0,59	+ 0,5749 7958 7919 3191.	0,59	2,1796 4967 9819 3308.
0,60	+ 0,5081 6381 3314 0722.	0,60	2,1182 9888 7008 1560
0,61	+ 0,4391 0378 6556 7626$_5$	0,61	2,0576 4434 5405 7636
0,62	+ 0,3676 9860 0373 5963	0,62	1,9976 5579 2702 4708$_5$
0,63	+ 0,2938 3914 5818 2678	0,63	1,9383 0427 6224 8442$_5$
0,64	+ 0,2174 0721 7727 9986	0,64	1,8795 6206 5687 0870
0,65	+ 0,1382 7449 4033 3587.	0,65	1,8214 0257 2542 2310
0,66	+ 0,0563 0136 6978 2178$_5$	0,66	1,7638 0027 5320 9943$_5$
0,67	− 0,0286 6440 0281 7259	0,67	1,7067 3065 0410 2279
0,68	− 0,1167 8922 3951 3266	0,68	1,6501 7010 7779 3247.
0,69	− 0,2082 5549 6159 8433	0,69	1,5940 9593 1212 7914$_5$
0,70	− 0,3032 6367 6290 1845	0,70	1,5384 8622 2651 2541.
0,71	− 0,4020 3473 7057 8294	0,71	1,4833 1985 0282 2037.
0,72	− 0,5048 1304 0057 6817.	0,72	1,4285 7640 0056 4352.
0,73	− 0,6118 6973 4613 9664	0,73	1,3742 3613 0336 9193
0,74	− 0,7235 0579 8277 4726.	0,74	1,3202 7992 9414 2540
0,75	− 0,8400 6187 0448 4398	0,75	1,2666 8927 5647 2723
0,76	− 0,9619 1407 3125 3020.	0,76	1,2134 4620 0009 1879.
0,77	− 1,0894 9107 1292 4734	0,77	1,1605 3325 0839 1481
0,78	− 1,2232 7770 3764 9950	0,78	1,1079 3346 0616 4992.
0,79	− 1,3638 2662 3253 6836.	0,79	1,0556 3031 4590 6868
0,80	− 1,5117 7153 4427 7869$_5$	0,80	1,0036 0772 1113 7147$_5$

b	$\pi l\left(2\,\mathrm{Cos}\,\frac{b\pi}{2}\right)$	b	$\pi l\,\mathrm{tg}\,\frac{b\pi}{4}$
0,81	— 1,6678 4383 0425 4973.	0,81	0,9518 4998 3534 6470.
0,82	— 1,8328 9373 1637 5575	0,82	0,9003 4177 3526 9179
0,83	— 2,0079 1747 2930 2201	0,83	0,8490 6810 5729 3456.
0,84	— 2,1940 9274 2766 4190.	0,84	0,7980 1431 3590 8479_5
0,85	— 2,3928 2557 5081 2952	0,85	0,7471 6602 6317 0429.
0,86	— 2,6058 1344 4022 9905_5	0,86	0,6965 0914 6824 2645
0,87	— 2,8351 3178 1981 4405	0,87	0,6460 2983 0613 1305
0,88	— 3,0833 5519 8535 0821.	0,88	0,5957 1446 5479 7212
0,89	— 3,3537 3156 9779 5966.	0,89	0,5455 4965 1987 7423.
0,90	— 3,6504 3933 6997 0342	0,90	0,4955 2218 4629 7944
0,91	— 3,9789 8083 3405 6860.	0,91	0,4456 1903 3610 1189
0,92	— 4,3468 0825 1287 8923.	0,92	0,3958 2732 7184 9596
0,93	— 4,7643 6979 7626 1397	0,93	0,3461 3433 4481 1813.
0,94	— $5,2469\,6775\,8942\,7577_5$	0,94	0,2965 2744 8867 5285
0,95	— 5,8183 2598 7842 8765	0,95	$0,2469\,9417\,1427\,7015_5$
0,96	— 6,5181 8900 1692 2879	0,96	0,1975 2209 5142 2385.
0,97	— 7,4210 6435 1334 2535.	0,97	0,1480 9888 9068 6374
0,98	— 8,6942 2452 3078 3333	0,98	0,0987 1228 2866 3363
0,99	— 10,8714 2301 8983 8577.	0,99	0,0493 5005 1486 6999.

a	$L(a)$	a	$\dot{H}(a)$
	+		+
0,01	157,0817 8593 0338 60.	0,01	157,0753 2620 9669 51.
0,02	78,5441 2306 4602 79$_5$	0,02	78,5312 0314 5066 71
0,03	52,3663 3820 5100 01	0,03	52,3469 5713 0132 55$_5$
0,04	39,2785 2340 5366 86	0,04	39,2526 7973 9699 85
0,05	31,4266 9725 5087 03	0,05	31,3943 8908 4242 16$_5$
0,06	26,1928 6610 0259 72.	0,06	26,1540 9102 9872 84.
0,07	22,4550 3278 9009 69.	0,07	22,4097 8794 3985 09
0,08	19,6521 9885 8102 89.	0,08	19,6004 8088 1596 96
0,09	17,4726 9859 5174 72$_5$	0,09	17,4145 0364 7408 09.
0,10	15,7295 3266 3672 48	0,10	15,6648 5642 0569 68
0,11	14,3037 0156 8785 12	0,11	14,2325 3922 0440 71
0,12	13,1158 7239 0451 51.	0,12	13,0382 1863 9421 33
0,13	12,1111 2240 8866 83	0,13	12,0269 7146 8282 99
0,14	11,2502 2117 6238 51$_5$	0,14	11,1595 6676 7746 57$_5$
0,15	10,5043 9975 9875 63.	0,15	10,4072 3511 1392 26.
0,16	9,8520 8151 9153 84$_5$	0,16	9,7483 9936 2443 11$_5$
0,17	9,2767 6672 5937 10	0,17	9,1665 5929 4003 33
0,18	8,7656 2231 1556 52.	0,18	8,6488 8133 5851 57
0,19	8,3085 1695 6878 68	0,19	8,1852 3366 4321 31
0,20	7,8973 4565 5382 46.	0,20	7,7675 1076 5187 22$_5$
0,21	7,5255 4725 8242 00	0,21	7,3891 5097 8555 07.
0,22	7,1877 5359 8050 88.	0,22	7,0447 8562 2389 83$_5$
0,23	6,8795 3014 5514 42	0,23	6,7299 7964 9009 10.
0,24	6,5971 8150 1995 13	0,24	6,4410 3713 7426 20
0,25	6,3376 0357 3872 81.	0,25	6,1748 5346 7504 75.
0,26	6,0981 6986 0539 08	0,26	5,9288 0160 7743 91
0,27	5,8766 4301 1751 31$_5$	0,27	5,7006 4367 2419 31.
0,28	5,6711 0533 7006 61	0,28	5,4884 6143 0739 96
0,29	5,4799 0369 2310 99.	0,29	5,2906 0119 3396 24.
0,30	5,3016 0538 9618 74	0,30	5,1056 2972 1773 52.
0,31	5,1349 6263 9952 62	0,31	4,9322 9867 0842 01.
0,32	4,9788 8366 3462 72$_5$	0,32	4,7695 1569 8980 39
0,33	4,8324 0905 2225 58	0,33	4,6163 2083 0534 61$_5$
0,34	4,6946 9230 4337 92	0,34	4,4718 6698 9665 41.
0,35	4,5649 8369 5045 88$_5$	0,35	4,3354 0387 1227 00.
0,36	4,4426 1683 6043 88$_5$	0,36	4,2062 6449 9807 69.
0,37	4,3269 9741 4369 73	0,37	4,0838 5396 8361 89
0,38	4,2175 9370 9392 97.	0,38	3,9676 3995 4928 34$_5$
0,39	4,1139 2856 8751 97	0,39	3,8571 4469 8290 39.
0,40	4,0155 7258 7924 59.	0,40	3,7519 3817 7262 64.

a	L(a)	a	H(a)
	+		+
0,41	3,9221 3828 7934 58.	0,41	3,6516 3228 8106 11.
0,42	3,8332 7512 4838 81	0,42	3,5558 7585 3716 26.
0,43	3,7486 6519 5589 75.	0,43	3,4643 5032 9178 22
0,44	3,6680 1952 9487 08$_5$	0,44	3,3767 6609 2902 74.
0,45	3,5910 7487 4127 86	0,45	3,2928 5923 2251 59.
0,46	3,5175 9090 0605 87	0,46	3,2123 8874 8403 23.
0,47	3,4473 4776 5520 29.	0,47	3,1351 3411 8017 72$_5$
0,48	3,3801 4397 7759 36.	0,48	3,0608 9315 9666 84
0,49	3,3157 9452 6521 08.	0,49	2,9894 8016 1490 39.
0,50	3,2541 2923 3998 51.	0,50	2,9207 2423 3506 24.
0,51	3,1949 9130 1894 50$_5$	0,51	2,8544 6785 3738 15
0,52	3,1382 3502 5674 40	0,52	2,7905 6558 2069 51.
0,53	3,0837 2965 4403 69	0,53	2,7288 8291 9669 43
0,54	3,0313 4837 7299 66	0,54	2,6692 9529 5119 64$_5$
0,55	2,9809 7742 0870 87	0,55	2,6116 8716 1115 43$_5$
0,56	2,9325 1024 2822 22.	0,56	2,5559 5118 7917 74
0,57	2,8858 4781 0843 21	0,57	2,5019 8754 1673 46.
0,58	2,8408 9795 6036 29	0,58	2,4497 0323 7359 94$_5$
0,59	2,7975 7479 2130 81	0,59	2,3990 1155 7498 82
0,60	2,7557 9819 2809 04	0,60	2,3498 3152 8964 48.
0,61	2,7154 9332 0476 99.	0,61	2,3020 8745 1219 43$_5$
0,62	2,6765 9020 0673 21	0,62	2,2557 0847 0168 80.
0,63	2,6390 2333 7046 16.	0,63	2,2106 2819 2563 52.
0,64	2,6027 3136 2464 45.	0,64	2,1667 8433 6515 94
0,65	2,5676 5672 2370 41$_5$	0,65	2,1241 1841 4236 96.
0,66	2,5337 4538 6958 84.	0,66	2,0825 7544 3575 73
0,67	2,5009 4658 9170 99.	0,67	2,0421 0368 5350 98.
0,68	2,4692 1258 5848 35	0,68	2,0026 5440 3817 06.
0,69	2,4384 9843 9698 26	0,69	1,9641 8164 7915 96.
0,70	2,4087 6181 9992 31	0,70	1,9266 4205 1234 69.
0,71	2,3799 6282 0152 52.	0,71	1,8899 9464 8821 82
0,72	2,3520 6379 0585 60$_5$	0,72	1,8542 0070 9222 08
0,73	2,3250 2918 5305 29.	0,73	1,8192 2358 0267 43
0,74	2,2988 2542 1040 70.	0,74	1,7850 2854 7321 19
0,75	2,2734 2074 7667 83.	0,75	1,7515 8270 2810 47.
0,76	2,2487 8512 8923 64.	0,76	1,7188 5482 6004 71.
0,77	2,2248 9013 2470 56.	0,77	1,6868 1527 2106 40
0,78	2,2017 0882 8474 98.	0,78	1,6554 3586 9815 41.
0,79	2,1792 1569 5948 10	0,79	1,6246 8982 6613 37$_5$
0,80	2,1573 8653 6172 94.	0,80	1,5945 5164 1089 70.

a	L(a)	a	H(a)
	+		+
0,81	2,1361 9839 2608 11.	0,81	1,5649 9702 1697 48$_5$
0,82	2,1156 2947 6718 79	0,82	1,5360 0281 1387 31$_5$
0,83	2,0956 5909 9238 32	0,83	1,5075 4691 7619 76
0,84	2,0762 6760 6411 42.	0,84	1,4796 0824 7304 84.
0,85	2,0574 3632 0812 50	0,85	1,4521 6664 6258 92$_5$
0,86	2,0391 4748 6370 65.	0,86	1,4252 0284 2807 57
0,87	2,0213 8421 7266 76.	0,87	1,3986 9839 5196 49.
0,88	2,0041 3045 0399 27$_5$	0,88	1,3726 3564 2503 46$_5$
0,89	1,9873 7090 1142 29.	0,89	1,3469 9765 8771 37.
0,90	1,9710 9102 2144 70$_5$	0,90	1,3217 6821 0106 88
0,91	1,9552 7696 4941 63	0,91	1,2969 3171 4511 86
0,92	1,9399 1554 4169 19	0,92	1,2724 7320 4234 03
0,93	1,9249 9420 4192 52.	0,93	1,2483 7829 0441 88
0,94	1,9105 0098 7972 97.	0,94	1,2246 3313 0044 76.
0,95	1,8964 2450 8015 91	0,95	1,2012 2439 4493 83.
0,96	1,8827 5391 9253 85$_5$	0,96	1,1781 3924 0412 98$_5$
0,97	1,8694 7889 3732 21$_5$	0,97	1,1553 6528 1920 60
0,98	1,8565 8959 6976 34	0,98	1,1328 9056 4514 04$_5$
0,99	1,8440 7666 5928 69.	0,99	1,1107 0354 0398 65.
1,00	1,8319 3118 8354 44.	1,00	1,0887 9304 5151 80
1,01	1,8201 4468 3622 59$_5$	1,01	1,0671 4827 5620 83.
1,02	1,8087 0908 4777 41.	1,02	1,0457 5876 8960 74
1,03	1,7976 1672 1822 30	1,03	1,0246 1438 2724 48.
1,04	1,7868 6030 6145 15.	1,04	1,0037 0527 5924 36
1,05	1,7764 3291 6020 01	1,05	0,9830 2189 0988 81
1,06	1,7663 2798 3126 06	1,06	0,9625 5493 6543 37.
1,07	1,7565 3928 0013 35$_5$	1,07	0,9422 9537 0949 40.
1,08	1,7470 6090 8581 76	1,08	0,9222 3438 6537 88$_5$
1,09	1,7378 8728 9182 97.	1,09	0,9023 6339 4479 30.
1,10	1,7290 1315 0881 82	1,10	0,8826 7401 0233 61
1,11	1,7204 3352 2264 87	1,11	0,8631 5803 9527 47$_5$
1,12	1,7121 4372 3109 79	1,12	0,8438 0746 4807 95$_5$
1,13	1,7041 3935 6772 13$_5$	1,13	0,8246 1443 2124 48.
1,14	1,6964 1630 3281 00$_5$	1,14	0,8055 7123 8392 45
1,15	1,6889 7071 3122 17$_5$	1,15	0,7866 7031 8993 60
1,16	1,6817 9900 1690 50$_5$	1,16	0,7679 0423 5669 44
1,17	1,6748 9784 4396 69.	1,17	0,7492 6566 4665 19
1,18	1,6682 6417 2416 43.	1,18	0,7307 4738 5082 39
1,19	1,6618 9516 9073 39.	1,19	0,7123 4226 7398 75
1,20	1,6557 8826 6850 27$_5$	1,20	0,6940 4326 2114 20

a	$L(a)$	a	$H(a)$
	+		
1,21	1,6499 4114 5025 54	1,21	+ 0,6758 4338 8481 93
1,22	1,6443 5172 7936 49	1,22	+ 0,6577 3572 3282 94
1,23	1,6390 1818 3872 66.	1,23	+ 0,6397 1338 9601 99.
1,24	1,6339 3892 4606 84	1,24	+ 0,6217 6954 5561 95_5
1,25	1,6291 1260 5574 67	1,25	+ 0,6038 9737 2972 39.
1,26	1,6245 3812 6717 14_5	1,26	+ 0,5860 9006 5846 37_5
1,27	1,6202 1463 4004 65_5	1,27	+ 0,5683 4081 8738 09
1,28	1,6161 4152 1665 05.	1,28	+ 0,5506 4281 4850 89_5
1,29	1,6123 1843 5142 77	1,29	+ 0,5329 8921 3863 18
1,30	1,6087 4527 4821 00.	1,30	+ 0,5153 7313 9415 96
1,31	1,6054 2220 0543 75	1,31	+ 0,4977 8766 6202 34
1,32	1,6023 4963 6980 95.	1,32	+ 0,4802 2580 6594 78_5
1,33	1,5995 2827 9885 29.	1,33	+ 0,4626 8049 6741 03
1,34	1,5969 5910 3297 09_5	1,34	+ 0,4451 4458 2053 88
1,35	1,5946 4336 7760 62	1,35	+ 0,4276 1080 2013 44
1,36	1,5925 8262 9623 99.	1,36	+ 0,4100 7177 4193 07
1,37	1,5907 7875 1504 32	1,37	+ 0,3925 1997 7411 72
1,38	1,5892 3391 4010 32.	1,38	+ 0,3749 4773 3905 64.
1,39	1,5879 5062 8826 28.	1,39	+ 0,3573 4719 0401 38
1,40	1,5869 3175 3275 21.	1,40	+ 0,3397 1029 7959 48.
1,41	1,5861 8050 6493 67	1,41	+ 0,3220 2879 0443 59.
1,42	1,5857 0048 7368 20.	1,42	+ 0,3042 9416 1453 62
1,43	1,5854 9569 4402 77.	1,43	+ 0,2864 9763 9542 31_5
1,44	1,5855 7054 7708 89	1,44	+ 0,2686 3016 1513 19.
1,45	1,5859 2991 3335 50.	1,45	+ 0,2506 8234 3572 94.
1,46	1,5865 7913 0184 71	1,46	+ 0,2326 4445 0082 72
1,47	1,5875 2403 9793 32_5	1,47	+ 0,2145 0635 9619 81_5
1,48	1,5887 7101 9298 13.	1,48	+ 0,1962 5752 8023 06_5
1,49	1,5903 2701 7947 98.	1,49	+ 0,1778 8694 0851 39
1,50	1,5921 9959 7577 02_5	1,50	+ 0,1593 8310 5233 44
1,51	1,5943 9697 7513 59.	1,51	+ 0,1407 3392 9426 79
1,52	1,5969 2808 4469 11	1,52	+ 0,1219 2674 1535 59_5
1,53	1,5998 0260 8033 43.	1,53	+ 0,1029 4819 4754 14.
1,54	1,6030 3106 2498 48_5	1,54	+ 0,0837 8420 9607 92.
1,55	1,6066 2485 5845 71.	1,55	+ 0,0644 1990 1951 62_5
1,56	1,6105 9636 6865 43	1,56	+ 0,0448 3950 2949 97_5
1,57	1,6149 5903 1534 98_5	1,57	+ 0,0250 2626 9909 72
1,58	1,6197 2743 9969 98.	1,58	+ 0,0049 6238 6643 40.
1,59	1,6249 1744 5487 97	1,59	− 0,0153 7114 8178 99_5
1,60	1,6305 4628 7592 80_5	1,60	− 0,0359 9464 6503 10_5

a	L(a)	a	H(a)
	+		−
1,61	1,6366 3273 1012 09.	1,61	0,0569 2987 2324 83$_5$
1,62	1,6431 9722 3312 35	1,62	0,0782 0020 1614 87.
1,63	1,6502 6207 4092 48$_5$	1,63	0,0998 3080 3737 62.
1,64	1,6578 5165 9337 60.	1,64	0,1218 4884 7950 28
1,65	1,6659 9265 5228 62	1,65	0,1442 8373 9280 79.
1,66	1,6747 1430 6583 00	1,66	0,1671 6738 8963 24.
1,67	1,6840 4873 6193 33.	1,67	0,1905 3452 5700 79$_5$
1,68	1,6940 3130 2692 78.	1,68	0,2144 2305 5387 94.
1,69	1,7047 0101 6287 04	1,69	0,2388 7447 8634 42.
1,70	1,7161 0102 3854 01	1,70	0,2639 3437 7595 09.
1,71	1,7282 7917 7665 64$_5$	1,71	0,2896 5298 6362 45$_5$
1,72	1,7412 8870 5516 37.	1,72	0,3160 8586 2708 79
1,73	1,7551 8900 4606 60.	1,73	0,3432 9468 3528 80.
1,74	1,7700 4658 7481 12	1,74	0,3713 4819 2284 63$_5$
1,75	1,7859 3621 6151 95.	1,75	0,4003 2333 4585 30
1,76	1,8029 4227 0938 72	1,76	0,4303 0662 8435 26.
1,77	1,8211 6041 4527 00.	1,77	0,4613 9582 9654 65
1,78	1,8406 9963 0709 46	1,78	0,4937 0197 1938 09$_5$
1,79	1,8616 8474 3341 00	1,79	0,5273 5188 7084 66
1,80	1,8842 5955 7339 99	1,80	0,5624 9134 7233 11.
1,81	1,9085 9081 4855 57.	1,81	0,5992 8902 2223 83
1,82	1,9348 7323 3325 76.	1,82	0,6379 4151 8813 89$_5$
1,83	1,9633 3599 9617 28$_5$	1,83	0,6786 7987 5937 45.
1,84	1,9942 5125 4341 83	1,84	0,7217 7805 0107 80.
1,85	2,0279 4534 3417 76.	1,85	0,7675 6416 8031 44$_5$
1,86	2,0648 1399 1872 92	1,86	0,8164 3570 1431 04.
1,87	2,1053 4315 8322 98	1,87	0,8688 8032 2512 92.
1,88	2,1501 3832 1008 64.	1,88	0,9255 0519 0963 88
1,89	2,1999 6663 4457 64	1,89	0,9870 7911 1544 17.
1,90	2,2558 1938 0976 58.	1,90	1,0545 9498 6482 75
1,91	2,3190 0766 3177 65	1,91	1,1293 6550 8881 25
1,92	2,3913 1505 6637 52.	1,92	1,2131 7581 6224 53
1,93	2,4752 5334 3514 48	1,93	1,3085 3922 4825 27$_5$
1,94	2,5745 1781 8494 71.	1,94	1,4191 5253 6574 10$_5$
1,95	2,6948 6362 5285 18	1,95	1,5507 7237 6213 93
1,96	2,8459 7711 4200 58$_5$	1,96	1,7130 8654 9686 54.
1,97	3,0461 0321 6228 53$_5$	1,97	1,9243 4141 8936 68
1,98	3,3364 0423 5311 50$_5$	1,98	2,2257 0069 4912 85$_5$
1,99	3,8489 2037 7506 25.	1,99	2,7492 0596 7426 28

m	$l \operatorname{Sin}\left(\frac{m}{24} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$		m	$\pi l 2 \operatorname{Cos}\left(\frac{m}{24} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
1	3,4197 9679 8759 7810.	47	1	+ 2,1708 5248 8124 5428
2	2,7271 8517 4107 9374	46	2	+ 2,1505 9370 2495 3183$_5$
3	2,3226 1291 4282 9712.	45	3	+ 2,1166 3378 4074 9235.
4	2,0361 8136 5691 2154	44	4	+ 2,0686 7262 7033 0341$_5$
5	1,8146 4655 1393 1938.	43	5	+ 2,0062 7513 9004 0964.
6	1,6342 9263 7831 3855$_5$	42	6	+ 1,9288 5491 5600 2409.
7	1,4824 6935 7418 9810	41	7	+ 1,8356 5106 7505 7754
8	1,3516 2612 9022 3537.	40	8	+ 1,7256 9614 7611 6013
9	1,2368 9319 1795 6379	39	9	+ 1,5977 7209 5623 7566.
10	1,1349 4604 1359 0268.	38	10	+ 1,4503 4954 3479 6718.
11	1,0434 1399 2160 1104	37	11	+ 1,2815 0333 5495 7512
12	0,9605 4717 8929 7305.	36	12	+ 1,0887 9304 5151 8011.
13	0,8850 1730 8677 3841$_5$	35	13	+ 0,8690 9036 6999 5671
14	0,8157 9246 4819 1354$_5$	34	14	+ 0,6183 2308 3553 3624.
15	0,7520 5521 0807 8465$_5$	33	15	+ 0,3310 8281 9976 4843
16	0,6931 4718 0559 9453	32	16	— 0,0000 0000 0000 0000
17	0,6385 3049 8512 3020.	31	17	— 0,3853 0152 4026 1036
18	0,5877 6024 5815 8221	30	18	— 0,8400 6187 0448 4398
19	0,5404 6438 2914 2763	29	19	— 1,3879 5205 5450 7340.
20	0,4963 2883 0209 2640$_5$	28	20	— 2,0686 7262 7033 0342.
21	0,4550 8619 4840 4113	27	21	— 2,9566 9565 4523 3633.
22	0,4165 0712 4756 8842	26	22	— 4,2192 6632 9528 3525
23	0,3803 9358 8741 9772	25	23	— 6,3901 1881 7652 8953
24	0,3465 7359 0279 9726$_5$	24		
25	0,3148 9696 3961 1914.	23		
26	0,2852 3199 9694 1446	22		
27	0,2574 6270 7377 8242$_5$	21		
28	0,2314 8658 2448 2182	20		
29	0,2072 1276 7055 8515$_5$	19		
30	0,1845 6052 6654 3106$_5$	18		

$l \operatorname{Cos}\left(\frac{m}{24} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$	m

m	$l \operatorname{Sin}\left(\frac{m}{24} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$		m	$\pi l \operatorname{tg}\left(\frac{m}{24} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$
	—			—
31	0,1634 5798 0236 6714	17	1	10,7419 2600 1247 1413
32	0,1438 4103 6225 8905.	16	2	8,5609 7130 5777 4381
33	0,1256 5249 6406 4094	15	3	7,2815 3950 2157 7574.
34	0,1088 4129 8189 0281.	14	4	6,3698 6003 2023 6708_5
35	0,0933 6187 1576 7058.	13	5	5,6586 3631 3379 8833.
36	0,0791 7359 1910 1875.	12	6	5,0733 2943 8598 2868.
37	0,0662 4031 3156 7191	11	7	4,5741 5598 0245 5965
38	0,0545 2996 9410 1826.	10	8	4,1373 4525 4066 0683
39	0,0440 1423 4580 1295	9	9	3,7475 3976 8610 0944
40	0,0346 6823 2097 5369_5	8	10	3,3942 2719 4454 8303_5
41	0,0264 7028 7960 0997	7	11	3,0698 8165 1238 3649.
42	0,0194 0172 1658 2902_5	6	12	2,7689 1678 6048 6807
43	0,0134 4667 0525 7783.	5	13	2,4870 5890 5369 9078_5
44	0,0085 9194 3891 0835_5	4	14	2,2209 5259 1531 8790
45	0,0048 2690 4108 3596_5	3	15	1,9679 0216 5752 2603.
46	0,0021 4337 2143 2233.	2	16	1,7256 9614 7611 6013
47	0,0005 3555 5908 1018.	1	17	1,4924 8433 3337 1237.
	—		18	1,2666 8927 5647 2723.
			19	1,0469 4082 8177 7551
			20	0,8320 2645 9926 3094
			21	0,6208 5249 6389 2581_5
			22	0,4124 1296 8496 1841
			23	0,2057 6371 5246 2439_5
	$l \operatorname{Cos}\left(\frac{m}{24} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$		m	

m	$L\left(\frac{m}{24}\right)$	m	$H\left(\frac{m}{24}\right)$
	+		
1	37,7080 8625 7763 29.	1	+ 37,6811 6532 0467 12
2	18,8675 2091 8432 46$_5$	2	+ 18,8136 4440 2034 66.
3	12,5935 5863 3158 61.	3	+ 12,5124 5704 1377 55$_5$
4	9,4608 3792 4163 69	4	+ 9,3528 0647 7870 97.
5	7,5850 2000 2319 82	5	+ 7,4497 1798 9332 51$_5$
6	6,3376 0357 3872 81.	6	+ 6,1748 5346 7504 75.
7	5,4493 2705 9755 09	7	+ 5,2589 1339 3208 15$_5$
8	4,7855 6924 9027 52$_5$	8	+ 4,5672 3722 8843 44
9	4,2715 4961 3005 08	9	+ 4,0250 0345 0478 29
10	3,8624 0852 7396 44.	10	+ 3,5873 0946 1936 07$_5$
11	3,5296 0747 2068 66$_5$	11	+ 3,2255 7145 4832 28.
12	3,2541 2923 3998 51.	12	+ 2,9207 2423 3506 24.
13	3,0228 1658 7405 58	13	+ 2,6595 5947 1038 88.
14	2,8262 8022 8608 55.	14	+ 2,4326 3316 4599 61.
15	2,6576 4366 5202 58.	15	+ 2,2330 0997 8547 06.
16	2,5117 5891 3327 50	16	+ 2,0554 7831 5515 94.
17	2,3846 9916 5579 84.	17	+ 1,8960 4226 1515 92
18	2,2734 2074 7667 83.	18	+ 1,7515 8270 2810 47.
19	2,1755 3202 8364 89$_5$	19	+ 1,6196 2525 3932 65$_5$
20	2,0891 3188 9664 93.	20	+ 1,4981 7757 2271 15.
21	2,0126 9461 9091 02.	21	+ 1,3856 1288 1566 64$_5$
22	1,9449 8651 2479 01.	22	+ 1,2805 8494 2363 27.
23	1,8850 0460 8357 07	23	+ 1,1819 6482 6268 93$_5$
24	1,8319 3118 8354 44.	24	+ 1,0887 9304 5151 80
25	1,7850 9974 0484 36$_5$	25	+ 1,0002 4262 4101 55
26	1,7439 6944 0663 91.	26	+ 0,9155 9003 0374 97
27	1,7081 0612 4745 34.	27	+ 0,8341 9174 0543 57
28	1,6771 6836 3244 29	28	+ 0,7554 6480 1355 32.
29	1,6508 9771 6135 69.	29	+ 0,6788 7011 1054 30$_5$
30	1,6291 1260 5574 67	30	+ 0,6038 9737 2972 39.
31	1,6117 0555 1357 71.	31	+ 0,5300 5078 1795 24.
32	1,5986 4381 1363 40	32	+ 0,4568 3450 4152 54
33	1,5899 7380 3621 56	33	+ 0,3837 3689 7985 49.
34	1,5858 3011 8970 27$_5$	34	+ 0,3102 1214 2545 65.
35	1,5864 5055 7358 86$_5$	35	+ 0,2356 5744 5420 39
36	1,5921 9959 7577 02$_5$	36	+ 0,1593 8310 5233 44
37	1,6036 0433 5451 87.	37	+ 0,0805 7115 0735 61.
38	1,6214 0977 6139 63	38	— 0,0017 8452 2206 97$_5$
39	1,6466 6563 1408 83.	39	— 0,0889 6881 3975 20$_5$
40	1,6808 6706 1424 88$_5$	40	— 0,1826 8948 9153 74.

m	$L\left(\frac{m}{24}\right)$	m	$H\left(\frac{m}{24}\right)$
	+		
41	1,7261 9326 0291 17	41	— 0,2853 1852 1181 58.
42	1,7859 3621 6151 95.	42	— 0,4003 2333 4585 30
43	1,8653 3262 1181 62.	43	— 0,5331 0077 5377 47.
44	1,9733 5371 1380 30.	44	— 0,6927 6876 9017 03.
45	2,1271 6394 1205 58.	45	— 0,8966 2657 3026 10
46	2,3660 6311 7108 47$_5$	46	— 1,1840 9829 0839 54
47	2,8180 4321 5471 31.	47	— 1,6832 9090 2801 51.

RECHERCHES

SUR

LES VALEURS MOYENNES

DANS LA THÉORIE DES NOMBRES.

PAR

A. BERGER.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 10 Novembre 1886).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1887.

§. 1

SUR LA FORMULE DE SOMMATION D'EULER.

Soit $f(x)$ une fonction finie et continue pour toutes les valeurs de la variable x, qui satisfont à l'inégalité

$$x \geqq 1 \ ,$$

et désignons par n un nombre entier positif ou nul et par k_0 un nombre entier positif, ainsi choisi, que toutes les dérivées

$$f'(x) \ , \ f''(x) \ , \ f'''(x) \ , \ \ldots \ldots \ f^{(2n+2)}(x)$$

sont finies et continues pour $x \geqq k_0$, on aura pour $k \geqq k_0$, en vertu d'un théorème connu, la formule

$$(1)\ f(k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\Big\{f(k+1) - f(k)\Big\} + \frac{B_1}{1\,.\,2}\Big\{f'(k+1) - f'(k)\Big\} - \ldots$$

$$- (-1)^n \frac{B_n}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,2n}\Big\{f^{(2n-1)}(k+1) - f^{(2n-1)}(k)\Big\}$$

$$- \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(2n+2)} \int_0^1 \varphi(t\,,\,2n+2)\, f^{(2n+2)}(k+t)\,dt \ ,$$

où l'on désigne par B_1 , B_2 , B_3 , . . . les nombres de Bernoulli et par $\varphi(t\,,\,2n+2)$ la fonction Bernoullienne du $(2n+2)^{\text{ième}}$ degré, à savoir

$$(2) \qquad \varphi(t\,,\,2n+2) = t^{2n+2} - \frac{2n+2}{2}\, t^{2n+1} + (2n+2)_2\, B_1\, t^{2n} - \ldots .$$

$$- (-1)^n\, (2n+2)_{2n}\, B_n t^2 \ .$$

Pour $0 \leqq t \leqq 1$ et $n \geqq 0$ on a le développement

$$(3)\quad \varphi(t, 2n+2) = (-1)^{n+1} B_{n+1} + \frac{2(-1)^n . 1.2.3 \ldots (2n+2)}{(2\pi)^{2n+2}} \left\{ \frac{\cos 2\pi t}{1^{2n+2}} + \frac{\cos 4\pi t}{2^{2n+2}} + \frac{\cos 6\pi t}{3^{2n+2}} + \cdots \right\},$$

et, en combinant l'équation (3) avec la formule connue

$$(4)\quad \frac{1}{1^{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \cdots = \frac{B_{n+1}(2\pi)^{2n+2}}{2.1.2.3 \ldots (2n+2)},$$

nous aurons

$$(5)\quad \varphi(t, 2n+2) = 2(-1)^{n+1} B_{n+1} \frac{\frac{\sin^2 \pi t}{1^{2n+2}} + \frac{\sin^2 2\pi t}{2^{2n+2}} + \frac{\sin^2 3\pi t}{3^{2n+2}} + \cdots}{\frac{1}{1^{2n+2}} + \frac{1}{2^{2n+2}} + \frac{1}{3^{2n+2}} + \cdots}$$

et, par conséquent,

$$(6)\quad \varphi(t, 2n+2) = \theta(-1)^{n+1} B_{n+1},$$

où $0 < \theta < 2$. Supposons maintenant, que la fonction $f(x)$ jouit des propriétés, que

$$(7)\quad \lim_{x = \infty} f^{(2n+1)}(x) = 0,$$

et que la dérivée

$$f^{(2n+2)}(x)$$

ne change pas de signe pour $x \geqq k_0$, nous aurons évidemment pour $k \geqq k_0$

$$(8)\quad \int_0^1 \varphi(t, 2n+2) f^{(2n+2)}(k+t)\, dt = \varphi(t_0, 2n+2) \int_0^1 f^{(2n+2)}(k+t)\, dt,$$

où $0 < t_0 < 1$, ou en y appliquant l'équation (6)

$$(9)\quad \int_0^1 \varphi(t, 2n+2) f^{(2n+2)}(k+t)\, dt = \theta(-1)^{n+1} B_{n+1} \{ f^{(2n+1)}(k+1) - f^{(2n+1)}(k) \},$$

et des équations (1) et (9) nous obtiendrons pour $k \geq k_0$ la formule

$$(10)\ f(k) = \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\{f(k+1) - f(k)\} + \frac{B_1}{1.2}\{f'(k+1) - f'(k)\} \ldots$$

$$- \frac{(-1)^n B_n}{1.2.3\ldots 2n}\{f^{(2n-1)}(k+1) - f^{(2n-1)}(k)\}$$

$$+ \frac{\theta(-1)^n B_{n+1}}{1.2.3\ldots(2n+2)}\{f^{(2n+1)}(k+1) - f^{(2n+1)}(k)\}\ .$$

Nous emploierons dans ce qui suit les notations

$$(11)\qquad u_0 = \frac{f(1)}{2} - \frac{B_1}{1.2}f'(1) + \frac{B_2}{1.2.3.4}f'''(1) - \ldots .$$

$$+ (-1)^n \frac{B_n}{1.2\ldots 2n} f^{(2n-1)}(1)$$

et, k étant un nombre entier positif quelconque,

$$(12)\ u_k = \frac{f(k) + f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \frac{B_1}{1.2}\{f'(k+1) - f'(k)\} + \ldots$$

$$+ (-1)^n \frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\{f^{(2n-1)}(k+1) - f^{(2n-1)}(k)\}\ .$$

Cela posé, on tire des équations (10) et (12) pour $k \geq k_0$

$$(13)\qquad u_k = \frac{\theta(-1)^n B_{n+1}}{1.2.3\ldots(2n+2)}\{f^{(2n+1)}(k+1) - f^{(2n+1)}(k)\}\ ,$$

et, par suite, pour $m > k_0$

$$(14)\qquad \sum_{k=k_0}^{k=m} u_k = \frac{(-1)^n B_{n+1}}{1.2.3\ldots(2n+2)} \sum_{k=k_0}^{k=m} \theta\{f^{(2n+1)}(k+1) - f^{(2n+1)}(k)\}\ .$$

La fonction $f^{(2n+2)}(x)$ ne changeant pas de signe pour $x \geq k_0$, il s'ensuit, que les différences, qu'on obtient de l'expression

$$f^{(2n+1)}(k+1) - f^{(2n+1)}(k)$$

en y posant successivement

$$k = k_0 \ , \ k_0 + 1 \ , \ k_0 + 2 , \ldots ,$$

ont le même signe; donc on peut conclure de l'équation (13), que tous les termes de la série

$$\sum_{k=k_0}^{k=\infty} u_k$$

ont le même signe, et de l'équation (14) on tire

$$(15) \quad \sum_{k=k_0}^{k=m} u_k = \frac{(-1)^n B_{n+1} \theta_0}{1 . 2 . 3 \ldots (2n+2)} \sum_{k=k_0}^{k=m} \{f^{(2n+1)}(k+1) - f^{(2n+1)}(k)\}$$

$$= \frac{(-1)^n B_{n+1} \theta_0}{1 . 2 . 3 \ldots (2n+2)} \{f^{(2n+1)}(m+1) - f^{(2n+1)}(k_0)\} \ ,$$

où la quantité θ_0, qui est une valeur moyenne des quantités θ, est comprise entre 0 et 2. Des équations (7) et (15) on peut conclure, que la somme

$$\sum_{k=k_0}^{k=m} u_k$$

est finie, quel que soit m; et puisque tous les termes de la série

$$\sum_{k=k_0}^{k=\infty} u_k$$

ont le même signe, il s'ensuit que la serie

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} u_k$$

est convergente. En désignant la somme de cette série par K, nous obtiendrons des équations (11) et (12)

$$(16) \ K = \frac{f(1)}{2} - \frac{B_1}{1.2} f'(1) + \frac{B_2}{1.2.3.4} f'''(1) - \ldots + (-1)^n \frac{B_n}{1.2 \ldots 2n} f^{(2n-1)}(1)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{f(k) + (k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x) dx - \frac{B_1}{1.2} \{f'(k+1) - f'(k)\} + \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{B_n}{1.2 \ldots 2n} \{f^{(2n-1)}(k+1) - f^{(2n-1)}(k)\} \right] ,$$

et, par suite, on aura

$$(17)\quad K=\frac{f(1)}{2}-\frac{B_1}{1.2}f'(1)+\frac{B_2}{1.2.3.4}f'''(1)-\ldots+(-1)^n\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}f^{(2n-1)}(1)$$

$$+\lim_{m=\infty}\sum_{k=1}^{k=m-1}\left[\frac{f(k)+f(k+1)}{2}-\int_k^{k+1}f(x)\,dx-\frac{B_1}{1.2}\{f'(k+1)-f'(k)\}+\ldots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\{f^{(2n-1)}(k+1)-f^{(2n-1)}(k)\}\right],$$

d'où l'on tire, après quelques réductions faciles,

$$(18)\quad K=\lim_{m=\infty}\left\{f(1)+f(2)+\ldots+f(m-1)+\frac{f(m)}{2}-\int_1^m f(x)\,dx\right.$$

$$\left.-\frac{B_1}{1.2}f'(m)+\ldots+(-1)^n\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}f^{(2n-1)}(m)\right\},$$

et, par conséquent, on aura

$$(19)\quad f(1)+f(2)+\ldots+f(m-1)=\int_1^m f(x)\,dx+K-\frac{f(m)}{2}$$

$$+\frac{B_1}{1.2}f'(m)-\ldots-(-1)^n\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}f^{(2n-1)}(m)+\delta,$$

en désignant par δ une quantité, qui s'évanouit pour $m=\infty$.

Remplaçons maintenant dans l'équation (10) k par k, $k+1$, $k+2,\ldots m-1$, et ajoutons les équations ainsi obtenues, nous aurons pour $k\geq k_0$

$$(20)\quad f(k)+f(k+1)+\ldots+f(m-1)=\int_k^m f(x)\,dx-\frac{1}{2}\{f(m)-f(k)\}$$

$$+\frac{B_1}{1.2}\{f'(m)-f'(k)\}-\ldots-(-1)^n\frac{B_n}{1.2\ldots 2n}\{f^{(2n-1)}(m)-f^{(2n-1)}(k)\}$$

$$+\frac{(-1)^n B_{n+1}}{1.2\ldots(2n+2)}\sum_{h=k}^{h=m-1}\theta\{f^{(2n+1)}(h+1)-f^{(2n+1)}(h)\}.$$

La derivée $f^{(2n+2)}(x)$ ne changeant pas de signe pour $x \geqq k_0$, les quantités, qu'on obtient de l'expression

$$f^{(2n+1)}(h+1) - f^{(2n+1)}(h)$$

pour $h = k,\ k+1, \ldots m-1$, auront le même signe, et par suite le dernier terme du second membre de l'équation (20) est égal à

$$\frac{\theta_1 (-1)^n B_{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (2n+2)} \sum_{h=k}^{h=m-1} \{f^{(2n+1)}(h+1) - f^{(2n+1)}(h)\}$$

ou égal à

$$\frac{\theta_1 (-1)^n B_{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (2n+2)} \{f^{(2n+1)}(m) - f^{(2n+1)}(k)\},$$

où $0 < \theta_1 < 2$. En introduisant cette valeur dans l'équation (20), nous aurons

$$(21)\quad f(k) + f(k+1) + \ldots + f(m-1) = \int_k^m f(x)\,dx - \frac{1}{2}\{f(m) - f(k)\}$$

$$+ \frac{B_1}{1 \cdot 2}\{f'(m) - f'(k)\} - \ldots - (-1)^n \frac{B_n}{1 \cdot 2 \ldots 2n}\{f^{(2n-1)}(m) - f^{(2n-1)}(k)\}$$

$$+ \frac{\theta_1 (-1)^n B_{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (2n+2)}\{f^{(2n+1)}(m) - f^{(2n+1)}(k)\},$$

et des équations (19) et (21) on obtiendra

$$(22)\quad f(1) + f(2) + \ldots + f(k-1) = \int_1^k f(x)\,dx + K - \frac{f(k)}{2} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} f'(k) - \ldots$$

$$- (-1)^n \frac{B_n}{1 \cdot 2 \ldots 2n} f^{(2n-1)}(k) - \frac{\theta_1 (-1)^n B_{n+1}}{1 \cdot 2 \ldots (2n+2)}\{f^{(2n+1)}(m) - f^{(2n+1)}(k)\} + \delta.$$

Pour $m = \infty$ on déduit des équations (22) et (7) la formule

$$(23)\quad f(1) + f(2) + \ldots + f(k) = \int_1^k f(x)\,dx + K + \frac{f(k)}{2} + \frac{B_1}{1 \cdot 2} f'(k)$$

$$- \frac{B_2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f'''(k) + \ldots - (-1)^n \frac{B_n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2n} f^{(2n-1)}(k)$$

$$+ (-1)^n \frac{\theta_1 B_{n+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n+2)} f^{(2n+1)}(k);$$

on peut donc énoncer la proposition suivante:

Théorème I. Soit $f(x)$ *une fonction réelle de la variable réelle* x, *qui reste finie et continue pour* $x \geqq 1$, *et soient ses* $2n+2$ *premières dérivées finies et continues pour* $x \geqq k_0$, n *étant un nombre entier positif ou nul; supposons, que*

$$\lim_{x=\infty} f^{(2n+1)}(x) = 0 \ ,$$

et que la fonction $f^{(2n+2)}(x)$ *ne change pas de signe pour* $x \geqq k_0$, k_0 *étant un nombre entier positif, on aura pour* $k \geqq k_0$ *la formule*

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(k) = \int_1^k f(x)dx + K + \frac{f(k)}{2} + \frac{B_1}{1\,.\,2} f'(k) - \frac{B_2}{1.2.3.4} f'''(k) + \cdots$$

$$\cdots - (-1)^n \frac{B_n}{1\,.\,2\,.\,3\ldots 2n} f^{(2n-1)}(k) + (-1)^n \frac{\theta B_{n+1}}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(2n+2)} f^{(2n+1)}(k) \ ,$$

où l'on désigne par θ *une quantité, comprise entre* 0 *et* 2, *et par* K *une quantité, qui ne dépend pas du nombre* k, *et dont la valeur est donnée par la formule*

$$K = \frac{f(1)}{2} - \frac{B_1}{1\,.\,2} f'(1) + \frac{B_2}{1.2.3.4} f'''(1) - \cdots\cdots + (-1)^n \frac{B_n}{1.2.3\ldots 2n} f^{(2n-1)}(1)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_k^{k+1} f(x)\,dx - \frac{B_1}{1\,.\,2} \{f'(k+1) - f'(k)\} + \cdots \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{B_n}{1\,.\,2\,.\,.\,2n} \{f^{(2n-1)}(k+1) - f^{(2n-1)}(k)\} \right] .$$

Désignons par a une quantité réelle quelconque et par b une quantité, qui satisfait à la condition

$$b \geqq 0 \ ,$$

et posons

$$f(x) = x^a (\log x)^b \ ,$$

nous aurons

$$f'(x) = a\,x^{a-1}(\log x)^b + b\,x^{a-1}(\log x)^{b-1} \ ,$$

d'où l'on peut conclure, que la dérivée $f'(x)$ n'est pas d'un ordre supérieur que la fonction $x^{a-1}(\log x)^b$. En différentiant de nouveau, nous trou-

verons, que la dérivée $f^{(r)}(x)$ n'est pas d'un ordre supérieur que la fonction $x^{a-r}(\log x)^b$. À cause de la forme de ces dérivées on peut déterminer deux nombres entiers positifs n et k_0 ainsi, que

$$\lim_{x=\infty} f^{(2n+1)}(x) = 0 \ ,$$

et que la dérivée $f^{(2n+2)}(x)$ ne change pas de signe pour $x \geqq k_0$. Par suite on peut appliquer le théorème précédent à cette fonction $f(x)$; et puisque la quantité K dans ce cas dépend des quantités a et b, nous remplacerons K par $K(a, b)$, et par une réduction facile nous trouverons pour $k \geqq k_0$ la formule

$$(24) \qquad \sum_{h=1}^{h=k} h^a(\log h)^b = \int_1^k x^a(\log x)^b dx + K(a, b) + \frac{k^a(\log k)^b}{2}$$

$$+ \theta k^{a-1}(\log k)^b \left\{ a + \frac{b}{\log k} \right\} \ ,$$

où l'on désigne par θ une quantité, qui est finie pour toutes les valeurs du nombre k. La valeur de la quantité $K(a, b)$ est donnée par une formule dans le théorème précédent; pour $a < 0$ cette formule peut être simplifiée; en effet, les dérivées

$$f'(x) \ , \ f''(x) \ , \ f'''(x) \ , \ \ldots \ .$$

s'annulant dans ce cas pour $x = \infty$, nous aurons

$$(25) \qquad K(a, b) = \frac{(\log 1)^b}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{k^a(\log k)^b + (k+1)^a(\log(k+1))^b}{2} \right.$$

$$\left. - \int_k^{k+1} x^a(\log x)^b dx \right\} \ .$$

Ajoutons à cette égalité l'identité

$$(26) \qquad 0 = -\frac{(\log 1)^b}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k^a(\log k)^b - (k+1)^a(\log(k+1))^b}{2} \ ,$$

nous en obtiendrons

$$(27) \qquad K(a, b) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ k^a(\log k)^b - \int_k^{k+1} x^a(\log x)^b dx \right\} \ .$$

La quantité θ, qui entre dans le second membre de l'équation (24), étant assujettie seulement à la condition d'être finie, cette équation est évidemment vraie aussi pour

$$k = 1, 2, 3, \ldots . k_0 - 1 .$$

Par là est démontré le théorème suivant:

Théorème II. Si l'on désigne par a *une quantité réelle quelconque et par* b *une quantité, qui satisfait à la condition*

$$b \geqq 0 ,$$

on aura, k *étant un nombre entier positif,*

$$\sum_{h=1}^{h=k} h^a (\log h)^b = \int_1^k x^a (\log x)^b dx + K(a, b) + \frac{k^a (\log k)^b}{2} + \theta k^{a-1} (\log k)^b \left(a + \frac{b}{\log k}\right),$$

où l'on désigne par θ *une quantité, qui est finie pour toutes les valeurs du nombre* k, *et par* K(a , b) *une quantité, qui ne dépend pas de* k; *pour* $a < 0$ *on a*

$$K(a, b) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(k^a (\log k)^b - \int_k^{k+1} x^a (\log x)^b dx \right) .$$

Exemple 1. Posons $b = 0$, nous aurons pour toutes les valeurs réelles de la quantité a la formule

$$(28) \qquad \sum_{h=1}^{h=k} h^a = \frac{k^{a+1} - 1}{a+1} + K(a, 0) + \frac{k^a}{2} + \theta a k^{a-1} ;$$

pour $a = -1$, on en déduit

$$(29) \qquad \sum_{h=1}^{h=k} \frac{1}{h} = \log k + K(-1, 0) + \frac{1}{2k} - \frac{\theta}{k^2} .$$

De cette formule on conclut, que la quantité $K(-1, 0)$ est égale à la constante d'EULER, qu'on désigne ordinairement par C.

Exemple 2. Pour $b = 1$ on aura, a étant une quantité réelle quelconque,

$$(30) \quad \sum_{h=1}^{h=k} h^a \log h = \int_1^k x^a \log x \, dx + K(a, 1) + \frac{k^a \log k}{2} + \theta k^{a-1} (a \log k + 1)$$

ou

$$(31)\sum_{h=1}^{h=k} h^a \log h = \frac{k^{a+1}\log k}{a+1} - \frac{k^{a+1}-1}{(a+1)^2} + K(a,1) + \frac{k^a \log k}{2} + \theta k^{a-1}(a\log k+1);$$

pour $a=-1$ et $a=0$ on en tire les formules

$$(32)\qquad \sum_{h=1}^{h=k} \frac{\log h}{h} = \frac{(\log k)^2}{2} + K(-1,1) + \frac{\log k}{2k} + \frac{\theta(1-\log k)}{k^2}\ ,$$

$$(33)\qquad \sum_{h=1}^{h=k} \log h = k\log k - k + 1 + K(0,1) + \frac{\log k}{2} + \frac{\theta}{k}\ .$$

Exemple 3. Pour $a=-1$ on obtiendra la formule

$$(34)\qquad \sum_{h=1}^{h=k} \frac{(\log h)^b}{h} = \frac{(\log k)^{b+1}}{b+1} + K(-1,b) + \frac{(\log k)^b}{2k} + \frac{\theta(\log k)^b}{k^2}\ .$$

Exemple 4. Pour $a<-1$ et $k=\infty$ nous aurons

$$(35)\qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} h^a (\log h)^b = \int_1^\infty x^a (\log x)^b\, dx + K(a,b)\ .$$

Introduisons dans l'intégrale une nouvelle variable y, en posant

$$x = e^{-\frac{y}{a+1}}\ ,$$

elle prendra la forme

$$\int_1^\infty x^a (\log x)^b\, dx = \frac{1}{(-a-1)^{b+1}} \int_0^\infty e^{-y} y^b\, dy = \frac{\Gamma(b+1)}{(-a-1)^{b+1}}\ ,$$

et par suite on aura pour $a<-1$

$$(36)\qquad \sum_{h=1}^{h=\infty} h^a (\log h)^b = \frac{\Gamma(b+1)}{(-a-1)^{b+1}} + K(a,b)\ .$$

Au moyen de cette formule on peut déterminer la constante $K(-2r,0)$, r étant un nombre entier positif; en effet, posons

$$a = -2r\ ,\ b = 0\ ,$$

nous aurons

$$(37) \qquad K(-2r,0) = -\frac{1}{2r-1} + \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1}{h^{2r}}$$

et, par suite, en y appliquant l'équation (4),

$$(38) \qquad K(-2r,0) = -\frac{1}{2r-1} + \frac{B_r(2\pi)^{2r}}{2.1.2.3\ldots 2r} .$$

§. 2.

DE LA FONCTION $K(-1+x,b)$.

En désignant, comme précédemment, par b une quantité, qui satisfait à la condition

$$b \geqq 0 ,$$

et en posant dans l'équation (27)

$$a = -1+x ,$$

nous obtiendrons pour $x<1$

$$(39) \qquad K(-1+x,b) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ k^{-1+x}(\log k)^b - \int_k^{k+1} z^{-1+x}(\log z)^b dz \right\} ,$$

et en différentiant les deux membres de cette équation r fois par rapport à x, nous aurons

$$(40) \qquad K^{(r)}(-1+x,b) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ k^{-1+x}(\log k)^{b+r} - \int_k^{k+1} z^{-1+x}(\log z)^{b+r} dz \right\}$$

et, par suite,

$$(41) \qquad K^{(r)}(-1+x,b) = K(-1+x,b+r) .$$

La fonction $K(-1+x,b)$ et ses dérivées étant finies et continues pour $x<1$, nous aurons d'après la formule de MACLAURIN le développement

$$(42) \quad K(-1+x,b) = K(-1,b) + K(-1,b+1)\frac{x}{1} + K(-1,b+2)\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

$$+ K(-1,b+n-1)\frac{x^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + R_n ,$$

le reste R_n étant susceptible de ces deux formes, savoir

$$(43) \qquad R_n = \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} K(-1+\theta x \ , \ b+n)$$

ou

$$(44) \qquad R_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} K(-1+\theta x \, , \, b+n) \ ,$$

où $0 < \theta < 1$. Posons maintenant l'équation (39) sous la forme

$$(45) \quad K(-1+x \, , \, b) = 1^{-1+x}(\log 1)^b - \int_1^2 z^{-1+x}(\log z)^b dz + 2^{-1+x}(\log 2)^b$$

$$- \int_2^3 z^{-1+x}(\log z)^b dz + \ldots\ldots ,$$

il s'ensuit, que les termes de la série dans le second membre ont des signes alternés. En posant

$$y = z^{-1+x}(\log z)^b \ ,$$

et en regardant y comme une fonction de z, nous aurons

$$\frac{dy}{dz} = z^{-2+x}(\log z)^{b-1}\{b - (1-x)\log z\} \ ,$$

et, par conséquent, la fonction y est continuellement croissante depuis $z = 1$ jusqu'à $z = e^{\frac{b}{1-x}}$, mais décroissante depuis $z = e^{\frac{b}{1-x}}$ jusqu'à $z = \infty$; ainsi, à la valeur $z = e^{\frac{b}{1-x}}$ correspondra le maximum

$$\frac{b^b e^{-b}}{(1-x)^b}$$

de la fonction y. Il en résulte, que chaque terme de la série (45) est plus petit que cette quantité; mais les termes de cette série ayant des signes alternés, nous obtiendrons évidemment

$$(46) \qquad K(-1+x \, , \, b) = \varrho \frac{b^b e^{-b}}{(1-x)^b} \ ,$$

où $-1 < \varrho < 1$, d'où l'on tire

$$(47) \qquad K(-1+\theta x, b+n) = \varrho \frac{(b+n)^{b+n} e^{-b-n}}{(1-\theta x)^{b+n}} ,$$

et des équations (43), (44), (47) nous obtiendrons les deux expressions suivantes du reste R_n:

$$(48) \qquad R_n = \varrho \frac{(b+n)^{b+n} e^{-b-n}}{(1-\theta x)^{b+n}} \cdot \frac{x^n}{1 \cdot 2 \ldots . n}$$

et

$$(49) \qquad R_n = \varrho \frac{(b+n)^{b+n} e^{-b-n}}{(1-\theta x)^{b+n}} \cdot \frac{(1-\theta)^{n-1} x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} .$$

En y appliquant la formule

$$\lim_{n=\infty} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^n = e^b$$

et l'égalité suivante, déduite de l'équation (33),

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots . n = e^{1+K(0,1)} n^n e^{-n} n^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\vartheta}{n}} ,$$

nous obtiendrons des équations (48) et (49) les formules

$$(50) \qquad R_n = \lambda_1 n^{b-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{1-\theta x}\right)^n ,$$

$$(51) \qquad R_n = \lambda_2 n^{b+\frac{1}{2}} \left(\frac{x-\theta x}{1-\theta x}\right)^{n-1} ,$$

où les quantités λ_1 et λ_2 sont finies pour toutes les valeurs du nombre n. Nous distinguerons maintenant les deux cas suivants:

1) Pour $0 \leqq x < 1$ la quantité

$$\frac{x-\theta x}{1-\theta x}$$

est une fraction propre, et nous obtiendrons de l'équation (51)

$$(52) \qquad \lim_{n=\infty} R_n = 0 .$$

2) Pour $-1<x<0$ la quantité

$$\frac{x}{1-\theta x}$$

est une fraction propre, et de l'équation (50) on tire

$$\lim_{n=\infty} R_n = 0 \ . \tag{53}$$

Par suite, pour $-1<x<1$ nous obtiendrons des équations (42), (52), (53) la formule

$$K(-1+x,b)=K(-1,b)+K(-1,b+1)\frac{x}{1}+K(-1,b+2)\frac{x^2}{1.2}+\cdots. \tag{54}$$

En vertu de ce qui précède nous aurons le théorème suivant:

Théorème III. Si l'on désigne par x *une quantité, qui satisfait aux inégalités*

$$-1<x<1 \ ,$$

on aura

$$K(-1+x,b)=K(-1,b)+K(-1,b+1)\frac{x}{1}+K(-1,b+2)\frac{x^2}{1.2}$$

$$+K(-1,b+3)\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots.$$

Substituons dans l'équation (36) $a=-1-w$, nous obtiendrons pour $w>0$

$$\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{(\log h)^b}{h^{1+w}}=\frac{\Gamma(b+1)}{w^{b+1}}+K(-1-w,b) \ , \tag{55}$$

et par conséquent, en y appliquant le théorème précédent,

$$\sum_{h=1}^{h=\infty}\frac{(\log h)^b}{h^{1+w}}=\frac{\Gamma(b+1)}{w^{b+1}}+K(-1,b)-K(-1,b+1)\frac{w}{1} \tag{56}$$

$$+K(-1,b+2)\frac{w^2}{1.2}-\cdots. \ ,$$

formule, qui subsiste pour $b\geqq 0\,,\,0<w<1$.

§. 3.

SUR QUELQUES RELATIONS ENTRE DES SÉRIES ET DES VALEURS MOYENNES.

Désignons par a et b deux quantités réelles, qui satisfont aux conditions

$$a > 0 \ , \ b \geqq -1 \ , \tag{57}$$

et par

$$c_1 \ , \ c_2 \ , \ c_3 \ , \ c_4 \ , \ \ldots\ldots$$

une suite de quantités réelles, et supposons que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n}{n^a (\log n)^b} = C \ , \tag{58}$$

où C désigne une quantité finie. Cela posé, en définissant une fonction $F(z)$ au moyen des équations

$$F(z) = 0 \ \text{ pour } \ 0 \leqq z < 1 \ ,$$

$$F(z) = c_1 \ \text{ pour } \ 1 \leqq z < 2 \ ,$$

$$F(z) = c_1 + c_2 \ \text{ pour } \ 2 \leqq z < 3$$

et, en général,

$$F(z) = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots\ldots + c_n \ \text{ pour } \ n \leqq z < n+1 \ , \tag{59}$$

on aura

$$\frac{F(z)}{z^a (\log z)^b} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots\ldots + c_n}{n^a (\log n)^b} \cdot \frac{n^a (\log n)^b}{z^a (\log z)^b} \ , \tag{60}$$

où $n = z - \varrho$, en désignant par ϱ une fraction propre, et par suite on obtiendra des équations (58) et (60)

$$\lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{z^a (\log z)^b} = C \ . \tag{61}$$

Soit w une quantité positive, on aura

$$\frac{1}{(a+w) n^{a+w}} = \int_n^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}} \ , \tag{62}$$

et par suite, la quantité c_n étant égale à $F(n) - F(n-1)$,

$$(63)\qquad \frac{1}{a+w}\sum_{n=1}^{n=k}\frac{c_n}{n^{a+w}} = \sum_{n=1}^{n=k} c_n \int_n^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=k} F(n)\int_n^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}} - \sum_{n=1}^{n=k} F(n-1)\int_n^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}} .$$

En substituant $n+1$ au lieu de n dans la dernière somme, et en observant, que $F(0) = 0$, on obtiendra

$$(64)\quad \frac{1}{a+w}\sum_{n=1}^{n=k}\frac{c_n}{n^{a+w}} = \sum_{n=1}^{n=k} F(n)\int_n^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}} - \sum_{n=1}^{n=k-1} F(n)\int_{n+1}^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=k} F(n)\int_n^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}} - \sum_{n=1}^{n=k} F(n)\int_{n+1}^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}} + F(k)\int_{k+1}^\infty \frac{dz}{z^{a+1+w}}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=k} F(n)\int_n^{n+1} \frac{dz}{z^{a+1+w}} + \frac{F(k)}{(a+w)(k+1)^{a+w}}$$

$$= \sum_{n=1}^{n=k}\int_n^{n+1} \frac{F(z)\,dz}{z^{a+1+w}} + \frac{F(k)}{(a+w)(k+1)^{a+w}}$$

$$= \int_1^{k+1} \frac{F(z)\,dz}{z^{a+1+w}} + \frac{F(k)}{(a+w)(k+1)^{a+w}} .$$

Pour $k = \infty$ on déduit de l'équation (64), en y appliquant l'équation (61),

$$(65)\qquad \frac{1}{a+w}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{c_n}{n^{a+w}} = \int_1^\infty \frac{F(z)\,dz}{z^{a+1+w}} .$$

Soit maintenant δ une quantité, comprise entre 0 et 1, et posons l'équation (65) sous la forme

$$(66)\qquad \frac{1}{a+w}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{c_n}{n^{a+w}} = \int_1^{1+\delta} \frac{F(z)\,dz}{z^{a+1+w}} + \int_{1+\delta}^\infty \frac{F(z)\,dz}{z^{a+1+w}} .$$

Puisque on a, d'après l'équation (61),

$$(67)\qquad F(z) = Cz^a(\log z)^b + \Psi(z) ,$$

où la fonction $\Psi(z)$ est finie pour toutes les valeurs finies positives de z, sauf pour $z = 1$, si b est négatif, et où

$$\lim_{z=\infty} \frac{\Psi(z)}{z^a (\log z)^b} = 0 \ , \tag{68}$$

on obtiendra des équations (66) et (67), en observant, que $F(z) = c_1$ pour $1 \leqq z < 2$,

$$\frac{1}{a+w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = c_1 \int_1^{1+\delta} \frac{dz}{z^{a+1+w}} + C \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{(\log z)^b dz}{z^{1+w}} + \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{\Psi(z) dz}{z^{a+1+w}} \tag{69}$$

$$= \frac{c_1}{a+w} \left(1 - \frac{1}{(1+\delta)^{a+w}}\right) + C \int_{1+\delta}^{x} \frac{(\log z)^b dz}{z^{1+w}} + \int_{1+\delta}^{\mu} \frac{\Psi(z) dz}{z^{a+1+w}} + \int_{\mu}^{x} \frac{\Psi(z) dz}{z^{a+1+w}} \ ,$$

μ étant une quantité plus grande que l'unité. Dans ce qui va suivre nous nous servirons de la notation

$$M_a^b f(z)$$

pour désigner une valeur moyenne de la fonction $f(z)$, lorsque z varie entre a et b. Cela posé, l'équation (69) peut s'écrire

$$\frac{1}{a+w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = \frac{c_1}{a+w} \left(1 - \frac{1}{(1+\delta)^{a+w}}\right) + C \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{(\log z)^b dz}{z^{1+w}} \tag{70}$$

$$+ M_{1+\delta}^{\mu} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a (\log z)^b} \right\} \int_{1+\delta}^{\mu} \frac{(\log z)^b dz}{z^{1+w}} + M_{\mu}^{x} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a (\log z)^b} \right\} \int_{\mu}^{x} \frac{(\log z)^b dz}{z^{1+w}} \ .$$

Nous distinguerons maintenant deux cas, suivant que $b = -1$ ou $b > -1$:

1) Pour $b = -1$ on obtiendra de l'équation (70), en y posant $\mu = \frac{1}{w}$,

$$\frac{1}{a+w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = \frac{c_1}{a+w} \left(1 - \frac{1}{(1+\delta)^{a+w}}\right) + C \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w} \log z} \tag{71}$$

$$+ M_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \left\{ \frac{\Psi(z) \log z}{z^a} \right\} \int_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \frac{dz}{z^{1+w} \log z} + M_{\frac{1}{w}}^{\infty} \left\{ \frac{\Psi(z) \log z}{z^a} \right\} \int_{\frac{1}{w}}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w} \log z} \ .$$

Par la substitution

$$z = e^{\frac{x}{w}}$$

nous obtiendrons

$$(72) \qquad \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} = \int_{w\log(1+\delta)}^{\infty} \frac{e^{-x}dx}{x} = \int_{w\log(1+\delta)}^{1} e^{-x}\, d\log x + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{x} ,$$

d'où l'on tire, en intégrant par parties et en posant $\log(1+\delta) = \lambda$,

$$(73) \qquad \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} = \int_{w\lambda}^{1} e^{-x}\log x + \int_{w\lambda}^{1} e^{-x}\log x\, dx + \varrho ,$$

où $0 < \varrho < 1$, et par conséquent

$$(74) \qquad \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} = -\, e^{-w\lambda}\log(w\lambda) + \varrho_1 \int_{w\lambda}^{1} \log x\, dx + \varrho ,$$

où $0 < \varrho_1 < 1$, et l'on en déduit

$$(75) \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} = e^{-w\lambda}\log\frac{1}{w\lambda} + \varrho_1 \left\{ -1 + w\lambda\log\frac{1}{w} - w\lambda\log\lambda + w\lambda \right\} + \varrho .$$

La quantité δ étant comprise entre 0 et 1, λ et $\log\lambda$ sont des quantités finies, et par suite on obtiendra de l'équation (75) pour $w = 0$

$$(76) \qquad \lim_{w=0} \frac{1}{\log\frac{1}{w}} \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} = 1 .$$

En divisant les deux membres de l'équation (71) par $\log\frac{1}{w}$, nous en obtiendrons, au moyen de la formule (76), pour $w = 0$

$$(77) \frac{1}{a}\lim_{w=0} \frac{1}{\log\frac{1}{w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = C + \lim_{w=0} M_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \left\{ \frac{\Psi(z)\log z}{z^a} \right\} \frac{1}{\log\frac{1}{w}} \int_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \frac{dz}{z^{1+w}\log z}$$

$$+ \lim_{w=0} M_{\frac{1}{w}}^{\infty} \left\{ \frac{\Psi(z)\log z}{z^a} \right\} \frac{1}{\log\frac{1}{w}} \int_{\frac{1}{w}}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} .$$

Mais d'après l'équation (68) on a

$$\lim_{w=0} M_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \left\{ \frac{\Psi(z)\log z}{z^a} \right\} = \text{une quantité finie} , \tag{78}$$

$$\lim_{w=0} M_{\frac{1}{w}}^{\infty} \left\{ \frac{\Psi(z)\log z}{z^a} \right\} = 0 ; \tag{79}$$

en outre on a

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \int_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} \leqq \lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \int_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \frac{dz}{z \log z} \tag{80}$$

$$\leqq \lim_{w=0} \frac{\log\log \frac{1}{w} - \log\log(1+\delta)}{\log \frac{1}{w}} = 0$$

et

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \int_{\frac{1}{w}}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} \leqq \lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \int_{1+\delta}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} \tag{81}$$

ou, d'après l'éqation (76),

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \int_{\frac{1}{w}}^{\infty} \frac{dz}{z^{1+w}\log z} \leqq 1 . \tag{82}$$

Des équations (77), (78), (79), (80), (82) on tire

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = aC , \tag{83}$$

et, par suite, en s'appuyant sur l'équation (58),

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = a \lim_{n=\infty} \frac{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n)\log n}{n^a} . \tag{84}$$

2) Pour $b > -1$ nous obtiendrons de l'équation (70) par les substitutions

$$\mu = \frac{1}{w} , \quad z = e^{\frac{x}{w}} ,$$

où l'on désigne par x une nouvelle variable, l'équation

$$(85) \quad \frac{w^{b+1}}{a+w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = \frac{c_1 w^{b+1}}{a+w} \left(1 - \frac{1}{(1+\delta)^{a+w}}\right) + C \int_{w \log(1+\delta)}^{\infty} e^{-x} x^b \, dx$$

$$+ M_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a (\log z)^b} \right\} \int_{w \log(1+\delta)}^{w \log \frac{1}{w}} e^{-x} x^b \, dx + M_{\frac{1}{w}}^{\infty} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a (\log z)^b} \right\} \int_{w \log \frac{1}{w}}^{\infty} e^{-x} x^b \, dx .$$

Mais d'après l'équation (68) on a

$$(86) \quad \lim_{w=0} M_{1+\delta}^{\frac{1}{w}} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a (\log z)^b} \right\} = \text{une quantité finie} ,$$

$$(87) \quad \lim_{w=0} M_{\frac{1}{w}}^{\infty} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a (\log z)^b} \right\} = 0 ,$$

et, puisque

$$(88) \quad \lim_{w=0} w \log \frac{1}{w} = 0 ,$$

on obtiendra de l'équation (85) pour $w = 0$

$$(89) \quad \lim_{w=0} w^{b+1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = aC \int_0^{\infty} e^{-x} x^b \, dx = aC\Gamma(b+1) ,$$

et des équations (58), (89) on tire

$$(90) \quad \lim_{w=0} w^{b+1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = a\Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n}{n^a (\log n)^b} .$$

Des formules (84) et (90) résulte le théorème suivant:

Théorème IV. Si l'on désigne par a *et* b *deux quantités réelles, qui satisfont aux conditions*

$$a > 0 , \quad b > -1 ,$$

par c_1 , c_2 , c_3 , ... *un nombre illimité de quantités réelles et par* w *une quantité positive, nous aurons*

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = a \lim_{n=\infty} \frac{(c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n) \log n}{n^a}$$

et

$$\lim_{w=0} w^{b+1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = a\, \Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n}{n^a (\log n)^b} \ ,$$

pourvu que les expressions dans les seconds membres soient des quantités finies et déterminées.

Exemple 1. Posons dans la première formule

$$c_n = \frac{n^{a-1}}{\log n} \ ,$$

où $a > 0$, nous aurons

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w} \log n} = a \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k^{a-1}}{\log k}}{\frac{n^a}{\log n}} = a \lim_{n=\infty} \frac{\int_2^n \frac{x^{a-1}\, dx}{\log x}}{\frac{n^a}{\log n}}$$

$$= a \lim_{n=\infty} \frac{\frac{n^{a-1}}{\log n}}{\frac{a n^{a-1} \log n - n^{a-1}}{(\log n)^2}} = 1 \ ,$$

et par là est démontré, que:

Si l'on désigne par w *une quantité positive, on a*

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w} \log n} = 1. \tag{91}$$

Exemple 2. Posons dans la seconde formule

$$c_n = n^{a-1} (\log n)^b \ ,$$

où $a > 0$, $b > -1$, nous aurons

$$\lim_{w=0} w^{b+1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\log n)^b}{n^{1+w}} = a\Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{k=1}^{k=n} k^{a-1} (\log k)^b}{n^a (\log n)^b} = a\Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{\int_2^n x^{a-1} (\log x)^b dx}{n^a (\log n)^b}$$

$$= a\Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{n^{a-1} (\log n)^b}{n^{a-1} b (\log n)^{b-1} + a n^{a-1} (\log n)^b} = \Gamma(b+1) ,$$

et par là est démontré, que:

Si l'on désigne par w *une quantité positive et par* b *une quantité, plus grande que* -1, *on a*

$$\lim_{w=0} w^{b+1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\log n)^b}{n^{1+w}} = \Gamma(b+1) . \tag{92}$$

Soient a et b deux quantités positives, et $c_1, c_2, c_3, \ldots$ une suite de quantités réelles, ainsi choisies, que

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n}{n^{ab}} = C , \tag{93}$$

C étant une quantité finie. En définissant, comme ci-dessus, la fonction $F(z)$ par l'égalité (59), nous aurons

$$\frac{F(z)}{z^{ab}} = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{n^{ab}} \left(\frac{n}{z}\right)^{ab} ,$$

en désignant par n le plus grand des nombres entiers, qui ne sont pas supérieurs à x, d'où

$$\lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{z^{ab}} = C . \tag{94}$$

Désignons par x une quantité positive plus petite que l'unité, on a

$$x^{n^b} = -\int_{n^b}^{\infty} x^z \log x \, dz \tag{95}$$

et par conséquent, c_n étant égal à $F(n) - F(n-1)$,

$$\sum_{n=1}^{n=k} c_n x^{n^b} = -\sum_{n=1}^{n=k} F(n) \int_{n^b}^{\infty} x^z \log x \, dz + \sum_{n=1}^{n=k} F(n-1) \int_{n^b}^{\infty} x^z \log x \, dz .$$

Posons $n+1$ au lieu de n dans la dernière somme, nous aurons

$$\sum_{n=1}^{n=k} c_n x^{n^b} = -\sum_{n=1}^{n=k} F(n) \int_{n^b}^{\infty} x^z \log x \, dz + \sum_{n=1}^{n=k-1} F(n) \int_{(n+1)^b}^{\infty} x^z \log x \, dz$$

$$= -\sum_{n=1}^{n=k} F(n) \int_{n^b}^{(n+1)^b} x^z \log x \, dz - F(k) \int_{(k+1)^b}^{\infty} x^z \log x \, dz$$

$$= -\sum_{n=1}^{n=k} \int_{n^b}^{(n+1)^b} F(z^{\frac{1}{b}}) x^z \log x \, dz + F(k) x^{(k+1)^b}$$

$$= -\int_1^{(k+1)^b} F(z^{\frac{1}{b}}) x^z \log x \, dz + \frac{F(k)}{k^{ab}} \cdot x^{(k+1)^b} k^{ab} \ .$$

Pour $k = \infty$ on en déduit à l'aide de l'équation (94)

$$(96) \qquad -\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = -\int_1^{\infty} F(z^{\frac{1}{b}}) x^z \log x \, dz \ .$$

De l'équation (94) on tire

$$(97) \qquad F(z^{\frac{1}{b}}) = C z^a + \Psi(z) \ ,$$

où la fonction $\Psi(z)$ jouit de la propriété

$$(98) \qquad \lim_{z=\infty} \frac{\Psi(z)}{z^a} = 0 \ ,$$

et, par conséquent, nous obtiendrons de l'équation (96)

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = -C \int_1^{\infty} z^a x^z \log x \, dz - \int_1^{\mu} \Psi(z) x^z \log x \, dz - \int_{\mu}^{\infty} \Psi(z) x^z \log x \, dz \ ,$$

où μ désigne une quantité plus grande que l'unité. Nous en concluons

$$(99) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = -C \int_1^{\infty} z^a x^z \log x \, dz - M_1^{\mu} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a} \right\} \int_1^{\mu} z^a x^z \log x \, dz$$
$$- M_{\mu}^{\infty} \left\{ \frac{\Psi(z)}{z^a} \right\} \int_{\mu}^{\infty} z^a x^z \log x \, dz \ .$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $(-\log x)^a$, et posons

$$z = -\frac{y}{\log x}$$

dans les trois intégrales, nous aurons

$$(100)\quad (-\log x)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = C\int_{-\log x}^{\infty} e^{-y} y^a\, dy + M_1^{\mu}\left\{\frac{\Psi(z)}{z^a}\right\}\int_{-\log x}^{-\mu\log x} e^{-y} y^a\, dy + M_{\mu}^{\infty}\left\{\frac{\Psi(z)}{z^a}\right\}\int_{-\mu\log x}^{\infty} e^{-y} y^a\, dy\ .$$

Déterminons maintenant μ par l'égalité

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{-\log x}}\ ,$$

nous aurons

$$\lim_{x=1} \mu = \infty\ ,$$

$$\lim_{x=1} (-\mu \log x) = 0\ ,$$

$$\lim_{x=1} M_1^{\mu}\left\{\frac{\Psi(z)}{z^a}\right\} = \text{une quantité finie}\ ,$$

$$\lim_{x=1} M_{\mu}^{\infty}\left\{\frac{\Psi(z)}{z^a}\right\} = 0\ ,$$

et, par suite, nous obtiendrons de l'équation (100) pour $x = 1$

$$(101)\qquad \lim_{x=1} (-\log x)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = C\int_0^{\infty} e^{-y} y^a\, dy = C\,\Gamma(a+1)\ .$$

Puisque on a

$$\lim_{x=1} \frac{-\log x}{1-x} = 1\ ,$$

on tire de l'équation (101)

$$(102)\qquad \lim_{x=1} (1-x)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = C\,\Gamma(a+1)$$

ou, en employant la formule (93),

$$(103)\quad \lim_{x=1} (1-x)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = \Gamma(a+1) \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n}{n^{ab}}\ .$$

Par là est démontré ce théorème:

Théorème V. Soient a *et* b *deux quantités positives,* $c_1, c_2, c_3, \ldots$ *un nombre illimité de quantités réelles, et* x *une quantité positive plus petite que l'unité, on aura*

$$\lim_{x=1}(1-x)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^b} = \Gamma(a+1) \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n}{n^{ab}} ,$$

pourvu que la limite dans le second membre soit une quantité finie et déterminée.

Exemple 1. Par les substitutions

$$c_n = n^{a-1} , \quad b = 1$$

nous trouverons

$$\lim_{x=1}(1-x)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{a-1}x^n = \Gamma(a+1) \lim_{n=\infty} \frac{1^{a-1}+2^{a-1}+\cdots+n^{a-1}}{n^a} = \Gamma(a+1).\frac{1}{a} = \Gamma(a).$$

Par là est démontré, que:

Si l'on désigne par a *une quantité positive et par* x *une quantité plus petite que l'unité, on aura*

$$\lim_{x=1}(1-x)^a \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{a-1}x^n = \Gamma(a) . \tag{104}$$

Pour $a = \frac{1}{2}$ et $a = \frac{3}{2}$ on en déduit les formules

$$\lim_{x=1}\sqrt{1-x}\left(\frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^3}{\sqrt{3}} + \frac{x^4}{\sqrt{4}} + \ldots\right) = \sqrt{\pi} ,$$

$$\lim_{x=1}\sqrt{(1-x)^3}\left(\sqrt{1}\,x + \sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{3}\,x^3 + \sqrt{4}\,x^4 + \ldots\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

Exemple 2. Posons

$$c_n = 1 , \quad a = \frac{1}{b} ,$$

nous obtiendrons du théorème précédent

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{1}{b}} \sum_{n=1}^{n=\infty} x^{n^b} = \Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right) .$$

Par là est démontré, que

Si l'on désigne par b *une quantité positive et par* x *une quantité plus petite que l'unité, on aura*

$$\lim_{x=1}(1-x)^{\frac{1}{b}}\sum_{n=1}^{n=\infty}x^{n^b}=\Gamma\left(1+\frac{1}{b}\right)\cdot \tag{105}$$

Pour $b=2$ on en déduit la formule

$$\lim_{x=1}\sqrt{1-x}\,(x+x^4+x^9+x^{16}+\ldots)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$$

Soit b une quantité positive, et $c_1, c_2, c_3, \ldots$ une suite de quantités réelles, ainsi choisies, que

$$\lim_{n=\infty}\frac{c_1+c_2+c_3+\cdots\cdots+c_n}{(\log n)^b}=C\,, \tag{106}$$

C étant une quantité finie. Donnons à la fonction $F(z)$ la même signification qu'auparavant, nous obtiendrons

$$\lim_{z=\infty}\frac{F(z)}{(\log z)^b}=C\,. \tag{107}$$

En désignant par w une quantité positive, on a

$$\frac{1}{wn^w}=\int_n^\infty\frac{dz}{z^{1+w}}\,, \tag{108}$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{w}\sum_{n=1}^{n=k}\frac{c_n}{n^w}=\sum_{n=1}^{n=k}c_n\int_n^\infty\frac{dz}{z^{1+w}}=\sum_{n=1}^{n=k}F(n)\int_n^\infty\frac{dz}{z^{1+w}}-\sum_{n=1}^{n=k}F(n-1)\int_n^\infty\frac{dz}{z^{1+w}}\,, \tag{109}$$

et par suite, en posant $n+1$ au lieu de n dans la dernière somme,

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}\sum_{n=1}^{n=k}\frac{c_n}{n^w}&=\sum_{n=1}^{n=k}F(n)\int_n^\infty\frac{dz}{z^{1+w}}-\sum_{n=1}^{n=k-1}F(n)\int_{n+1}^\infty\frac{dz}{z^{1+w}}\\&=\sum_{n=1}^{n=k}F(n)\int_n^{n+1}\frac{dz}{z^{1+w}}+F(k)\int_{k+1}^\infty\frac{dz}{z^{1+w}}\\&=\sum_{n=1}^{n=k}\int_n^{n+1}\frac{F(z)\,dz}{z^{1+w}}+\frac{F(k)}{w(k+1)^w}\\&=\int_1^{k+1}\frac{F(z)\,dz}{z^{1+w}}+\frac{F(k)}{(\log k)^b}\cdot\frac{(\log k)^b}{w(k+1)^w}\cdot\end{aligned} \tag{110}$$

Pour $k = \infty$ on en déduit, au moyen de l'équation (107),

$$\frac{1}{w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = \int_1^\infty \frac{F(z)\,dz}{z^{1+w}} \,. \tag{111}$$

Puisque on a, d'après l'équation (107),

$$F(z) = C(\log z)^b + \Psi(z) \,, \tag{112}$$

où

$$\lim_{z=\infty} \frac{\Psi(z)}{(\log z)^b} = 0 \,, \tag{113}$$

nous obtiendrons de l'équation (111)

$$\frac{1}{w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = C\int_1^\infty \frac{(\log z)^b\,dz}{z^{1+w}} + \int_1^{\frac{1}{w}} \frac{\Psi(z)\,dz}{z^{1+w}} + \int_{\frac{1}{w}}^\infty \frac{\Psi(z)\,dz}{z^{1+w}} \tag{114}$$

$$= C\int_1^\infty \frac{(\log z)^b\,dz}{z^{1+w}} + M_1^{\frac{1}{w}}\left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\}\int_1^{\frac{1}{w}} \frac{(\log z)^b\,dz}{z^{1+w}} + M_{\frac{1}{w}}^\infty\left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\}\int_{\frac{1}{w}}^\infty \frac{(\log z)^b\,dz}{z^{1+w}} \,.$$

Posons dans les intégrales dans le second membre de cette équation

$$z = e^{\frac{x}{w}} \,,$$

nous en obtiendrons

$$w^b \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = C\int_0^\infty e^{-x}x^b\,dx + M_1^{\frac{1}{w}}\left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\}\int_0^{w\log\frac{1}{w}} e^{-x}x^b\,dx \tag{115}$$

$$+ M_{\frac{1}{w}}^\infty\left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\}\int_{w\log\frac{1}{w}}^\infty e^{-x}x^b\,dx \,,$$

d'où l'on tire pour $w = 0$, en y appliquant les équations (113) et (106),

$$\lim_{w=0} w^b \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = C\int_0^\infty e^{-x}x^b\,dx = \Gamma(b+1)\lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{(\log n)^b} \,. \tag{116}$$

De cette formule résulte le théorème suivant:

Théorème VI. Soit b une quantité positive, $c_1, c_2, c_3, \ldots$ *un nombre illimité de quantités réelles, et* w *une quantité positive, on aura*

$$\lim_{w=0} w^b \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = \Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n}{(\log n)^b} ,$$

pourvu que la limite dans le second membre soit une quantité finie et déterminée.

Exemple. En posant

$$c_n = \frac{(\log n)^{b-1}}{n} ,$$

où $b > 0$, nous obtiendrons de ce théorème

$$(117) \qquad \lim_{w=0} w^b \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{(\log n)^{b-1}}{n^{1+w}} = \Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{k=2}^{k=n} \frac{(\log k)^{b-1}}{k}}{(\log n)^b}$$

$$= \Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{\int_2^n \frac{(\log x)^{b-1} dx}{x}}{(\log n)^b} = \Gamma(b+1) \lim_{n=\infty} \frac{(\log n)^b - (\log 2)^b}{b (\log n)^b} = \Gamma(b) ;$$

on retrouve ainsi l'équation (92); pour $b = 1$ et $b = \frac{1}{2}$ on en tire

$$\lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}} = 1 ,$$

$$\lim_{w=0} \sqrt{w} \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}\sqrt{\log n}} = \sqrt{\pi} .$$

Désignons par a et b deux quantités positives et par $c_1, c_2, c_3, \ldots$ une suite illimitée de quantités réelles, et supposons, que l'on a

$$(118) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n}{(\log n)^b} = C ,$$

C étant une quantité finie. En définissant, comme ci-dessus, la fonction $F(z)$ par l'équation (59), nous en obtiendrons

$$(119) \qquad \lim_{z=\infty} \frac{F(z)}{(\log z)^b} = C .$$

De la formule

$$x^{n^a} = -\int_{n^a}^{\infty} x^z \log x \, dz \ , \tag{120}$$

qui subsiste pour $0 < x < 1$, on tire

$$\sum_{n=1}^{n=k} c_n x^{n^a} = -\sum_{n=1}^{n=k} c_n \int_{n^a}^{\infty} x^z \log x \, dz = -\sum_{n=1}^{n=k} F(n) \int_{n^a}^{\infty} x^z \log x \, dz \tag{121}$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=k} F(n-1) \int_{n^a}^{\infty} x^z \log x \, dz \ ,$$

et par suite, en substituant $n+1$ au lieu de n dans la dernière somme

$$\sum_{n=1}^{n=k} c_n x^{n^a} = -\sum_{n=1}^{n=k} F(n) \int_{n^a}^{\infty} x^z \log x \, dz + \sum_{n=1}^{n=k-1} F(n) \int_{(n+1)^a}^{\infty} x^z \log x \, dz \tag{122}$$

$$= -\sum_{n=1}^{n=k} F(n) \int_{n^a}^{(n+1)^a} x^z \log x \, dz - F(k) \int_{(k+1)^a}^{\infty} x^z \log x \, dz$$

$$= -\sum_{n=1}^{n=k} \int_{n^a}^{(n+1)^a} F(z^{\frac{1}{a}}) x^z \log x \, dz + F(k) \, x^{(k+1)^a}$$

$$= -\int_1^{(k+1)^a} F(z^{\frac{1}{a}}) x^z \log x \, dz + \frac{F(k)}{(\log k)^b} \cdot x^{(k+1)^a} (\log k)^b \ .$$

Pour $k = \infty$ on en déduit, en faisant usage de l'équation (119),

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^a} = -\int_1^{\infty} F(z^{\frac{1}{a}}) x^z \log x \, dz \ . \tag{123}$$

De l'équation (119) on tire

$$F(z^{\frac{1}{a}}) = \frac{C}{a^b} (\log z)^b + \Psi(z) \ , \tag{124}$$

où

$$\lim_{z=\infty} \frac{\Psi(z)}{(\log z)^b} = 0 \ , \tag{125}$$

et, par suite, on obtiendra de l'équation (123), μ étant une quantité plus grande que l'unité,

$$(126)\quad \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^a} = -\frac{C}{a^b}\int_1^\infty x^z (\log z)^b \log x\, dz - \int_1^\mu \Psi(z) x^z \log x\, dz - \int_\mu^\infty \Psi(z) x^z \log x\, dz$$

$$= -\frac{C}{a^b}\int_1^\infty x^z (\log z)^b \log x\, dz - M_1^\mu \left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\} \int_1^\mu x^z (\log z)^b \log x\, dz$$

$$- M_\mu^\infty \left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\} \int_\mu^\infty x^z (\log z)^b \log x\, dz \ .$$

Posons dans les intégrales dans le second membre de cette équation

$$z = \frac{y}{-\log x} \ ,$$

nous en obtiendrons

$$(127)\quad \frac{1}{\left(-\log\log\frac{1}{x}\right)^b} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^a} = \frac{C}{a^b}\int_{-\log x}^\infty e^{-y}\left(1 - \frac{\log y}{\log\log\frac{1}{x}}\right)^b dy$$

$$+ M_1^\mu \left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\} \int_{-\log x}^{-\mu\log x} e^{-y}\left(1 - \frac{\log y}{\log\log\frac{1}{x}}\right)^b dy$$

$$+ M_\mu^\infty \left\{\frac{\Psi(z)}{(\log z)^b}\right\} \int_{-\mu\log x}^\infty e^{-y}\left(1 - \frac{\log y}{\log\log\frac{1}{x}}\right)^b dy \ .$$

Déterminons maintenant μ par l'égalité

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{-\log x}} \ ,$$

nous obtiendrons des équations (127) et (125) pour $x = 1$

$$(128)\quad \lim_{x=1} \frac{1}{\left(-\log\log\frac{1}{x}\right)^b} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^a} = \frac{C}{a^b}\int_0^\infty e^{-y} dy = \frac{C}{a^b} \ .$$

Puisque on a

$$\lim_{x=1} \frac{-\log\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{1-x}} = 1 ,$$

on tire des équations (128) et (118) la formule

$$(129) \quad \lim_{x=1} \frac{1}{\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^b} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^a} = \frac{1}{a^b} \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{(\log n)^b} ,$$

d'où résulte ce théorème:

Théorème VII. Soient a *et* b *deux quantités positives,* $c_1 , c_2 , c_3 \ldots$ *un nombre illimité de quantités réelles, et* x *une quantité positive plus petite que l'unité, on aura*

$$\lim_{x=1} \frac{1}{\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^b} \sum_{n=1}^{n=\infty} c_n x^{n^a} = \frac{1}{a^b} \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + c_3 \ldots + c_n}{(\log n)^b} ,$$

pourvu que la limite dans le second membre soit une quantité finie et déterminée.

Exemple. Posons

$$c_n = \frac{(\log n)^{b-1}}{n} ,$$

où $b > 0$, nous aurons

$$\lim_{x=1} \frac{1}{\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\log n)^{b-1}}{n} x^{n^a} = \frac{1}{a^b} \lim_{n=\infty} \frac{\sum_{k=2}^{k=n} \frac{(\log k)^{b-1}}{k}}{(\log n)^b}$$

$$= \frac{1}{a^b} \lim_{n=\infty} \frac{\int_2^n \frac{(\log x)^{b-1} dx}{x}}{(\log n)^b} = \frac{1}{a^b b} .$$

Par là est démontré, que

Si l'on désigne par a *et* b *des quantités positives et par* x *une quantité positive plus petite que l'unité, on aura*

$$(130) \qquad \lim_{x=1} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^b} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\log n)^{b-1}}{n} x^{n^a} = \frac{1}{a^b b} \ .$$

§. 4.

THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS NUMÉRIQUES.

Désignons dans ce qui suit par $p_1 , p_2 , p_3 , \ldots$ les nombres premiers positifs, rangés par ordre de grandeurs croissantes, de la manière que

$$p_1 = 2 , p_2 = 3 , p_3 = 5 , p_4 = 7 , \ldots . ,$$

chaque nombre positif m peut se mettre sous la forme

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots . ,$$

où les exposants sont des nombres entiers positifs ou nuls; de plus le nombre m ne peut se mettre sous cette forme que d'une seule manière. Cela posé, attribuons dans l'expression

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots .$$

aux exposants $\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots$ toutes les valeurs entières, positives et nulles, et combinons ces valeurs entre elles de toutes les manières possibles, nous en obtiendrons tous les nombres entiers positifs, et nous n'obtiendrons que des nombres entiers positifs; enfin nous obtiendrons par là chaque nombre seulement une fois. De là résulte immédiatement le théorème suivant:

Théorème VIII. Si l'on désigne par f(m) *une fonction, bien déterminée pour toutes les valeurs entières positives de la variable* m, *et par* $p_1 , p_2 , p_3 , \ldots$ *tous les nombres premiers positifs, on aura*

$$\sum_{(\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots = 0 , 1 , 2 , \ldots)} f(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots) = \sum_{m=1}^{m=\infty} f(m) \ ,$$

pourvu que la série dans le second membre converge indépendamment de l'ordre de ses termes.

Soient maintenant $f(m)$, $f_1(m)$, $\Phi(m)$, $g(m)$ des fonctions bien déterminées pour toutes les valeurs entières positives de m, et supposons, que la fonction $g(m)$ satisfasse à la condition

$$g(m)g(n) = g(mn) \tag{131}$$

pour tous les nombres entiers positifs m et n, on aura évidemment une égalité de la forme

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} f(m)g(m)f_1(n)g(n)\Phi(mn) = \sum_{k=1}^{k=\infty} c_k\Phi(k) \ ; \tag{132}$$

en effet, si l'on attribue aux quantités m et n toutes les valeurs entières positives, nous n'obtiendrons de l'expression $\Phi(mn)$ que des termes de la forme $\Phi(k)$, où k désigne un nombre entier positif; quant au coefficient c_k, celui-ci sera évidemment déterminé par la formule

$$c_k = \sum_m \sum_n f(m)g(m)f_1(n)g(n) \ , \tag{133}$$

où les nombres positifs m et n sont combinés entre eux de toutes les manières, qui sont compatibles avec la condition

$$mn = k \ ;$$

par suite, en désignant par d un diviseur positif quelconque du nombre k et par d_1 le diviseur complémentaire, ainsi que l'on aura toujours

$$dd_1 = k \ ,$$

l'équation (133) pourra se mettre sous la forme

$$c_k = \sum_{dd_1=k} f(d)g(d)f_1(d_1)g(d_1) \tag{134}$$

ou, en y appliquant la condition (131),

$$c_k = g(k)\sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1) \ . \tag{135}$$

En introduisant dans le second membre de l'équation (132) la valeur du coefficient c_k, donnée par la formule (135), nous aurons

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} f(m)g(m)\sum_{n=1}^{n=\infty} f_1(n)g(n)\Phi(mn) = \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k)\Phi(k)\sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1) \ , \tag{136}$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème IX. Si l'on désigne par f(m), $f_1(m)$, $\Phi(m)$ *des fonctions bien déterminées pour toutes les valeurs entières positives de la variable* m, *et par* g(m) *une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs* m *et* n *satisfait à la condition*

$$g(m)g(n) = g(mn) \ ,$$

on aura

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} f(m)g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_1(n)g(n)\,\Phi(mn) = \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k)\,\Phi(k) \sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1) \ ,$$

pourvu que les séries dans les deux membres convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes.

Introduisons maintenant les notations

$$\psi(k) = \sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1) \tag{137}$$

et

$$\Psi(k) = \psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(k) \ , \quad \Psi(0) = 0 \ , \tag{138}$$

et appliquons sur le second membre de l'équation (136) la formule de transformation de séries, qu'on doit à Abel, nous aurons

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} f(m)g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_1(n)g(n)\,\Phi(mn) = \lim_{s=\infty} \sum_{k=1}^{k=s} g(k)\,\Phi(k)\,\psi(k) \tag{139}$$

$$= \lim_{s=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{k=s} \Psi(k)\big(g(k)\,\Phi(k) - g(k+1)\Phi(k+1)\big) + \Psi(s)g(s+1)\Phi(s+1) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\infty} \Psi(k)\big(g(k)\,\Phi(k) - g(k+1)\,\Phi(k+1)\big) \ ,$$

en supposant, que l'on a

$$\lim_{s=\infty} \Psi(s)g(s+1)\,\Phi(s+1) = 0 \ ;$$

en vertu de ce qui précède nous aurons le théorème suivant:

Théorème X. Soient f(m), $f_1(m)$, $\Phi(m)$ *des fonctions bien déterminées pour toutes les valeurs positives entières de la variable* m, *et* g(m) *une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs* m *et* n *satisfait à la condition*

$$g(m)g(n) = g(mn) \ ;$$

posons

$$\psi(k) = \sum_{dd_1=k} f(d) f_1(d_1)$$

et

$$\Psi(k) = \psi(1) + \psi(2) + \psi(3) + \cdots + \psi(k) \ ,$$

et supposons que

$$\lim_{s=\infty} \Psi(s) g(s+1)\, \Phi(s+1) = 0 \ ,$$

nous aurons

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} f(m) g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_1(n) g(n)\, \Phi(mn) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \Psi(k) \big(g(k)\, \Phi(k) - g(k+1) \Phi(k+1) \big) \ ,$$

pourvu que les séries dans les deux membres convergent indépendamment de l'ordre de leurs termes.

Posons maintenant l'équation (137) sous la forme

$$\psi(k) = \sum_d f(d) f_1\left(\frac{k}{d}\right) \ , \tag{140}$$

où d est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre k, et désignons par $E(x)$, x étant une quantité réelle, le plus grand des nombres entiers, qui ne surpassent pas x, de sorte que l'on aura

$$0 \leq x - E(x) < 1 \ ; \tag{141}$$

soient de plus h et k deux nombres entiers positifs, il s'ensuit, que la différence

$$E\left(\frac{k}{h}\right) - E\left(\frac{k-1}{h}\right)$$

sera égale à 1 ou à 0, selon que h divise ou ne divise pas k, et par suite nous obtiendrons de l'équation (140)

$$\psi(k) = \sum_{h=1}^{h=\infty} \left\{ E\left(\frac{k}{h}\right) - E\left(\frac{k-1}{h}\right) \right\} f(h) f_1\left(\frac{k}{h}\right) \ , \tag{142}$$

d'où l'on tire, n étant un nombre entier positif,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=\infty} f(h) \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ E\left(\frac{k}{h}\right) - E\left(\frac{k-1}{h}\right) \right\} f_1\left(\frac{k}{h}\right) \ . \tag{143}$$

La différence dans le second membre étant nulle pour $h > k$, on aura

$$(144) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} f(h) \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ E\left(\frac{k}{h}\right) - E\left(\frac{k-1}{h}\right) \right\} f_1\left(\frac{k}{h}\right) ;$$

la même différence étant égale à 1 ou à 0, selon que k est un multiple ou n'est pas un multiple de h, on obtiendra

$$(145) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} f(h) \sum_{k} f_1\left(\frac{k}{h}\right) ,$$

où l'on a à observer, que k parcourt ceux des nombres

$$1 , 2 , 3 , \ldots . n ,$$

qui sont des multiples de h; par suite, k parcourt les nombres

$$h , 2h , 3h , \ldots . E\left(\frac{n}{h}\right) h ,$$

et l'on obtiendra de l'équation (145)

$$(146) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} f(h) \left\{ f_1(1) + f_1(2) + f_1(3) + \cdots + f_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) \right\} ,$$

et, par suite,

$$(147) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) ,$$

en employant la notation

$$F_1(k) = f_1(1) + f_1(2) + f_1(3) + \ldots . + f_1(k) , F_1(0) = 0 .$$

Nous transformerons maintenant le second membre de l'équation (147); soit q un nombre entier, soumis aux conditions

$$0 \leq q \leq n ,$$

on déduit de l'équation (147)

$$(148) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=q} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + \sum_{h=q+1}^{h=n} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) .$$

En posant

$$a = E\left(\frac{n}{q+1}\right) , \tag{149}$$

les termes de la suite

$$E\left(\frac{n}{q+1}\right) , E\left(\frac{n}{q+2}\right), \ldots . E\left(\frac{n}{n}\right) \tag{150}$$

ne sont autres que les nombres entiers

$$a , a-1 , a-2 , \ldots 2 , 1 .$$

Si l'on désigne par $\varphi(t)$ le nombre de ceux de ces termes, qui sont supérieurs ou égaux à t, il en résulte que

$$E\left(\frac{n}{q+\varphi(t)}\right) \geqq t , E\left(\frac{n}{q+\varphi(t)+1}\right) \leqq t-1 \tag{151}$$

ou, d'après les inégalités (141),

$$\frac{n}{q+\varphi(t)} \geqq t , \frac{n}{q+\varphi(t)+1} < t ,$$

d'où l'on tire

$$\varphi(t) \leqq \frac{n}{t} - q < \varphi(t) + 1 , \tag{152}$$

et par suite on aura

$$\varphi(t) = E\left(\frac{n}{t}\right) - q . \tag{153}$$

Donc le nombre des termes de la suite (150), qui sont égaux à a, est égal à

$$\varphi(a) = E\left(\frac{n}{a}\right) - q , \tag{154}$$

et le nombre de ceux, qui sont égaux à t, où $t < a$, est

$$\varphi(t) - \varphi(t+1) = E\left(\frac{n}{t}\right) - E\left(\frac{n}{t+1}\right) . \tag{155}$$

On déduit de là

$$(156)\quad \sum_{h=q+1}^{h=n} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) = F_1(a)\left\{f(q+1)+f(q+2)+\cdots+f\left(E\left(\frac{n}{a}\right)\right)\right\}$$
$$+ F_1(a-1)\left\{f\left(E\left(\frac{n}{a}\right)+1\right)+f\left(E\left(\frac{n}{a}\right)+2\right)+\cdots+f\left(E\left(\frac{n}{a-1}\right)\right)\right\}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ F_1(2)\left\{f\left(E\left(\frac{n}{3}\right)+1\right)+f\left(E\left(\frac{n}{3}\right)+2\right)+\cdots+f\left(E\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right\}$$
$$+ F_1(1)\left\{f\left(E\left(\frac{n}{2}\right)+1\right)+f\left(E\left(\frac{n}{2}\right)+2\right)+\cdots+f\left(E\left(\frac{n}{1}\right)\right)\right\},$$

et, en posant

$$F(k) = f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(k)\ ,\ F(0)=0\ ,$$

on obtiendra de l'équation (156)

$$(157)\quad \sum_{h=1}^{h=n} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) = \sum_{h=1}^{h=q} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + F_1(a)\left\{F\left(E\left(\frac{n}{a}\right)\right) - F(q)\right\}$$
$$+ F_1(a-1)\left\{F\left(E\left(\frac{n}{a-1}\right)\right) - F\left(E\left(\frac{n}{a}\right)\right)\right\}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ F_1(2)\left\{F\left(E\left(\frac{n}{2}\right)\right) - F\left(E\left(\frac{n}{3}\right)\right)\right\}$$
$$+ F_1(1)\left\{F\left(E\left(\frac{n}{1}\right)\right) - F\left(E\left(\frac{n}{2}\right)\right)\right\}.$$

En observant que l'on a

$$F_1(k) - F_1(k-1) = f_1(k)\ ,\ F_1(1) = f_1(1)\ ,$$

on déduit des équations (157) et (147)

$$(158)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=q} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + \sum_{h=1}^{h=a} F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h) - F(q)\,F_1(a)\ ;$$

par là est démontré le théorème suivant.

Théorème XI. Soient $\mathrm{f}(\mathrm{m})$ *et* $\mathrm{f}_1(\mathrm{m})$ *des fonctions bien déterminées pour toutes les valeurs positives entières de la variable* m, *et posons*

$$\psi(k) = \sum_{dd_1=k} f(d) f_1(d_1) ,$$

$$F(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(k) , \quad F(0) = 0 ,$$

$$F_1(k) = f_1(1) + f_1(2) + f_1(3) + \ldots + f_1(k) , \quad F_1(0) = 0 ;$$

en désignant par q *un nombre entier, qui satisfait aux conditions*

$$0 \leqq q \leqq n ,$$

et en posant

$$a = E\left(\frac{n}{q+1}\right) ,$$

on aura

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=q} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + \sum_{h=1}^{h=a} F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h) - F(q) F_1(a) .$$

Posons maintenant

$$q = 0 , \quad q = E(\sqrt{n}) , \quad q = n ,$$

nous obtiendrons de ce théorème les formules suivantes:

$$(159) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h) ,$$

$$(160) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h) + F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) \right\}$$

$$- F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n})\right) ,$$

$$(161) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) .$$

En effet, on déduit les formules (159) et (161) immédiatement du théorème précédent; quant à la formule (160), celle-ci peut être démontrée de la manière suivante. Des égalités

$$q = E(\sqrt{n}) \ , \ a = E\left(\frac{n}{q+1}\right)$$

on tire

$$q \leqq \sqrt{n} < q+1 \tag{162}$$

et

$$a \leqq \frac{n}{q+1} < a+1 \ , \tag{163}$$

et, par conséquent,

$$a \leqq \frac{n}{q+1} < \frac{n}{\sqrt{n}} < \sqrt{n} \tag{164}$$

et

$$a > \frac{n}{q+1} - 1 > \frac{n}{\sqrt{n}+1} - 1 > \sqrt{n} - 1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} \ , \tag{165}$$

d'où

$$\sqrt{n} - 1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} < a < \sqrt{n} \ . \tag{166}$$

Ici nous voulons distinguer deux cas:

1) Pour

$$\sqrt{n} - 1 < a < \sqrt{n}$$

on a

$$a < \sqrt{n} < a+1 \ ,$$

et, par suite,

$$a = E(\sqrt{n}) \ .$$

2) Pour

$$\sqrt{n} - 1 - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} < a \leqq \sqrt{n} - 1$$

on a

$$a \leqq \sqrt{n} - 1 < a + 1 \ ,$$

et, par conséquent,

$$a = E(\sqrt{n}) - 1 \ .$$

Du théorème XI on déduit dans le premier cas

$$(167) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h) \right\}$$

$$- F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n})\right) \ ,$$

et dans le second cas

$$(168) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})-1} F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h)$$

$$- F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n}) - 1\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h) \right\} - F\left(E\left(\frac{n}{E(\sqrt{n})}\right)\right) f_1\left(E(\sqrt{n})\right)$$

$$- F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n}) - 1\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f(h) + F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_1(h) \right\} - F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n})\right) + R \ ,$$

où

$$(169) \qquad R = F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n})\right) - F\left(E\left(\frac{n}{E(\sqrt{n})}\right)\right) f_1\left(E(\sqrt{n})\right)$$

$$- F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n}) - 1\right) \ .$$

Puisque on a dans ce cas

$$a = E(\sqrt{n}) - 1 \ ,$$

on obtiendra de la seconde des inégalités (163)

$$\frac{n}{E(\sqrt{n}) + 1} < E(\sqrt{n})$$

et, par suite,

$$\frac{n}{E(\sqrt{n})} < E(\sqrt{n}) + 1 \ ;$$

mais on a évidemment

$$E(\sqrt{n}) \leq \frac{n}{E(\sqrt{n})} \ ,$$

et de ces deux inégalités on déduit

$$E(\sqrt{n}) \leq \frac{n}{E(\sqrt{n})} < E(\sqrt{n}) + 1 \ , \tag{170}$$

d'où

$$E(\sqrt{n}) = E\left(\frac{n}{E(\sqrt{n})}\right) . \tag{171}$$

Des équations (169) et (171) on déduit

$$\begin{aligned} R = {} & F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n})\right) - F\left(E(\sqrt{n})\right) f_1\left(E(\sqrt{n})\right) \\ & - F\left(E(\sqrt{n})\right) F_1\left(E(\sqrt{n}) - 1\right) \\ = {} & F\left(E(\sqrt{n})\right)\Big\{ F_1\left(E(\sqrt{n})\right) - F_1\left(E(\sqrt{n}) - 1\right) - f_1\left(E(\sqrt{n})\right)\Big\} = 0 \ , \end{aligned} \tag{172}$$

et des équations (168) et (172) on conclura, que la formule (167) subsiste aussi dans ce cas. Par là l'équation (160) est rigoureusement démontrée.

Soit $f_1(m)$ une fonction bien déterminée pour toutes les valeurs entières positives du nombre m, et supposons, que $f_1(1)$ ne soit pas nul, on pourra évidemment déterminer une fonction $f_2(m)$, qui a la propriété, que

$$\sum_{dd_1=k} f_1(d) f_2(d_1) = 1 \text{ pour } k = 1 \,, \tag{173}$$

$$= 0 \text{ pour } k > 1 \,;$$

en effet, pour la détermination des valeurs de la fonction $f_2(m)$ pour $m = 1, 2, 3, \ldots$, nous aurons les équations

$$f_1(1) f_2(1) = 1 \,,$$

$$f_1(1) f_2(2) + f_1(2) f_2(1) = 0 \,,$$

$$f_1(1) f_2(3) + f_1(3) f_2(1) = 0 \,,$$

$$f_1(1) f_2(4) + f_1(2) f_2(2) + f_1(4) f_2(1) = 0 \,,$$

$$f_1(1) f_2(5) + f_1(5) f_2(1) = 0 \,,$$

$$f_1(1) f_2(6) + f_1(2) f_2(3) + f_1(3) f_2(2) + f_1(6) f_2(1) = 0 \,,$$

. . . . . .

d'où l'on tire

$$f_2(1) = \frac{1}{f_1(1)} \,,$$

$$f_2(2) = -\frac{f_1(2)}{f_1(1)^2} \,,$$

$$f_2(3) = -\frac{f_1(3)}{f_1(1)^2} \,,$$

$$f_2(4) = \frac{f_1(2)^2 - f_1(1) f_1(4)}{f_1(1)^3} \,,$$

$$f_2(5) = -\frac{f_1(5)}{f_1(1)^2} \,,$$

$$f_2(6) = \frac{2 f_1(2) f_1(3) - f_1(1) f_1(6)}{f_1(1)^3} \,,$$

. . . . . .

Puisque d'après la supposition $f_1(1)$ n'est pas nul, les valeurs de la fonction $f_2(m)$ seront finies et déterminées; dans ce qui va suivre nous appelerons $f_2(m)$ la fonction conjuguée de $f_1(m)$; les fonctions $f_1(m)$ et $f_2(m)$ entrant symétriquement dans les équations ci-dessus, $f_1(m)$ sera aussi la fonction conjuguée de $f_2(m)$.

Remplaçons maintenant dans le théorème IX les fonctions

$$f(m) \ , \ f_1(m) \ , \ \Phi(m)$$

par

$$f_1(m) \ , \ f_2(m) \ , \ \Phi(mx) \ ,$$

où $f_2(m)$ est la fonction conjuguée de $f_1(m)$, nous aurons

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} f_1(m)g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_2(n)g(n)\Phi(mnx) = \sum_{k=1}^{k=\infty} g(k)\Phi(kx) \sum_{dd_1=k} f_1(d)f_2(d_1) \ ,$$

ou, en y appliquant les équations (173),

$$(174) \qquad g(1)\Phi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} f_1(m)g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_2(n)g(n)\Phi(mnx) \ .$$

De la formule

$$g(m)g(n) = g(mn) \ ,$$

qui subsiste pour tous les nombres entiers positifs m et n, on tire pour $n = 1$

$$(175) \qquad g(m)\{g(1) - 1\} = 0 \ .$$

Excluons le cas, où $g(m)$ est nul pour toutes les valeurs positives entières de m, nous aurons

$$(176) \qquad g(1) = 1 \ ,$$

et nous obtiendrons de l'équation (174) la formule

$$(177) \qquad \Phi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} f_1(m)g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_2(n)g(n)\Phi(mnx) \ ,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XII. Soit $\Phi(x)$ *une fonction quelconque,* $f_1(m)$ *une fonction, qui ne s'annule pas pour* $m = 1$, *et* $f_2(m)$ *la fonction conjuguée de* $f_1(m)$; *en désignant par* $g(m)$ *une fonction, qui satisfait aux conditions*

$$g(m)g(n) = g(mn) \ , \ g(1) = 1$$

pour tous les nombres entiers positifs m *et* n, *on aura*

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} f_1(m)g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_2(n)g(n)\,\Phi(mnx)$$

pour toutes les valeurs de la variable x, *pour lesquelles la série dans le second membre converge indépendamment de l'ordre de ses termes.*

Posons dans l'équation (177)

$$\Phi(x) = \frac{1}{x^z} \ ,$$

nous aurons

$$(178) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{f_1(m)g(m)}{m^z} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_2(n)g(n)}{n^z} = 1 \ .$$

En remplaçant dans le théorème IX les fonctions

$$g(m) \ , \ f_1(m) \ , \ \Phi(m)$$

par

$$1 \ , \ f_1(m)g(m) \ , \ \frac{1}{m^z} \ ,$$

nous obtiendrons

$$(179) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{f(m)}{m^z} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_1(n)g(n)}{n^z} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^z} \sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1)g(d_1) \ .$$

Multiplions les deux membres de cette équation par

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_2(n)g(n)}{n^z}$$

et posons

$$h(k) = \sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1)g(d_1) \ ,$$

il vient alors, d'après la formule (178),

$$(180) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{f(m)}{m^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{f_2(n)g(n)}{n^z} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{h(k)}{k^z}$$

et par conséquent, en appliquant la formule (179) au second membre de cette équation,

$$(181) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{f(m)}{m^z} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^z} \sum_{dd_1=m} f_2(d)g(d)h(d_1) \ .$$

En égalant les uns aux autres les coefficients de $\frac{1}{k^z}$ dans les deux membres, nous obtiendrons

$$(182) \qquad f(k) = \sum_{dd_1=k} f_2(d)g(d)h(d_1) \ ;$$

de là résulte ce théorème:

Théorème XIII. Soit f(m) *une fonction quelconque,* $f_1(m)$ *une fonction, qui ne s'annule pas pour* $m = 1$, $f_2(m)$ *la fonction conjuguée de* $f_1(m)$; *en désignant par* g(m) *une fonction, qui satisfait aux conditions*

$$g(m)g(n) = g(mn) \ , \ g(1) = 1$$

pour tous les nombres entiers positifs m *et* n, *et en posant*

$$h(k) = \sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1)g(d_1) \ ,$$

on aura

$$f(k) = \sum_{dd_1=k} f_2(d)g(d)h(d_1) \ .$$

Si l'on y remplace $g(k)$ par 1 et $h(k)$ par $\psi(k)$, on trouvera qu'en faisant

$$(183) \qquad \psi(k) = \sum_{dd_1=k} f(d)f_1(d_1) \ ,$$

on aura

$$(184) \qquad f(k) = \sum_{dd_1=k} f_2(d)\psi(d_1) \ .$$

En faisant usage des formules (159), (160), (161) pour évaluer la somme

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(k) \ ,$$

nous en obtiendrons le théorème suivant:

Théorème XIV. Soit $\mathrm{f}(\mathrm{m})$ *une fonction quelconque,* $\mathrm{f}_1(\mathrm{m})$ *une fonction, qui ne s'annule pas pour* $\mathrm{m} = 1$, *et* $\mathrm{f}_2(\mathrm{m})$ *la fonction conjuguée de* $\mathrm{f}_1(\mathrm{m})$; *en posant*

$$\psi(k) = \sum_{dd_1=k} f(d) f_1(d_1) \ ,$$

$$F_2(k) = f_2(1) + f_2(2) + \ldots + f_2(k) \ ,$$

$$\Psi(k) = \psi(1) + \psi(2) + \ldots + \psi(k) \ ,$$

on aura

$$f(k) = \sum_{dd_1=k} f_2(d) \psi(d_1) \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(k) = \sum_{h=1}^{h=n} F_2\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) \psi(h) \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(k) = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ F_2\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) \psi(h) + \Psi\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_2(h) \right\} - F_2\left(E(\sqrt{n})\right) \Psi\left(E(\sqrt{n})\right) \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} f(k) = \sum_{h=1}^{h=n} \Psi\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) f_2(h) \ .$$

§. 5.

DE LA FONCTION $\sum_{dd_1=k} d^s (\log d)^t d_1^{s_1} (\log d_1)^{t_1}$.

Désignons par s , s_1 , t , t_1 , w des quantités réelles, qui satisfont aux conditions

$$(185) \qquad s \geqq -1 \ , \ s_1 \leqq s \ , \ t \geqq 0 \ , \ t_1 \geqq 0 \ , \ w > 0 \ ,$$

et remplaçons dans le théorème IX les fonctions

$$g(m) \ , \ f(m) \ , \ f_1(m) \ , \ \Phi(k)$$

par

$$1\ ,\ m^s(\log m)^t\ ,\ m^{s_1}(\log m)^{t_1}\ ,\ \frac{1}{k^{s+1+w}}\ ,$$

nous en obtiendrons

$$(186)\qquad \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{(\log m)^t}{m^{1+w}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(\log n)^{t_1}}{n^{s-s_1+1+w}}=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^{s+1+w}}\ ,$$

en définissant la fonction $\psi(k)$ par l'égalité

$$(187)\qquad \psi(k)=\sum_{dd_1=k} d^s(\log d)^t d_1^{s_1}(\log d_1)^{t_1}\ .$$

De l'équation (186) on tire, en y appliquant la formule (55),

$$(188)\qquad \left\{\frac{\Gamma(t+1)}{w^{t+1}}+K(-1-w\ ,\ t)\right\}\left\{\frac{\Gamma(t_1+1)}{(s-s_1+w)^{t_1+1}}+K(s_1-s-1-w\ ,\ t_1)\right\}$$
$$=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^{s+1+w}}\ .$$

Nous nous servirons de cette équation pour évaluer la valeur moyenne de la fonction numérique $\psi(k)$, et nous distinguerons les quatre cas suivants:

I. Pour $s>-1$, $s_1=s$ nous obtiendrons de l'équation (188) pour $w=0$, après avoir multiplié les deux membres par w^{t+t_1+2} ,

$$(189)\qquad \Gamma(t+1)\,\Gamma(t_1+1)=\lim_{w=0} w^{t+t_1+2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^{s+1+w}}\ .$$

Remplaçons dans le théorème IV les quantités

$$a\ ,\ b\ ,\ c_k$$

par

$$s+1\ ,\ t+t_1+1\ ,\ \psi(k)\ ,$$

nous en déduirons, les conditions $a>0$, $b>-1$ étant remplies,

$$(190)\ \lim_{w=0} w^{t+t_1+2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^{s+1+w}}=(s+1)\,\Gamma(t+t_1+2)\lim_{n=\infty}\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{n^{s+1}(\log n)^{t+t_1+1}}\ ,$$

et des équations (189), (190) on tire

$$(191)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{n^{s+1}(\log n)^{t+t_1+1}} = \frac{1}{s+1}\cdot\frac{\Gamma(t+1)\Gamma(t_1+1)}{\Gamma(t+t_1+2)} .$$

II. Pour $s>-1$, $s_1<s$ on déduit de l'équation (188) pour $w=0$, après avoir multiplié les deux membres par w^{t+1} ,

$$(192)\quad \Gamma(t+1)\left\{\frac{\Gamma(t_1+1)}{(s-s_1)^{t_1+1}}+K(s_1-s-1\ ,\ t_1)\right\} = \lim_{w=0} w^{t+1}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^{s+1+w}} .$$

Remplaçons dans le théorème IV les quantités

$$a\ ,\ b\ ,\ c_k$$

par

$$s+1\ ,\ t\ ,\ \psi(k)\ ,$$

nous aurons, les conditions $a>0$, $b>-1$ étant remplies,

$$(193)\quad \lim_{w=0} w^{t+1}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^{s+1+w}} = (s+1)\Gamma(t+1)\lim_{n=\infty}\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{n^{s+1}(\log n)^t} ,$$

et des équations (192) et (193) on tire

$$(194)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{n^{s+1}(\log n)^t} = \frac{1}{s+1}\left\{\frac{\Gamma(t_1+1)}{(s-s_1)^{t_1+1}}+K(s_1-s-1\ ,\ t_1)\right\}.$$

III. Pour $s=-1$, $s_1=s$ on obtiendra de l'équation (188), après avoir multiplié les deux membres par w^{t+t_1+2} ,

$$(195)\quad \Gamma(t+1)\Gamma(t_1+1) = \lim_{w=0} w^{t+t_1+2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^w} .$$

Remplaçons dans le théorème VI

$$b\ ,\ c_k$$

par

$$t+t_1+2\ ,\ \psi(k)\ ,$$

nous en obtiendrons, la condition $b>0$ étant remplie,

$$(196)\quad \lim_{w=0} w^{t+t_1+2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\psi(k)}{k^w} = \Gamma(t+t_1+3)\lim_{n=\infty}\frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{(\log n)^{t+t_1+2}} ,$$

et des équations (195), (196) nous obtiendrons

$$(197) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{(\log n)^{t+t_1+2}} = \frac{\Gamma(t+1)\Gamma(t_1+1)}{\Gamma(t+t_1+3)} .$$

IV. Pour $s=-1$, $s_1<s$ on déduit de l'équation (188), après avoir multiplié les deux membres par w^{t+1} ,

$$(198) \quad \Gamma(t+1)\left\{\frac{\Gamma(t_1+1)}{(-1-s_1)^{t_1+1}}+K(s_1,t_1)\right\} = \lim_{w=0} w^{t+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^w} .$$

Remplaçons dans le théorème VI

$$b \ , \ c_k$$

par

$$t+1 \ , \ \psi(k) \ ,$$

nous aurons, la condition $b>0$ étant remplie,

$$(199) \quad \lim_{w=0} w^{t+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^w} = \Gamma(t+2) \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{(\log n)^{t+1}} ,$$

et des équations (198) et (199) on tire

$$(200) \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{(\log n)^{t+1}} = \frac{1}{t+1}\left\{\frac{\Gamma(t_1+1)}{(-1-s_1)^{t_1+1}}+K(s_1,t_1)\right\} .$$

Nous résumons les formules (191), (194), (197) et (200) dans le théorème suivant:

Théorème XV. En désignant par s , s_1 , t , t_1 *des quantités réelles, qui satisfont aux conditions*

$$s \geqq -1 \ , \ s_1 \leqq s \ , \ t \geqq 0 \ , \ t_1 \geqq 0 \ ,$$

et en posant

$$\psi(k) = \sum_{dd_1=k} d^s (\log d)^t d_1^{s_1} (\log d_1)^{t_1}$$

et

$$\Psi(n) = \psi(1)+\psi(2)+\psi(3)+\ldots+\psi(n) \ ,$$

nous aurons

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Psi(n)}{n^{s+1}(\log n)^{t+t_1+1}} = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{\Gamma(t+1)\,\Gamma(t_1+1)}{\Gamma(t+t_1+2)} \quad \textit{pour} \quad s > -1 \;,\; s_1 = s \;,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Psi(n)}{n^{s+1}(\log n)^{t}} = \frac{1}{s+1} \left\{ \frac{\Gamma(t_1+1)}{(s-s_1)^{t_1+1}} + K(s_1 - s - 1 \;,\; t_1) \right\} \quad \textit{pour} \quad s > -1 \;,\; s_1 < s \;,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Psi(n)}{(\log n)^{t+t_1+2}} = \frac{\Gamma(t+1)\,\Gamma(t_1+1)}{\Gamma(t+t_1+3)} \quad \textit{pour} \quad s = -1 \;,\; s_1 = -1 \;,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Psi(n)}{(\log n)^{t+1}} = \frac{1}{t+1} \left\{ \frac{\Gamma(t_1+1)}{(-1-s_1)^{t_1+1}} + K(s_1 \;,\; t_1) \right\} \quad \textit{pour} \quad s = -1 \;,\; s_1 < s \;,$$

pourvu que les limites dans les premiers membres soient des quantités finies et déterminées.

Pour la démonstration de ce théorème nous avons employé les théorèmes IV et VI; maintenant nous le démontrerons dans deux cas spéciaux au moyen des théorèmes V et VII; remplaçons pour ce but dans le théorème IX les fonctions

$$g(m) \;,\; f(m) \;,\; f_1(m) \;,\; \Phi(k)$$

par

$$1 \;,\; m^s(\log m)^t \;,\; m^{s_1}(\log m)^{t_1} \;,\; x^k \;.$$

nous aurons

$$(201) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s(\log m)^t \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1}(\log n)^{t_1} x^{mn} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k) x^k \;,$$

en posant

$$(202) \qquad \psi(k) = \sum_{dd_1=k} d^s(\log d)^t d_1^{s_1}(\log d_1)^{t_1} \;.$$

En permutant les quantités s , s_1 et t , t_1 , nous obtiendrons de l'équation (201)

$$(203) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} m^{s_1}(\log m)^{t_1} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s}(\log n)^{t} x^{mn} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k) x^k \;,$$

où la fonction $\psi(k)$ est encore déterminée par la formule (202), car à cause de la relation

$$dd_1 = k$$

cette formule ne changera pas par la permutation susdite. Nous ne considérerons ici que les deux cas suivants.

I. Pour $s > -1$, $s_1 < s$, $t = 0$ on déduit de l'équation (203)

$$(204) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} m^{s_1}(\log m)^{t_1} \frac{(1-x)^{s+1}}{(1-x^m)^{s+1}} (1-x^m)^{s+1} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn}$$

$$= (1-x)^{s+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k) x^k \ .$$

Remplaçons dans l'équation (104)

$$a \ , \ x$$

par

$$s+1 \ , \ x^m \ ,$$

nous aurons

$$(205) \qquad \lim_{x=1} (1-x^m)^{s+1} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} = \Gamma(s+1) \ ,$$

et, par suite, nous obtiendrons de l'équation (204) pour $x = 1$

$$(206) \qquad \Gamma(s+1) \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(\log m)^{t_1}}{m^{s-s_1+1}} = \lim_{x=1} (1-x)^{s+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k) x^k \ .$$

En remplaçant dans le théorème V

$$a \ , \ b \ , \ c_k$$

par

$$s+1 \ , \ 1 \ , \ \psi(k) \ ,$$

nous obtiendrons

$$(207) \quad \lim_{x=1} (1-x)^{s+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k) x^k = \Gamma(s+2) \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(n)}{n^{s+1}} \ ,$$

et des équations (206) et (207) on tire

$$(208)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(n)}{n^{s+1}} = \frac{1}{s+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{(\log m)^{t_1}}{m^{s-s_1+1}} ,$$

et, par suite, d'après l'équation (36)

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\cdots+\psi(n)}{n^{s+1}} = \frac{1}{s+1}\left\{ \frac{\Gamma(t_1+1)}{(s-s_1)^{t_1+1}} + K(s_1-s-1\ ,\ t_1)\right\} ;$$

par là la deuxième formule du théorème précédent est démontrée pour $t=0$.

II. Pour $s=-1$, $s_1<s$ on déduit de l'équation (203)

$$(209)\qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} m^{s_1}(\log m)^{t_1} \left(\frac{\log \frac{1}{1-x^m}}{\log \frac{1}{1-x}}\right)^{t+1} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{1-x^m}\right)^{t+1}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\log n)^t}{n} x^{mn}$$

$$= \frac{1}{\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{t+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k) x^k .$$

En remplaçant dans l'équation (130)

$$a\ ,\ b\ ,\ x$$

par

$$1\ ,\ t+1\ ,\ x^m\ ,$$

nous obtiendrons

$$(210)\qquad \lim_{x=1} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{1-x^m}\right)^{t+1}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(\log n)^t}{n} x^{mn} = \frac{1}{t+1} ,$$

et par suite on déduit de l'équation (209) pour $x=1$

$$(211)\qquad \frac{1}{t+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^{s_1}(\log m)^{t_1} = \lim_{x=1} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{t+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k) x^k .$$

Remplaçons dans le théorème VII

$$a\ ,\ b\ ,\ c_k$$

par

$$1\ ,\ t+1\ ,\ \psi(k)\ ,$$

nous aurons

$$(212)\qquad \lim_{x=1} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^{t+1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \psi(k)\, x^k = \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{(\log n)^{t+1}}\ ,$$

et des équations (211) et (212) nous obtiendrons

$$(213)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{(\log n)^{t+1}} = \frac{1}{t+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^{s_1} (\log m)^{t_1}$$

ou, en y appliquant l'équation (36),

$$\lim_{n=\infty} \frac{\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)}{(\log n)^{t+1}} = \frac{1}{t+1} \left\{ \frac{\Gamma(t_1+1)}{(-1-s_1)^{t_1+1}} + K(s_1\ ,\ t_1) \right\}\ ;$$

par là nous avons retrouvé la quatrième formule du théorème précédent.

§. 6.

DE LA FONCTION $\sum_{dd_1=k} d^s d_1^{s_1}$.

Posons dans le théorème XV

$$t=0\ ,\ t_1=0\ ,$$

on aura

$$(214)\qquad \psi(k) = \sum_{dd_1=k} d^s d_1^{s_1}\ ,$$

et nous obtiendrons les formules

$$(215)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{\Psi(n)}{n^{s+1}\log n} = \frac{1}{s+1} \text{ pour } s>-1\ ,\ s_1=s\ ,$$

$$(216)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\Psi(n)}{n^{s+1}}=\frac{1}{s+1}\left\{K(s_1-s-1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1-s}\right\}\ \text{pour}\ s>-1\ ,\ s_1<s\ ,$$

$$(217)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\Psi(n)}{(\log n)^2}=\frac{1}{2}\ \text{pour}\ s=-1\ ,\ s_1=-1\ ,$$

$$(218)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\Psi(n)}{\log n}=K(s_1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1+1}\ \text{pour}\ s=-1\ ,\ s_1<s\ ,$$

où la fonction $\Psi(n)$ est déterminée par l'équation

$$(219)\qquad \Psi(n)=\psi(1)+\psi(2)+\ldots+\psi(n)\ .$$

Pour la démonstration des formules (215), (216), (217), (218) nous avons supposé, que les limites dans les premiers membres soient des quantités finies et déterminées. Maintenant nous exposerons une autre methode pour l'évaluation de la fonction $\Psi(n)$, et nous trouverons, que les formules ci-dessus sont rigoureusement vraies; nous considérerons aussi le cas, où $s<-1$.

Soient s et s_1 deux quantités réelles, qui satisfont à la condition

$$s>s_1\ ,$$

et posons dans les équations (159), (160), (161)

$$f(m)=m^s\ ,\ f_1(m)=m^{s_1}\ ,$$

nous en obtiendrons

$$(220)\qquad \psi(k)=\sum_{dd_1=k} d^s d_1^{s_1}$$

et

$$(221)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\sum_{h=1}^{h=n}F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right)h^{s_1}\ ,$$

$$(222)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}\left\{F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right)h^{s_1}+F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right)h^{s}\right\}$$

$$-F\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)F_1\left(E(\sqrt{n})\right)\ ,$$

$$(223)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\sum_{h=1}^{h=n}F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right)h^{s}\ ,$$

où les fonctions $F(k)$ et $F_1(k)$ sont déterminées par les équations

$$F(k) = 1^s + 2^s + 3^s + \ldots + k^s \ , \tag{224}$$

$$F_1(k) = 1^{s_1} + 2^{s_1} + 3^{s_1} + \ldots + k^{s_1} \ . \tag{225}$$

Des équations (224) et (28) nous obtiendrons pour toutes les valeurs réelles de s la formule

$$F(k) = \frac{k^{s+1} - 1}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \frac{k^s}{2} + \theta s k^{s-1} \ , \tag{226}$$

d'où l'on tire pour $s = -1$

$$F(k) = \log k + K(-1\ ,\ 0) + \frac{1}{2k} - \frac{\theta}{k^2} \ . \tag{227}$$

Nous évaluerons maintenant les expressions

$$F\Big(E\Big(\frac{n}{l}\Big)\Big) \ , \ F\Big(E\big(\sqrt{n}\big)\Big) \ ,$$

qui se trouvent dans les formules ci-dessus. Par la substitution

$$k = E(x)$$

on tire de l'équation (226) pour $x > 1$

$$F\big(E(x)\big) = \frac{E(x)^{s+1-1}}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \frac{E(x)^s}{2} + \theta s E(x)^{s-1} \ ; \tag{228}$$

mais puisque on a d'après les inégalités (141)

$$E(x) = x - \varrho \ ,$$

où $0 \leqq \varrho < 1$, on obtient de l'équation (228)

$$F\big(E(x)\big) = \frac{x^{s+1}\Big(1 - \frac{\varrho}{x}\Big)^{s+1} - 1}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \frac{x^s}{2}\Big(1 - \frac{\varrho}{x}\Big)^s + \theta s x^{s-1}\Big(1 - \frac{\varrho}{x}\Big)^{s-1} \tag{229}$$

ou, par développement en série suivant les puissances croissantes de $\frac{\varrho}{x}$,

$$F\big(E(x)\big) = \frac{x^{s+1}-1}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \lambda x^{s}\ , \tag{230}$$

où λ est fini pour $x > 1$. De cette équation on tire

$$F\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) = \frac{n^{s+1}-h^{s+1}}{(s+1)h^{s+1}} + K(s\ ,\ 0) + \frac{\lambda n^{s}}{h^{s}} \tag{231}$$

et

$$F\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right) = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} h^{s} = \frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \lambda_1 n^{\frac{s}{2}}\ . \tag{232}$$

En y remplaçant s par s_1 nous aurons des expressions analogues pour

$$F_1\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right)\ ,\ F_1\left(E\left(\sqrt{n}\right)\right)\ .$$

Cela posé, introduisons les expressions ainsi trouvées dans l'équation (222), et désignons dans ce qui va suivre par λ , λ_1 , λ_2 , λ_3 . . . . . des quantités finies pour toutes les valeurs du nombre n, nous aurons la formule

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ \frac{n^{s+1}-h^{s+1}}{(s+1)h^{s-s_1+1}} + K(s\ ,\ 0)h^{s_1} \right. \tag{233}$$

$$\left. + \lambda_2 n^{s} h^{s_1-s} + \frac{n^{s_1+1}-h^{s_1+1}}{(s_1+1)h^{s_1-s+1}} + K(s_1\ ,\ 0)h^{s} + \lambda_3 n^{s_1} h^{s-s_1} \right\}$$

$$- \left\{ \frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \lambda_4 n^{\frac{s}{2}} \right\} \left\{ \frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1} + K(s_1\ ,\ 0) + \lambda_5 n^{\frac{s_1}{2}} \right\}$$

et par suite, en y appliquant la formule (232),

$$(234)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}\left\{\frac{n^{s+1}-h^{s+1}}{(s+1)h^{s-s_1+1}}+\frac{n^{s_1+1}-h^{s_1+1}}{(s_1+1)h^{s_1-s+1}}\right\}$$

$$+K(s,0)\left\{\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1}+K(s_1,0)+\lambda_6 n^{\frac{s_1}{2}}\right\}+K(s_1,0)\left\{\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1}+K(s,0)+\lambda_7 n^{\frac{s}{2}}\right\}$$

$$+\lambda_2 n^s\left\{\frac{n^{\frac{s_1-s+1}{2}}-1}{s_1-s+1}+K(s_1-s,0)+\lambda_8 n^{\frac{s_1-s}{2}}\right\}$$

$$+\lambda_3 n^{s_1}\left\{\frac{n^{\frac{s-s_1+1}{2}}-1}{s-s_1+1}+K(s-s_1,0)+\lambda_9 n^{\frac{s-s_1}{2}}\right\}-\frac{\left(n^{\frac{s+1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{s_1+1}{2}}-1\right)}{(s+1)(s_1+1)}$$

$$-K(s_1,0)\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1}-\lambda_5 n^{\frac{s_1}{2}}\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1}-K(s,0)\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1}-K(s,0)K(s_1,0)$$

$$-\lambda_5 K(s,0)n^{\frac{s_1}{2}}-\lambda_4 n^{\frac{s}{2}}\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1}-\lambda_4 K(s_1,0)n^{\frac{s}{2}}-\lambda_4\lambda_5 n^{\frac{s+s_1}{2}},$$

d'où l'on tire, d'après quelques réductions faciles,

$$(235)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}\left\{\frac{n^{s+1}-h^{s+1}}{(s+1)h^{s-s_1+1}}+\frac{n^{s_1+1}-h^{s_1+1}}{(s_1+1)h^{s_1-s+1}}\right\}$$

$$-\frac{\left(n^{\frac{s+1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{s_1+1}{2}}-1\right)}{(s+1)(s_1+1)}+K(s,0)K(s_1,0)+R(n),$$

où $R(n)$ est une somme de termes, qui sont de mêmes ordres de grandeur par rapport à n, que les quantités

$$n^{\frac{s}{2}},\ n^s,\ n^{\frac{s}{2}}\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1},\ n^{\frac{s_1}{2}}\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1},\ n^s\frac{n^{\frac{s_1-s+1}{2}}-1}{s_1-s+1},\ n^{s_1}\frac{n^{\frac{s-s_1+1}{2}}-1}{s-s_1+1}.$$

Maintenant nous distinguerons les quatre cas suivants.

I. Pour $s \gtrless -1$, $s_1 \gtrless -1$, $s \geqq s_1$ on déduit de l'équation (235)

$$(236)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{n^{s+1}}{s+1} \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} h^{s_1-s-1} - \frac{1}{s+1} \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} h^{s_1}$$

$$+ \frac{n^{s_1+1}}{s_1+1} \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} h^{s-s_1-1} - \frac{1}{s_1+1} \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} h^{s} - \frac{\left(n^{\frac{s+1}{2}}-1\right)\left(n^{\frac{s_1+1}{2}}-1\right)}{(s+1)(s_1+1)}$$

$$+ K(s\ ,\ 0)K(s_1\ ,\ 0) + R(n)\ ,$$

où $R(n)$ est une somme de termes des ordres

$$n^{\frac{s}{2}}\ ,\ n^{s}\ ,\ n^{\frac{s+s_1+1}{2}}\ ,\ n^{s}\,\frac{n^{\frac{s_1-s+1}{2}}-1}{s_1-s+1}\ ,$$

et par suite, à l'aide de l'équation (232),

$$(237)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{n^{s+1}}{s+1}\left\{\frac{n^{\frac{s_1-s}{2}}-1}{s_1-s} + K(s_1-s-1\ ,\ 0) + \lambda_1 n^{\frac{s_1-s-1}{2}}\right\}$$

$$- \frac{1}{s+1}\left\{\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1} + K(s_1\ ,\ 0) + \lambda_2 n^{\frac{s_1}{2}}\right\}$$

$$+ \frac{n^{s_1+1}}{s_1+1}\left\{\frac{n^{\frac{s-s_1}{2}}-1}{s-s_1} + K(s-s_1-1\ ,\ 0) + \lambda_3 n^{\frac{s-s_1-1}{2}}\right\}$$

$$- \frac{1}{s_1+1}\left\{\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \lambda_4 n^{\frac{s}{2}}\right\}$$

$$- \frac{n^{\frac{s+s_1+2}{2}}}{(s+1)(s_1+1)} + \frac{n^{\frac{s+1}{2}}}{(s+1)(s_1+1)} + \frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}}{(s+1)(s_1+1)}$$

$$- \frac{1}{(s+1)(s_1+1)} + K(s\ ,\ 0)K(s_1\ ,\ 0) + R(n)$$

ou, d'après quelques réductions faciles,

$$(238)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\frac{n^{s+1}}{s+1}\left\{K(s_1-s-1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1-s}\right\}$$

$$+\frac{n^{s_1+1}}{s_1+1}\left\{K(s-s_1-1\ ,\ 0)-\frac{1}{s-s_1}\right\}$$

$$+\left(K(s\ ,\ 0)-\frac{1}{s+1}\right)\left(K(s_1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1+1}\right)+R_1(n)\ ,$$

en désignant par $R_1(n)$ une somme de termes des ordres

$$n^{\frac{s}{2}}\ ,\ n^s\ ,\ n^{\frac{s+s_1+1}{2}}\ ,\ n^s\,\frac{n^{\frac{s_1-s+1}{2}}-1}{s_1-s+1}\ .$$

II. Pour $s>-1$, $s_1=-1$ on obtiendra de l'équation (235)

$$(239)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\frac{n^{s+1}}{s+1}\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}h^{-s-2}-\frac{1}{s+1}\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}\frac{1}{h}+\log n\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}h^s$$

$$-\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}h^s\log h-\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1}\ .\ \frac{\log n}{2}+K(s\ ,\ 0)\,K(-1\ ,\ 0)+R(n)\ ,$$

où $R(n)$ est une somme de termes des ordres

$$n^s\ ,\ n^{\frac{s}{2}}\log n\ .$$

En posant dans l'équation (31)

$$a=s\ ,\ k=E(\sqrt{n})\ ,$$

nous aurons

$$(240)\quad \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}h^s\log h=\frac{n^{\frac{s+1}{2}}\log n}{2(s+1)}-\frac{n^{\frac{s+1}{2}}}{(s+1)^2}+\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$+K(s\ ,\ 1)+\lambda n^{\frac{s}{2}}\log n\ ,$$

où λ est fini pour toutes les valeurs du nombre n, et des équations (239) (232), (240) on tire

$$(241)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k) = \frac{n^{s+1}}{s+1}\left\{\frac{n^{\frac{-s-1}{2}}-1}{-s-1} + K(-s-2\ ,\ 0) + \lambda_1 n^{-\frac{s+2}{2}}\right\}$$

$$-\frac{1}{s+1}\left\{\frac{1}{2}\log n + K(-1\ ,\ 0) + \lambda_2 n^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$+\log n\left\{\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1} + K(s\ ,\ 0) + \lambda_3 n^{\frac{s}{2}}\right\}$$

$$-\frac{n^{\frac{s+1}{2}}\log n}{2(s+1)} + \frac{n^{\frac{s+1}{2}}}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2} - K(s\ ,\ 1) - \lambda n^{\frac{s}{2}}\log n$$

$$-\frac{n^{\frac{s+1}{2}}-1}{s+1}\cdot\frac{\log n}{2} + K(s\ ,\ 0)\,K(-1\ ,\ 0) + R(n)\ ,$$

ou, d'après quelques réductions faciles,

$$(242)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k) = \frac{n^{s+1}}{s+1}\left\{K(-s-2\ ,\ 0) + \frac{1}{s+1}\right\}$$

$$+\{\log n + K(-1\ ,\ 0)\}\left\{K(s\ ,\ 0) - \frac{1}{s+1}\right\} - K(s\ ,\ 1) - \frac{1}{(s+1)^2} + R_1(n)\ ,$$

où $R_1(n)$ désigne une somme de termes des ordres

$$n^s\ ,\ n^{\frac{s}{2}}\log n\ .$$

III. Pour $s=-1$, $s_1<-1$ on déduit de l'équation (235)

$$(243)\quad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k) = \log n\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}h^{s_1} - \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}h^{s_1}\log h + \frac{n^{s_1+1}}{s_1+1}\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}h^{-s_1-2}$$

$$-\frac{1}{s_1+1}\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}\frac{1}{h} - \frac{\log n}{2}\,\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1} + K(-1\ ,\ 0)\,K(s_1\ ,\ 0) + R(n)\ ,$$

ou $R(n)$ est une quantité du même ordre que

$$n^{-\frac{1}{2}}\ .$$

Au moyen des formules (232) et (240) on tire de l'équation (243)

$$(244)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\log n\left\{\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1}+K(s_1\ ,\ 0)+\lambda_1 n^{\frac{s_1}{2}}\right\}$$

$$-\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}\log n}{2(s_1+1)}+\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}}{(s_1+1)^2}-\frac{1}{(s_1+1)^2}-K(s_1\ ,\ 1)-\lambda_2 n^{\frac{s_1}{2}}\log n$$

$$+\frac{n^{s_1+1}}{s_1+1}\left\{\frac{n^{-\frac{s_1+1}{2}}-1}{-s_1-1}+K(-s_1-2\ ,\ 0)+\lambda_3 n^{-\frac{s_1+2}{2}}\right\}$$

$$-\frac{1}{s_1+1}\left\{\frac{1}{2}\log n+K(-1\ ,\ 0)+\lambda_4 n^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$-\frac{\log n}{2}\,\frac{n^{\frac{s_1+1}{2}}-1}{s_1+1}+K(-1\ ,\ 0)\,K(s_1\ ,\ 0)+R(n)\ ,$$

d'où l'on tire

$$(245)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=\{\log n+K(-1\ ,\ 0)\}\left\{K(s_1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1+1}\right\}$$

$$+\frac{n^{s_1+1}}{s_1+1}\left\{K(-s_1-2\ ,\ 0)+\frac{1}{s_1+1}\right\}-K(s_1\ ,\ 1)-\frac{1}{(s_1+1)^2}+R_1(n)\ ,$$

où $R_1(n)$ est du même ordre que

$$n^{-\frac{1}{2}}\ .$$

IV. Pour $s=-1$, $s_1=-1$ on obtient de l'équation (235)

$$(246)\qquad \sum_{k=1}^{k=n}\psi(k)=2\sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})}\frac{\log n-\log h}{h}-\frac{(\log n)^2}{4}+K(-1\ ,\ 0)^2+R(n)\ ,$$

où l'on désigne par $R(n)$ une quantité du même ordre que

$$n^{-\frac{1}{2}}\log n\ .$$

De l'équation (240) on tire pour $s = -1$

$$(247) \qquad \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \frac{\log h}{h} = \frac{(\log n)^2}{8} + K(-1\ ,\ 1) + \lambda n^{-\frac{1}{2}} \log n\ ,$$

et des équations (246), (232), (247) nous obtiendrons

$$(248) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = 2 \log n \left\{ \frac{1}{2} \log n + K(-1\ ,\ 0) + \lambda_1 n^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$- 2 \left\{ \frac{(\log n)^2}{8} + K(-1\ ,\ 1) + \lambda n^{-\frac{1}{2}} \log n \right\}$$

$$- \frac{(\log n)^2}{4} + K(-1\ ,\ 0)^2 + R(n)$$

ou, d'après quelques réductions,

$$(249) \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{(\log n)^2}{2} + 2K(-1\ ,\ 0) \log n + K(-1\ ,\ 0)^2 - 2K(-1\ ,\ 1) + R_1(n)\ ,$$

ou $R_1(n)$ est du même ordre que

$$n^{-\frac{1}{2}} \log n\ .$$

Des formules (238), (242), (245), (249) résulte le théorème suivant:

Théorème XVI. En désignant par s *et* s_1 *deux quantités réelles, qui satisfont à la condition*

$$s \geqq s_1\ ,$$

et en posant

$$\psi(k) = \sum_{dd_1 = k} d^s d_1^{s_1}\ ,$$

on aura pour $s \gtrless -1\ ,\ s_1 \gtrless -1$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{n^{s+1}}{s+1} \left\{ K(s_1 - s - 1\ ,\ 0) - \frac{1}{s_1 - s} \right\} + \frac{n^{s_1+1}}{s_1+1} \left\{ K(s - s_1 - 1\ ,\ 0) - \frac{1}{s - s_1} \right\}$$

$$+ \left\{ K(s\ ,\ 0) - \frac{1}{s+1} \right\} \left\{ K(s_1\ ,\ 0) - \frac{1}{s_1+1} \right\} + \lambda_1 n^s + \lambda_2 n^{\frac{s}{2}} + \lambda_3 n^{\frac{s+s_1+1}{2}} + \lambda_4 n^s \frac{n^{\frac{s_1-s+1}{2}} - 1}{s_1 - s + 1}\ ,$$

pour $s > -1$, $s_1 = -1$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{n^{s+1}}{s+1}\left\{K(-s-2\ ,\ 0) + \frac{1}{s+1}\right\}$$

$$+\left\{\log n + K(-1\ ,\ 0)\right\}\left\{K(s\ ,\ 0) - \frac{1}{s+1}\right\} - K(s\ ,\ 1)$$

$$-\frac{1}{(s+1)^2} + \lambda_1 n^s + \lambda_2 n^{\frac{s}{2}} \log n\ ,$$

pour $s = -1$, $s_1 < -1$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \left\{\log n + K(-1\ ,\ 0)\right\}\left\{K(s_1\ ,\ 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\}$$

$$+\frac{n^{s_1+1}}{s_1+1}\left\{K(-s_1-2\ ,\ 0) + \frac{1}{s_1+1}\right\} - K(s_1\ ,\ 1) - \frac{1}{(s_1+1)^2} + \lambda_1 n^{-\frac{1}{2}}$$

et pour $s = -1$, $s_1 = -1$

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{(\log n)^2}{2} + 2K(-1\ ,\ 0)\log n + K(-1\ ,\ 0)^2 - 2K(-1\ ,\ 1)$$

$$+\lambda_1 n^{-\frac{1}{2}} \log n\ ,$$

où λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 *sont des quantités finies pour toutes les valeurs du nombre* n.

Remarque. Pour $s = s_1$ la première de ces formules peut se mettre sous la forme

$$(250) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{n^{s+1}\log n}{s+1} + \frac{n^{s+1}}{s+1}\left(2K(-1\ ,\ 0) - \frac{1}{s+1}\right)$$

$$+\left(K(s\ ,\ 0) - \frac{1}{s+1}\right)^2 + \lambda_1 n^{\frac{s}{2}} + \lambda_2 n^{s+\frac{1}{2}}\ .$$

§. 7.

DE LA SÉRIE $\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} m^s n^{s_1} x^{mn}$.

Soient x , s , s_1 des quantités réelles, et $s \geqq s_1$, la série

$$\sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} m^s n^{s_1} x^{mn}$$

est évidemment convergente pour $-1 < x < 1$, mais divergente pour $x^2 > 1$. Nous évaluerons, dans ce qui va suivre, la somme de cette série pour les valeurs de x, qui diffèrent très peu de l'unité, et pour ce but nous nous servirons du théorème XVI.

Posons dans le théorème X

$$g(m) = 1 \ , \ f(m) = m^s \ , \ f_1(m) = m^{s_1} \ , \ \Phi(k) = x^k \ ,$$

nous aurons pour $-1 < x < 1$ la formule

$$(251) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = (1-x) \sum_{k=1}^{k=\infty} \Psi(k) x^k \ ,$$

où la fonction $\Psi(k)$ est déterminée par les équations

$$\Psi(k) = \psi(1) + \psi(2) + \cdots + \psi(k) \ , \ \psi(k) = \sum_{dd_1 = k} d^s d_1^{s_1} \ .$$

Nous distinguerons encore les quatre cas suivants:

I. Pour $s \gtrless -1$, $s_1 \gtrless -1$, $s \geqq s_1$ nous obtiendrons du théorème XVI et de l'équation (251), en supposant d'abord que $s > s_1$,

$$(252) \quad \frac{1}{1-x} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = \frac{1}{s+1}\left\{K(s_1 - s - 1 \ , \ 0) - \frac{1}{s_1 - s}\right\} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1} x^k$$

$$+ \frac{1}{s_1+1}\left\{K(s - s_1 - 1 \ , \ 0) - \frac{1}{s - s_1}\right\} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s_1+1} x^k$$

$$+ \left\{K(s \ , \ 0) - \frac{1}{s+1}\right\}\left\{K(s_1 \ , \ 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\} \frac{x}{1-x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k \ ,$$

où

$$(253)\quad R(k) = \lambda_1 k^s + \lambda_2 k^{\frac{s}{2}} + \lambda_3 k^{\frac{s+s_1+1}{2}} + \lambda_4 k^s \frac{k^{\frac{s_1-s+1}{2}} - 1}{s_1 - s + 1} .$$

Dans le cas, où $s = s_1$, on déduit des équations (250) et (251)

$$(254)\quad \frac{1}{1-x} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} = \frac{1}{s+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1} \log k\, x^k$$

$$+ \frac{1}{s+1} \left\{ 2K(-1, 0) - \frac{1}{s+1} \right\} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1} x^k$$

$$+ \left\{ K(s, 0) - \frac{1}{s+1} \right\}^2 \frac{x}{1-x} + \sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k ,$$

où

$$(255)\quad R(k) = \lambda_1 k^{\frac{s}{2}} + \lambda_2 k^{s+\frac{1}{2}} .$$

1) Pour $s < -2$ on obtiendra de l'équation (253), en supposant que $s > s_1$,

$$R(k) = \lambda k^{\frac{s}{2}}$$

et, par suite,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k = \lambda_1 \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}} x^k ,$$

d'où l'on conclura, que la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k$$

est convergente pour $x = 1$. De même les deux autres séries dans le second membre de l'équation (252) sont convergentes, et nous en obtiendrons

$$(256)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = \left\{ K(s, 0) - \frac{1}{s+1} \right\} \left\{ K(s_1, 0) - \frac{1}{s_1+1} \right\} + \lambda(1-x) .$$

Si l'on a $s = s_1$, on obtiendra des équations (254) et (255) de la même manière

$$(257)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} = \left\{K(s\ ,\ 0) - \frac{1}{s+1}\right\}^2 + \lambda(1-x)\ .$$

2) Pour $s = -2$ on déduit de l'équation (253), en supposant que $s > s_1$,

$$R(k) = \frac{\lambda}{k}\ ,$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} R(k)\, x^k = \lambda_1 \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k} = \lambda_1 \log \frac{1}{1-x}\ ;$$

puisque on a, d'après l'équation (38),

$$K(-2\ ,\ 0) = \frac{\pi^2}{6} - 1\ ,$$

on obtiendra de l'équation (252)

$$(258)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = \frac{\pi^2}{6}\left\{K(s_1\ ,\ 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\} + \lambda(1-x)\log\frac{1}{1-x}\ .$$

Dans le cas, où $s = s_1 = -2$, on tire de l'équation (255)

$$R(k) = \frac{\lambda}{k}\ ,\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} R(k)\, x^k = \lambda_1 \log \frac{1}{1-x}$$

et, par suite, nous obtiendrons de l'équation (254)

$$\frac{1}{1-x} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{mn}}{n^2} = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log k}{k} x^k + \frac{\pi^4}{36} \frac{x}{1-x} + \lambda_2 \log \frac{1}{1-x}\ .$$

D'après l'équation (130) on a

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log k}{k} x^k = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2\ ,$$

où $\varepsilon = 0$ pour $x = 1$, et par conséquent on tire de l'équation précédente

$$(259) \qquad \lim_{x=1} \frac{\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{mn}}{n^2} - \frac{\pi^4}{36}}{(1-x)\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2} = -\frac{1}{2} .$$

3) Pour $s > -2$ on déduit de l'équation (252), en supposant d'abord que $s > s_1$,

$$(260) \qquad (1-x)^{s+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn}$$

$$= \frac{1}{s+1}\left\{K(s_1 - s - 1 , 0) - \frac{1}{s_1 - s}\right\}(1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1} x^k$$

$$+ \frac{1}{s_1+1}\left\{K(s - s_1 - 1 , 0) - \frac{1}{s - s_1}\right\}(1-x)^{s-s_1}(1-x)^{s_1+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s_1+1} x^k$$

$$+ \left\{K(s , 0) - \frac{1}{s+1}\right\}\left\{K(s_1 , 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\} x(1-x)^{s+1} + (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k .$$

De l'équation (104) on tire

$$(1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1} x^k = \Gamma(s+2) + \varepsilon_1 ,$$

$$(1-x)^{s_1+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s_1+1} x^k = \Gamma(s_1+2) + \varepsilon_2 \text{ pour } s_1 > -2 ,$$

$$= \log \frac{1}{1-x} \text{ pour } s_1 = -2 ,$$

$$= \lambda(1-x)^{s_1+2} \text{ pour } s_1 < -2 ,$$

où $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 0$ pour $x = 1$, et où λ est une quantité finie pour $x \leqq 1$, et, par conséquent, nous obtiendrons de l'équation (260)

$$(261) \quad (1-x)^{s+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = \Gamma(s+1)\left\{K(s_1 - s - 1 , 0) - \frac{1}{s_1 - s}\right\}$$

$$+ \left\{K(s , 0) - \frac{1}{s+1}\right\}\left\{K(s_1 , 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\}(1-x)^{s+1} + (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k + \varepsilon ,$$

où $\varepsilon = 0$ pour $x = 1$. Puisque on a d'après l'équation (253)

$$R(k) = \lambda_1 k^s + \lambda_2 k^{\frac{s}{2}} + \lambda_3 k^{\frac{s+s_1+1}{2}} ,$$

supposé que l'on y ajoute le terme

$$\lambda_4 k^s \log k$$

dans le cas, où $s = s_1 + 1$, on aura

$$(1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k = \lambda_1 (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^s x^k + \lambda_2 (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}} x^k$$

$$+ \lambda_3 (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s+s_1+1}{2}} x^k ,$$

en ayant soin, que l'on y ajoute la quantité

$$\lambda_4 (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^s \log k \,.\, x^k ,$$

si l'on a $s = s_1 + 1$; mais, puisque on a

$$\log k < k^{\frac{1}{2}} ,$$

cette quantité peut être mise sous la forme

$$\lambda_5 (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+\frac{1}{2}} x^k .$$

Au moyen de l'équation (104) on déduit de ce qui précède

$$\lim_{x=1} (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} R(k) x^k = 0 ,$$

et, par suite, nous obtiendrons de l'équation (261)

$$(262) \quad \lim_{x=1} (1-x)^{s+1} \left\{ \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} - \left(K(s,0) - \frac{1}{s+1} \right) \left(K(s_1,0) - \frac{1}{s_1+1} \right) \right\}$$

$$= \Gamma(s+1) \left\{ K(s_1 - s - 1, 0) - \frac{1}{s_1 - s} \right\} .$$

Pour $s = s_1$ on déduit des équations (254) et (255)

$$(263)\qquad \frac{1}{1-x}\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} = \frac{1}{s+1}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1}\log k \,.\, x^k$$

$$+\frac{1}{s+1}\left\{2K(-1\,,\,0) - \frac{1}{s+1}\right\}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1}x^k$$

$$+\left\{K(s\,,\,0) - \frac{1}{s+1}\right\}^2 \frac{x}{1-x} + \lambda_1 \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}} x^k + \lambda_2 \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+\frac{1}{2}} x^k \,.$$

Posons dans le théorème I

$$f(z) = z^{s+1}\log z \,.\, x^z \,,$$

nous aurons

$$(264)\qquad \sum_{k=1}^{k=h} k^{s+1}\log k \,.\, x^k = \int_1^h z^{s+1}\log z \,.\, x^z dz + H(s\,,\,x) + \frac{h^{s+1}\log h \,.\, x^h}{2}$$

$$+\theta\left\{h^{s+1}\log h \,.\, x^h \log x + h^s x^h + (s+1)h^s \log h \,.\, x^h\right\} \,,$$

où l'on désigne par $H(s\,,\,x)$ une quantité, qui ne dépend pas de h, et qui est finie pour $0 \leqq x \leqq 1$. De même on aura

$$(265)\qquad \sum_{k=1}^{k=h} k^{s+1}x^k = \int_1^h z^{s+1}x^z dz + H_1(s\,,\,x) + \frac{h^{s+1}x^h}{2}$$

$$+\theta\left\{h^{s+1}x^h \log x + (s+1)h^s x^h\right\} \,.$$

Pour $h = \infty$ on déduit de ces deux formules

$$(266)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1}\log k \,.\, x^k = \int_1^\infty z^{s+1}\log z \,.\, x^z dz + H(s\,,\,x)$$

et

$$(267)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1}x^k = \int_1^\infty z^{s+1}x^z dz + H_1(s\,,\,x) \,,$$

et des équations (263), (266), (267) on obtiendra

$$(268)\quad \frac{1}{1-x}\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} = \frac{1}{s+1}\int_1^\infty z^{s+1}\log z\,.\,x^z\,dz + \frac{H(s,x)}{s+1}$$

$$+\frac{1}{s+1}\left\{2K(-1,0)-\frac{1}{s+1}\right\}\int_1^\infty z^{s+1}x^z\,dz+\left\{2K(-1,0)-\frac{1}{s+1}\right\}\frac{H_1(s,x)}{s+1}$$

$$+\left\{K(s,0)-\frac{1}{s+1}\right\}^2\frac{x}{1-x}+\lambda_1\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{\frac{s}{2}}x^k+\lambda_2\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{s+\frac{1}{2}}x^k\ .$$

Posons dans la première intégrale du second membre

$$z=-\frac{y}{\log x}\ ,$$

nous aurons

$$(269)\int_1^\infty z^{s+1}\log z\,.\,x^z\,dz=\frac{1}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\int_0^\infty e^{-y}y^{s+1}\log y\,dy-\int_0^{-\log x}e^{-y}y^{s+1}\log y\,dy\right\}$$

$$-\frac{\log\log\frac{1}{x}}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\int_0^\infty e^{-y}y^{s+1}\,dy-\int_0^{-\log x}e^{-y}y^{s+1}\,dy\right\}\ ,$$

et par suite, en désignant par ϱ et ϱ des fractions propres,

$$(270)\quad \int_1^\infty z^{s+1}\log z\,.\,x^z\,dz=\frac{1}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\Gamma(s+2)-\varrho\int_0^{-\log x}y^{s+1}\log y\,dy\right\}$$

$$-\frac{\log\log\frac{1}{x}}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\Gamma(s+2)-\varrho_1\int_0^{-\log x}y^{s+1}\,dy\right\}\ ,$$

d'où

$$\int_1^\infty z^{s+1}\log z\,.\,x^z\,dz=\frac{1}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\Gamma(s+2)-\varrho\,\frac{(-\log x)^{s+2}\log\log\frac{1}{x}}{s+2}+\varrho\,\frac{(-\log x)^{s+2}}{(s+2)^2}\right\}$$

$$-\frac{\log\log\frac{1}{x}}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\Gamma(s+2)-\varrho_1\,\frac{(-\log x)^{s+2}}{s+2}\right\}$$

et, par conséquent,

$$(271)\qquad \int_1^\infty z^{s+1}\log z\,.\,x^z\,dz = -\frac{\Gamma'(s+2)\log\log\frac{1}{x}}{(-\log x)^{s+2}} + \frac{\Gamma''(s+2)}{(-\log x)^{s+2}} + \lambda_3\log\log\frac{1}{x}\,.$$

En transformant la seconde intégrale dans l'équation (268) par la même substitution, nous obtiendrons

$$(272)\qquad \int_1^\infty z^{s+1}x^z\,dz = \frac{1}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\int_0^\infty e^{-y}y^{s+1}\,dy - \int_0^{-\log x} e^{-y}y^{s+1}\,dy\right\}$$

$$= \frac{1}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\Gamma(s+2) - \lambda_4 - \frac{(-\log x)^{s+2}}{s+2}\right\}$$

et, par suite,

$$(273)\qquad \int_1^\infty z^{s+1}x^z\,dz = \frac{\Gamma'(s+2)}{(-\log x)^{s+2}} + \lambda_5\ ,$$

et des équations (268), (271), (273) on tire

$$(274)\qquad \frac{1}{1-x}\left\{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} - \left(K(s\,,0) - \frac{1}{s+1}\right)^2\right\}$$

$$= -\frac{\Gamma(s+1)\log\log\frac{1}{x}}{(-\log x)^{s+2}} + \frac{1}{(-\log x)^{s+2}}\left\{\frac{\Gamma''(s+2)}{s+1} + \Gamma(s+1)\left(2K(-1\,,0) - \frac{1}{s+1}\right)\right\}$$

$$+ \lambda\log\log\frac{1}{x} + \lambda_1\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}}x^k + \lambda_2\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+\frac{1}{2}}x^k\ .$$

En remarquant que

$$\Gamma'(s+2) = \Gamma(s+1) + (s+1)\,\Gamma'(s+1)\ ,$$

et en employant les formules

$$-\log x = -\log\left(1-(1-x)\right) = 1-x+\theta_1(1-x)^2 = (1-x)\left\{1+\theta_1(1-x)\right\}\ ,$$

$$\log\log\frac{1}{x} = \log(1-x) + \log\left\{1+\theta_1(1-x)\right\} = \log(1-x) + \theta_2(1-x)\ ,$$

où θ_1 et θ_2 désignent des quantités finies, nous obtiendrons de l'équation (274)

$$(275)\qquad (1-x)^{s+1}\left\{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} - \left(K(s\,,0) - \frac{1}{s+1}\right)^2\right\}$$

$$= -\Gamma(s+1)\frac{\log(1-x)+\theta_2(1-x)}{\{1+\theta_1(1-x)\}^{s+2}} + \frac{1}{\{1+\theta_1(1-x)\}^{s+2}}\{\Gamma'(s+1)+2K(-1,0)\Gamma(s+1)\}$$

$$+\lambda(1-x)^{s+2}\{\log(1-x)+\theta_2(1-x)\}+\lambda_1(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}}x^k$$

$$+\lambda_2(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+\frac{1}{2}}x^k\ .$$

De l'équation (104) on tire

$$(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}}x^k = (1-x)^{\frac{s}{2}+1}\left\{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)+\varepsilon_1\right\}\ ,$$

$$(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+\frac{1}{2}}x^k = (1-x)^{\frac{1}{2}}\left\{\Gamma\left(s+\frac{3}{2}\right)+\varepsilon_2\right\} \text{ pour } s>-\frac{3}{2}\ ,$$

$$= (1-x)^{\frac{1}{2}}\log\frac{1}{1-x} \text{ pour } s=-\frac{3}{2}\ .$$

$$= \lambda_3(1-x)^{s+2} \text{ pour } s<-\frac{3}{2}\ ,$$

où $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$ pour $x=1$, et où l'on désigne par λ_3 une quantité, qui est finie pour $x\leq 1$, et par conséquent nous obtiendrons de l'équation (275) pour $x=1$

$$(276)\ \lim_{x=1}\left[(1-x)^{s+1}\left\{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s\sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} - \left(K(s\,,0)-\frac{1}{s+1}\right)^2\right\}+\Gamma(s+1)\log(1-x)\right]$$

$$= \Gamma'(s+1)+2K(-1\ ,\ 0)\,\Gamma(s+1)\ .$$

Des formules (256), (257), (258), (259), (262), (276) résulte le théorème suivant:

Théorème XVII. Si l'on désigne par x , s , s_1 *des quantités réelles, qui satisfont aux conditions*

$$-1<x<1\ ,\ s\geqq s_1\ ,\ s\gtrless -1\ ,\ s_1\gtrless -1\ ,$$

on aura pour $s<-2$, $s_1\leqq s$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = \left\{K(s\ ,\ 0)-\frac{1}{s+1}\right\}\left\{K(s_1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1+1}\right\}+\lambda(1-x)$$

et pour $s=-2$, $s_1<s$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = \frac{\pi^2}{6}\left\{K(s_1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1+1}\right\}+\lambda_1(1-x)\log(1-x)\ ,$$

où λ *et* λ_1 *désignent des quantités, qui sont finies pour* $x\leqq 1$; *pour* $s=s_1=-2$ *on aura*

$$\lim_{x=1}\frac{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn}-\frac{\pi^4}{36}}{(1-x)\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2}=-\frac{1}{2}\ ,$$

pour $s>-2$, $s_1<s$

$$\lim_{x=1}(1-x)^{s+1}\left\{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn}-\left(K(s\ ,\ 0)-\frac{1}{s+1}\right)\left(K(s_1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1+1}\right)\right\}$$

$$=\Gamma(s+1)\left\{K(s_1-s-1\ ,\ 0)-\frac{1}{s_1-s}\right\}$$

et pour $s>-2$, $s_1=s$

$$\lim_{x=1}\left[(1-x)^{s+1}\left\{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn}-\left(K(s\ ,\ 0)-\frac{1}{s+1}\right)^2\right\}+\Gamma(s+1)\log(1-x)\right]$$

$$=\Gamma'(s+1)+2K(-1\ ,\ 0)\,\Gamma(s+1)\ ,$$

Nous considérerons maintenant les cas, où l'une des quantités s , s_1 est égale à -1 .

II. Pour $s > -1$, $s_1 = -1$ on déduit de l'équation (251) et du théorème XVI

$$(277)\ \frac{1}{1-x}\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{mn}}{n} = \frac{1}{s+1}\left\{K(-s-2\,,0)+\frac{1}{s+1}\right\}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1}x^k$$

$$+\left\{K(s\,,0)-\frac{1}{s+1}\right\}\sum_{k=1}^{k=\infty}\log k\,.\,x^k + K(-1\,,0)\left\{K(s\,,0)-\frac{1}{s+1}\right\}\sum_{k=1}^{k=\infty} x^k$$

$$-\left\{K(s\,,1)+\frac{1}{(s+1)^2}\right\}\sum_{k=1}^{k=\infty} x^k + \lambda_1\sum_{k=1}^{k=\infty} k^s x^k + \lambda_2\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}}\log k\,.\,x^k\ ,$$

d'où l'on tire

$$(278)\ (1-x)^{s+1}\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{mn}}{n} = \frac{1}{s+1}\left\{K(-s-2\,,0)+\frac{1}{s+1}\right\}(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s+1}x^k$$

$$+\left\{K(s\,,0)-\frac{1}{s+1}\right\}(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\log k\,.\,x^k + K(-1\,,0)\left\{K(s\,,0)-\frac{1}{s+1}\right\}x(1-x)^{s+1}$$

$$-\left\{K(s\,,1)+\frac{1}{(s+1)^2}\right\}x(1-x)^{s+1} + \lambda_1(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^s x^k$$

$$+\lambda_2(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}}\log k\,.\,x^k\ .$$

Mais de l'inégalité

$$s+1 > 0$$

on peut conclure, qu'il est possible de déterminer une quantité p ainsi, que

$$0 < p < s+1\ ;$$

et par suite on aura, pour les valeurs de k suffisamment grandes,

$$\log k < k^p\ ,$$

et de l'équation (104) on tire

$$\lim_{x=1}(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\log k\,.\,x^k < \lim_{x=1}(1-x)^{s+2}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^p x^k$$

$$= \lim_{x=1}(1-x)^{s+1-p}(1-x)^{p+1}\sum_{k=1}^{k=\infty} k^p x^k = 0\ .$$

De même on peut déterminer une quantité p_1 ainsi, que

$$0 < p_1 < \frac{s}{2} + 1 ,$$

d'où

$$\lim_{x=1} (1-x)^{s+2} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}} \log k \,.\, x^k < \lim_{x=1} (1-x)^{\frac{s}{2}-p_1+1} (1-x)^{\frac{s}{2}+p_1+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{\frac{s}{2}+p_1} x^k = 0 ,$$

et, par conséquent, on obtiendra de l'équation (278), en y appliquant de nouveau l'équation (104),

$$(279) \quad \lim_{x=1} (1-x)^{s+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{mn}}{n} = \Gamma(s+1) \left\{ K(-s-2\,,\,0) + \frac{1}{s+1} \right\} .$$

III. Pour $s = -1$, $s_1 < -1$ on déduit de l'équation (251) et du théorème XVI

$$(280) \quad \frac{1}{1-x} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1} x^{mn} = \left\{ K(s_1\,,\,0) - \frac{1}{s_1+1} \right\} \sum_{k=1}^{k=\infty} \{ \log k + K(-1\,,\,0) \} x^k$$

$$+ \frac{1}{s_1+1} \left\{ K(-s_1-2\,,\,0) + \frac{1}{s_1+1} \right\} \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s_1+1} x^k$$

$$- \left\{ K(s_1\,,\,1) + \frac{1}{(s_1+1)^2} \right\} \frac{x}{1-x} + \lambda \sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-\frac{1}{2}} x^k .$$

Des équations

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots ,$$

$$\log \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

on obtient, par multiplication,

$$\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} \right) x^k$$

et, par conséquent, au moyen de l'équation (29)

$$\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\log k + K(-1\,,\,0) + \frac{1}{2k} - \frac{\theta}{k^2} \right) x^k ,$$

d'où

$$(281)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\big(\log k + K(-1\ ,\ 0)\big)x^k = \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-x} + \lambda$$

ou

$$(282)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\log k\,.\,x^k = \frac{1}{1-x}\log\frac{1}{1-x} - K(-1\ ,\ 0)\frac{x}{1-x} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-x} + \lambda\ ,$$

où λ est fini pour $-1 < x \leqq 1$. Des équations (280) et (281) on tire

$$(283)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1}x^{mn} = \left\{K(s_1\ ,\ 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\}\log\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\left\{K(s_1\ ,\ 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\}(1-x)\log\frac{1}{1-x} + \lambda_1(1-x) + \frac{1}{s_1+1}\left\{K(-s_1-2\ ,\ 0) + \frac{1}{s_1+1}\right\}(1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{s_1+1}x^k - \left\{K(s_1\ ,\ 1) + \frac{1}{(s_1+1)^2}\right\}x + \lambda(1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{-\frac{1}{2}}x^k$$

ou, d'après l'équation (104),

$$(284)\quad \sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1}x^{mn} = \left\{K(s_1\ ,\ 0) - \frac{1}{s_1+1}\right\}\log\frac{1}{1-x} + \frac{1}{s_1+1}\left\{K(-s_1-2\ ,\ 0) + \frac{1}{s_1+1}\right\}(1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{s_1+1}x^k - \left\{K(s_1\ ,\ 1) + \frac{1}{(s_1+1)^2}\right\}x + \lambda_1(1-x)^{\frac{1}{2}}\ .$$

En employant de nouveau l'équation (104), nous aurons

$$(285)\quad (1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{s_1+1}x^k = (1-x)^{-s_1-1}\{\Gamma(s_1+2)+\varepsilon\}\ \text{pour}\ s_1 > -2\ ,$$

$$= (1-x)\log\frac{1}{1-x}\ \text{pour}\ s_1 = -2\ ,$$

$$= \lambda_2(1-x)\ \text{pour}\ s_1 < -2\ ,$$

où $\varepsilon = 0$ pour $x = 1$, et où λ_2 désigne une quantité finie. La quantité s_1 étant plus petite que -1, on a dans tous ces cas

$$\lim_{x=1}(1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{s_1+1}x^k = 0 ,$$

et, par suite, on obtiendra de l'équation (284) pour $x = 1$

$$(286)\quad \lim_{x=1}\left\{\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1}x^{mn} - \left(K(s_1, 0) - \frac{1}{s_1+1}\right)\log\frac{1}{1-x}\right\}$$

$$= -K(s_1, 1) - \frac{1}{(s_1+1)^2} .$$

IV. Pour $s = s_1 = -1$ on obtiendra de l'équation (251) et du théorème XVI

$$(287)\quad \frac{1}{1-x}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{mn}}{n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}(\log k)^2x^k + 2K(-1, 0)\sum_{k=1}^{k=\infty}\log k . x^k$$

$$+\left\{K(-1, 0)^2 - 2K(-1, 1)\right\}\frac{x}{1-x} + \lambda\sum_{k=1}^{k=\infty}k^{-\frac{1}{2}}\log k . x^k .$$

En posant

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}(\log k)^2x^k ,$$

on aura

$$(1-x)S = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\left(\log(k+1)\right)^2 - (\log k)^2\right\}x^{k+1} ;$$

mais d'après la formule de Taylor on a

$$\frac{\left(\log(k+1)\right)^2 - (\log k)^2}{2} = \frac{\log k}{k} + \frac{\lambda\log k}{k^2} ,$$

où λ est une quantité finie, et par suite on obtiendra

$$(1-x)S = x\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\log k}{k}x^k + \lambda_1 ,$$

où la quantité λ_1 est finie pour $x \leq 1$. Puisque on a d'après l'équation (130)

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log k}{k} x^k = \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2 ,$$

où $\varepsilon = 0$ pour $x = 1$, on obtiendra de ce qui précède

$$(288) \qquad \frac{1-x}{2} \sum_{k=1}^{k=\infty} (\log k)^2 x^k = x\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2 + \lambda_1 ,$$

et des équations (287), (288), (282) on déduit

$$(289) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{mn}}{n} = x\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2 + \lambda_1$$

$$+ 2K(-1, 0)\left\{\log \frac{1}{1-x} - K(-1, 0)x - \frac{1}{2}(1-x)\log \frac{1}{1-x} + \lambda_2(1-x)\right\}$$

$$+ \left\{K(-1, 0)^2 - 2K(-1, 1)\right\}x + \lambda(1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-\frac{1}{2}} \log k \cdot x^k .$$

En remarquant que

$$\log k < k^{\frac{1}{2}} ,$$

on aura

$$(1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty} k^{-\frac{1}{2}} \log k \cdot x^k < (1-x)\sum_{k=1}^{k=\infty} x^k < 1 ,$$

et, par suite, on obtiendra de l'équation (289)

$$(290) \qquad \lim_{x=1} \frac{\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{mn}}{n}}{\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{2} .$$

Nous résumons les formules (279), (286), (290) dans ce théorème:

Théorème XVIII. En désignant par x , s , s_1 *des quantités réelles, qui satisfont aux inégalités*

$$-1 < x < 1 , \quad s > -1 , \quad s_1 < -1 ,$$

on aura

$$\lim_{x=1}(1-x)^{s+1}\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{mn}}{n} = \Gamma(s+1)\left\{K(-s-2\,,\,0)+\frac{1}{s+1}\right\},$$

$$\lim_{x=1}\left\{\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n=\infty} n^{s_1}x^{mn} - \left(K(s_1\,,\,0)-\frac{1}{s_1+1}\right)\log\frac{1}{1-x}\right\}$$

$$= -K(s_1\,,\,1) - \frac{1}{(s_1+1)^2},$$

$$\lim_{x=1}\frac{\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{mn}}{n}}{\left(\log\frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Considérons maintenant quelques cas spéciaux des deux théorèmes précédents. Supposons d'abord

$$s = s_1 > -1,$$

nous obtiendrons du théorème XVII

$$\lim_{x=1}\left[(1-x)^{s+1}\sum_{m=1}^{m=\infty} m^s \sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} + \Gamma(s+1)\log(1-x)\right] \tag{291}$$

$$= \Gamma'(s+1) + 2K(-1\,,\,0)\Gamma(s+1),$$

et, en y appliquant la formule

$$\log(1-x) = -\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{x^m}{m},$$

nous aurons la proposition suivante:

Si l'on désigne par s *une quantité, soumise à la condition*

$$s > -1,$$

on aura

$$\lim_{x=1}\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[(1-x)^{s+1}m^s\sum_{n=1}^{n=\infty} n^s x^{mn} - \Gamma(s+1)\frac{x^m}{m}\right] = \Gamma'(s+1)+2K(-1\,,\,0)\Gamma(s+1).$$

Dans les cas, où s est un nombre entier positif ou nul, le second membre de cette équation peut se mettre sous la forme

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s \left\{K(-1, 0) + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{s}\right\},$$

et pour $s = 0, 1, 2$ nous en obtiendrons les formules

$$\lim_{x=1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left\{\frac{1-x}{1-x^m} - \frac{1}{m}\right\} x^m = K(-1, 0), \tag{292}$$

$$\lim_{x=1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left\{\frac{m(1-x)^2}{(1-x^m)^2} - \frac{1}{m}\right\} x^m = K(-1, 0) + 1, \tag{293}$$

$$\lim_{x=1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \left\{\frac{m^2(1-x)^3(1+x^m)}{(1-x^m)^3} - \frac{2}{m}\right\} x^m = 2K(-1, 0) + 3. \tag{294}$$

D'après cela nous évaluerons les sommes des séries

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} m^t \log \frac{1}{1-x^m}, \quad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^t x^m}{1-x^m}, \quad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^t x^m}{(1-x^m)^2} \tag{295}$$

pour les valeurs de x, qui diffèrent très peu de l'unité, en désignant par t une quantité réelle quelconque. Quant à la première de ces séries nous obtiendrons immédiatement du théorème XVIII la proposition suivante:

En désignant par t *une quantité réelle, on aura*

$$\lim_{x=1} (1-x)^{t+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^t \log \frac{1}{1-x^m} = \Gamma(t+1)\left\{K(-t-2, 0) + \frac{1}{t+1}\right\} \text{ pour } t > -1,$$

$$\lim_{x=1} \left\{\sum_{m=1}^{m=\infty} m^t \log \frac{1}{1-x^m} - \left(K(t, 0) - \frac{1}{t+1}\right) \log \frac{1}{1-x}\right\}$$

$$= -K(t, 1) - \frac{1}{(t+1)^2} \text{ pour } t < -1$$

et

$$\lim_{x=1} \frac{\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m} \log \frac{1}{1-x^m}}{\left(\log \frac{1}{1-x}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

Le second membre de la première de ces formules est d'après l'équation (36) égal à

$$\Gamma(t+1)\left\{\frac{1}{1^{t+2}}+\frac{1}{2^{t+2}}+\frac{1}{3^{t+2}}+\cdots\right\},$$

et pour $t=0\,,\,2\,,\,4$ nous en trouverons les formules

$$\lim_{x=1}(1-x)\sum_{m=1}^{m=\infty}\log\frac{1}{1-x^m}=\frac{\pi^2}{6}\,, \tag{296}$$

$$\lim_{x=1}(1-x)^3\sum_{m=1}^{m=\infty}m^2\log\frac{1}{1-x^m}=\frac{\pi^4}{45}\,, \tag{297}$$

$$\lim_{x=1}(1-x)^5\sum_{m=1}^{m=\infty}m^4\log\frac{1}{1-x^m}=\frac{8\pi^6}{315} \tag{298}$$

et, en général,

$$\lim_{x=1}(1-x)^{2r-1}\sum_{m=1}^{m=\infty}m^{2r-2}\log\frac{1}{1-x^m}=\frac{2^{2r-2}B_r\pi^{2r}}{r(2r-1)}\,, \tag{299}$$

en désignant par r un nombre entier positif quelconque.

En posant dans le théorème XVII

$$s=t\,,\ s_1=0\,,$$

nous obtiendrons pour $t>0$

$$\lim_{x=1}(1-x)^{t+1}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^t x^m}{1-x^m}=\Gamma'(t+1)\left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\}\,; \tag{300}$$

substituons dans le même théorème

$$s=0\,,\ s_1=t\,,$$

nous aurons pour $t<0$

$$\lim_{x=1}(1-x)\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^t x^m}{1-x^m}=K(t-1\,,\,0)-\frac{1}{t}\,. \tag{301}$$

De ces deux formules et de l'équation (291) résulte la proposition suivante :

En désignant par t *une quantité réelle, on aura*

$$\lim_{x=1}(1-x)^{t+1}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^t x^m}{1-x^m} = \Gamma(t+1)\left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\} \text{ pour } t>0\ ,$$

$$\lim_{x=1}(1-x)\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^t x^m}{1-x^m} = K(t-1\,,\,0)-\frac{1}{t} \text{ pour } t<0$$

et

$$\lim_{x=1}\left\{(1-x)\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{x^m}{1-x^m}+\log(1-x)\right\} = K(-1\,,\,0)\ .$$

En posant le second membre de la première de ces formules sous la forme

$$\Gamma(t+1)\left\{\frac{1}{1^{t+1}}+\frac{1}{2^{t+1}}+\frac{1}{3^{t+1}}+\cdots\right\}\ ,$$

nous en obtiendrons pour $t=1\,,\,3\,,\,5$ les formules

$$\lim_{x=1}(1-x)^2\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m\,x^m}{1-x^m} = \frac{\pi^2}{6}\ , \tag{302}$$

$$\lim_{x=1}(1-x)^4\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^3 x^m}{1-x^m} = \frac{\pi^4}{15}\ , \tag{303}$$

$$\lim_{x=1}(1-x)^6\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^5 x^m}{1-x^m} = \frac{8\pi^6}{63} \tag{304}$$

et, en général,

$$\lim_{x=1}(1-x)^{2r}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^{2r-1}x^m}{1-x^m} = \frac{2^{2r-2}B_r\pi^{2r}}{r}\ , \tag{305}$$

en désignant par r un nombre entier positif quelconque.

Posons dans le théorème XVII

$$s=t\ ,\ s_1=1\ ,$$

nous aurons pour $t>1$

$$\lim_{x=1}(1-x)^{t+1}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{m^t x^m}{(1-x^m)^2} = \Gamma(t+1)\left\{K(-t\,,\,0)+\frac{1}{t-1}\right\}\ ; \tag{306}$$

en posant dans le même théorème

$$s = 1 \ , \ s_1 = t \ ,$$

nous obtiendrons pour $t < 1$

$$(307) \quad \lim_{x=1} (1-x)^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^t x^m}{(1-x^m)^2} = K(t-2 \ , \ 0) - \frac{1}{t-1} \ ,$$

et de ces deux formules et de l'équation (291) résulte ce théorème:

Si l'on désigne par t *une quantité réelle, on aura*

$$\lim_{x=1} (1-x)^{t+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^t x^m}{(1-x^m)^2} = \Gamma(t+1) \left\{ K(-t \ , \ 0) + \frac{1}{t-1} \right\} \text{ pour } t > 1 \ ,$$

$$\lim_{x=1} (1-x)^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^t x^m}{(1-x^m)^2} = K(t-2 \ , \ 0) - \frac{1}{t-1} \text{ pour } t < 1$$

et

$$\lim_{x=1} \left\{ (1-x)^2 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m x^m}{(1-x^m)^2} + \log(1-x) \right\} = K(-1 \ , \ 0) + 1 \ .$$

Le second membre de la première de ces formules est d'après l'équation (36) égal à

$$\Gamma(t+1) \left\{ \frac{1}{1^t} + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{3^t} + \cdots \right\} \ ,$$

et, par suite, nous obtiendrons pour $t = 2 \ , 4 \ , 6$ les formules

$$(308) \quad \lim_{x=1} (1-x)^3 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^2 x^m}{(1-x^m)^2} = \frac{\pi^2}{3} \ ,$$

$$(309) \quad \lim_{x=1} (1-x)^5 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^4 x^m}{(1-x^m)^2} = \frac{4\pi^4}{15} \ ,$$

$$(310) \quad \lim_{x=1} (1-x)^7 \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^6 x^m}{(1-x^m)^2} = \frac{16\pi^6}{21} \ ,$$

et, en général, on aura la formule

$$(311) \quad \lim_{x=1} (1-x)^{2r+1} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^{2r} x^m}{(1-x^m)^2} = 2^{2r-1} B_r \pi^{2r} \ ,$$

où l'on désigne par r un nombre entier positif quelconque.

§. 8.

SUR LES NOMBRES PREMIERS.

Désignons par $g_1(m)$ une fonction, qui satisfait à la condition

$$g_1(m)g_1(n) = g_1(mn)$$

pour tous les nombres entiers positifs, premiers entre eux, nous obtiendrons du théorème VIII, en y remplaçant $f(m)$ par $g_1(m)$,

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots=0,1,2,\ldots)} g_1\left(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}\ldots\right) = \sum_{m=1}^{m=\infty} g_1(m) \ ,$$

d'où l'on tire, en vertu de la propriété sus-dite de la fonction $g_1(m)$,

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots=0,1,2,\ldots)} g_1\left(p_1^{\alpha_1}\right)g_1\left(p_2^{\alpha_2}\right)g_1\left(p_3^{\alpha_3}\right)\ldots = \sum_{m=1}^{m=\infty} g_1(m)$$

et, par suite,

$$\sum_{\alpha_1=0}^{\alpha_1=\infty} g_1\left(p_1^{\alpha_1}\right) \sum_{\alpha_2=0}^{\alpha_2=\infty} g_1\left(p_2^{\alpha_2}\right) \sum_{\alpha_3=0}^{\alpha_3=\infty} g_1\left(p_3^{\alpha_3}\right)\ldots = \sum_{m=1}^{m=\infty} g_1(m)$$

ou

$$(312) \qquad \prod_p \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} g_1(p^\alpha) = \sum_{m=1}^{m=\infty} g_1(m) \ ,$$

où p est égal successivement à tous les nombres premiers positifs. De là résulte ce théorème:

Théorème XIX. Soit $g_1(m)$ *une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs* m *et* n, *premiers entre eux, satisfait á l'équation*

$$g_1(m)g_1(n) = g_1(mn) \ ,$$

on aura

$$\prod_p \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} g_1(p^\alpha) = \sum_{m=1}^{m=\infty} g_1(m) \ ,$$

pourvu que la série dans le second membre converge indépendamment de l'ordre de ses termes.

Soit maintenant, comme dans les théorèmes XII et XIII, $g(m)$ une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs m et n satisfait aux conditions

$$g(m)g(n) = g(mn) \ , \ g(1) = 1 \ ,$$

et posons dans le théorème précédent

$$g_1(m) = g(m) \ ,$$

nous aurons

$$(313) \qquad \prod_p \sum_{a=0}^{a=\infty} g(p)^a = \sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)$$

ou

$$(314) \qquad \prod_p \frac{1}{1-g(p)} = \sum_{m=1}^{m=\infty} g(m) \ ,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XX. Soit g(m) *une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs* m *et* n *satisfait aux conditions*

$$g(m)g(n) = g(mn) \ , \ g(1) = 1 \ ,$$

on aura

$$\prod_p \frac{1}{1-g(p)} = \sum_{m=1}^{m=\infty} g(m) \ ,$$

pourvu que la série dans le second membre converge indépendamment de l'ordre de ses termes.

Posons dans la formule ainsi démontrée

$$(315) \qquad g(m) = \frac{1}{m^{1+w}} \ ,$$

où l'on désigne par w une quantité positive, nous aurons

$$(316) \qquad \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^{1+w}}} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}} \ ,$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes des deux membres,

$$(317) \qquad -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^{1+w}}\right) = \log \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}} \ .$$

Mais pour $0<z<\frac{1}{2}$ on a évidemment

$$-\log(1-z) = z + \lambda z^2 \ ,$$

où $0<\lambda<1$, et par suite nous obtiendrons de l'équation (317)

$$(318) \qquad \sum_p \frac{1}{p^{1+w}} + \sum_p \frac{\lambda}{p^{2+2w}} = \log \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}} \ .$$

Puisque on a, d'après l'équation (56), pour $0<w<1$

$$(319) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}} = \frac{1}{w} + \lambda_1 \ ,$$

où λ_1 est fini pour $0 \leqq w < 1$, on déduit de l'équation (318)

$$(320) \qquad \lim_{w=0} \frac{\sum_p \frac{1}{p^{1+w}}}{\log \frac{1}{w}} = \lim_{w=0} \frac{\log\left(\frac{1}{w}+\lambda_1\right)}{\log \frac{1}{w}} = 1 \ .$$

D'après la règle générale pour évaluer des fractions, qui se présentent sous la forme $\frac{\infty}{\infty}$, nous en obtiendrons, b étant un nombre entier positif quelconque

$$(321) \qquad \lim_{w=0} w^b \sum_p \frac{(\log p)^b}{p^{1+w}} = \Gamma(b) \ .$$

Cela posé, nous appliquerons aux formules (320) et (321) les théorèmes IV et VI; désignons pour ce but par

$$p_1 \ , \ p_2 \ , \ p_3 \ , \ \ldots \ .$$

les nombres premiers positifs, rangés par ordre de grandeurs croissantes; soit de plus p_s le plus grand des nombres premiers, qui ne surpassent pas le nombre entier n, de sorte que l'on aura

$$p_s \leqq n < p_{s+1} \ .$$

En désignant par a une quantité positive quelconque, et en posant

$$c_n = n^{a-1} ,$$

si n est un nombre premier, mais

$$c_n = 0 ,$$

si n n'est pas un nombre premier, l'équation (320) peut s'écrire

$$\lim_{w=0} \frac{1}{\log \frac{1}{w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = 1 ,$$

et, par suite, nous aurons d'après le théorème IV

$$\lim_{n=\infty} \frac{(c_1 + c_2 + \ldots + c_n) \log n}{n^a} = \frac{1}{a}$$

ou

$$\lim_{n=\infty} \frac{(p_1^{a-1} + p_2^{a-1} + \ldots + p_s^{a-1}) \log n}{n^a} = \frac{1}{a} . \tag{322}$$

Posons maintenant

$$c_n = n^{a-1} (\log n)^{b-1} ,$$

si n est un nombre premier, mais

$$c_n = 0 ,$$

si n n'est pas un nombre premier, où l'on désigne par a une quantité positive et par b un nombre entier, qui satisfait à la condition

$$b \geqq 2 ,$$

nous obtiendrons de l'équation (321), en y remplaçant b par $b - 1$,

$$\lim_{w=0} w^{b-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = \Gamma(b-1) . \tag{323}$$

Remplaçons dans le théorème IV b par $b - 2$, nous aurons la formule

$$\lim_{w=0} w^{b-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^{a+w}} = a\,\Gamma(b-1) \lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n^a (\log n)^{b-2}} , \tag{324}$$

et de ces deux équations on tire

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{n^a (\log n)^{b-2}} = \frac{1}{a} \tag{325}$$

ou

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_1^{a-1}(\log p_1)^{b-1} + p_2^{a-1}(\log p_2)^{b-1} + \ldots + p_s^{a-1}(\log p_s)^{b-1}}{n^a (\log n)^{b-2}} = \frac{1}{a} \,. \tag{326}$$

Pour dernière application, posons

$$c_n = \frac{(\log n)^{b-1}}{n} \,,$$

si n est un nombre premier, mais

$$c_n = 0 \,,$$

si n n'est pas un nombre premier, la quantité b ayant le même sens qu'auparavant, nous obtiendrons de l'équation (321), en y remplaçant b par $b - 1$,

$$\lim_{w=0} w^{b-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = \Gamma(b-1) \,. \tag{327}$$

Remplaçons dans le théorème VI b par $b - 1$, nous aurons la formule

$$\lim_{w=0} w^{b-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{c_n}{n^w} = \Gamma(b) \lim_{n=\infty} \frac{c + c_2 + \ldots + c_n}{(\log n)^{b-1}} \,, \tag{328}$$

et des équations (327) et (328) on tire

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_n}{(\log n)^{b-1}} = \frac{1}{b-1} \tag{329}$$

ou

$$\lim_{n=\infty} \frac{\frac{(\log p_1)^{b-1}}{p_1} + \frac{(\log p_2)^{b-1}}{p_2} + \ldots + \frac{(\log p_s)^{b-1}}{p_s}}{(\log n)^{b-1}} = \frac{1}{b-1} \,. \tag{330}$$

Maintenant nous résumerons les formules (322), (326), (330) dans un théorème; des équations (322) et (320) on peut conclure, que les formules (326) et (330) subsistent aussi pour $b = 1$; par là le théorème suivant est démontré.

Théorème XXI. Désignons par a *une quantité positive quelconque, par* b *un nombre entier positif et par*

$$p_1 \ , \ p_2 \ , \ p_3 \ , \ \ldots \ .$$

les nombres premiers positifs, rangés par ordre de grandeurs croissantes; soit de plus p_s *le plus grand des nombres premiers, qui ne surpassent pas le nombre entier* n, *on aura*

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_1^{a-1}(\log p_1)^{b-1} + p_2^{a-1}(\log p_2)^{b-1} + \ldots + p_s^{a-1}(\log p_s)^{b-1}}{n^a (\log n)^{b-2}} = \frac{1}{a}$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{\dfrac{(\log p_1)^{b-1}}{p_1} + \dfrac{(\log p_2)^{b-1}}{p_2} + \ldots + \dfrac{(\log p_s)^{b-1}}{p_s}}{(\log n)^{b-1}} = \frac{1}{b-1} \ ,$$

pourvu que les limites dans les premiers membres soient des quantités finies et déterminées.

Pour $b = 1$ et $b = 2$ nous obtiendrons de la première de ces formules

$$(331) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{(p_1^{a-1} + p_2^{a-1} + \ldots + p_s^{a-1}) \log n}{n^a} = \frac{1}{a} \ ,$$

$$(332) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{p_1^{a-1} \log p_1 + p_2^{a-1} \log p_2 + \ldots + p_s^{a-1} \log p_s}{n^a} = \frac{1}{a} \ ,$$

et pour $b = 2$ on déduit de la seconde formule

$$(333) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\dfrac{\log p_1}{p_1} + \dfrac{\log p_2}{p_2} + \ldots + \dfrac{\log p_s}{p_s}}{\log n} = 1 \ .$$

§. 9.

SUR QUELQUES FONCTIONS CONJUGUÉES SPÉCIALES.

Dans le quatrième paragraphe nous avons démontré, qu'à chaque fonction $f_1(m)$, qui ne s'annule pas pour $m = 1$, correspond une autre fonction $f_2(m)$, que nous appelons la fonction conjuguée de $f_1(m)$, et les valeurs de la fonction $f_2(m)$ sont déterminées par les équations (173). Dans le cas spécial, où

$$f_1(m) = 1 \ ,$$

nous poserons

$$f_2(m) = \varepsilon_m \ ,$$

et pour la détermination de la fonction ε_m nous aurons les équations

$$\varepsilon_1 = 1 \ , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_7 = 0 \ ,$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0 \ , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_8 = 0 \ ,$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = 0 \ , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_9 = 0 \ ,$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_4 = 0 \ , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_5 + \varepsilon_{10} = 0 \ ,$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_5 = 0 \ , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_{11} = 0 \ ,$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_6 = 0 \ , \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon_{12} = 0$$

et, en général, pour $m > 1$

$$\sum_d \varepsilon_d = 0 \ , \tag{334}$$

où d est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre m. Des formules ci-dessus on obtiendra

$$\varepsilon_1 = 1 \ , \ \varepsilon_2 = -1 \ , \ \varepsilon_3 = -1 \ , \ \varepsilon_4 = 0 \ , \ \varepsilon_5 = -1 \ , \ \varepsilon_6 = 1 \ ,$$

$$\varepsilon_7 = -1 \ , \ \varepsilon_8 = 0 \ , \ \varepsilon_9 = 0 \ , \ \varepsilon_{10} = 1 \ , \ \varepsilon_{11} = -1 \ , \ \varepsilon_{12} = 0 \ ,$$

et nous démontrerons, que la fonction ε_m ne peut prendre d'autres valeurs que $1 \ , 0 \ , -1$. Du théorème XII on déduit dans ce cas

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) \Phi(mnx) \tag{335}$$

ou, en renversant l'ordre de sommation,

$$(336) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) \sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)\, \Phi(mnx) \ .$$

En y posant $\Phi(x) = 1$, nous aurons

$$(337) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) = 1 \ ,$$

d'où l'on tire, au moyen du théorème XX,

$$(338) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) = \prod_p \left(1 - g(p)\right) \ .$$

Mais en vertu de la relation

$$g(m)g(n) = g(mn)$$

le second membre de l'équation (338) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} h_n g(n) \ ,$$

où $h_n = 0$, si n est divisible par un nombre carré plus grand que l'unité; dans le cas, où n n'est pas divisible par un tel carré, on aura $h_n = 1$ ou $h_n = -1$, suivant que le nombre des facteurs premiers du nombre n est pair ou impair. En égalant les uns aux autres les coefficients de $g(n)$ dans les deux membres de l'équation (338), nous obtiendrons

$$\varepsilon_n = h_n \ ,$$

et par là le théorème suivant est démontré.

Théorème XXII. En désignant par ε_{m} *la fonction conjuguée de l'unité, on aura pour* $\mathrm{m} > 1$

$$\sum_{d} \varepsilon_d = 0 \ ,$$

où d *est égal successivement aux diviseurs positifs du nombre* m; *de plus on a*

$$\varepsilon_m = 0 \ ,$$

si m *est divisible par un nombre carré plus grand que l'unité, mais*

$$\varepsilon_m = \pm 1 \ ,$$

suivant que m *est composé d'un nombre pair ou d'un nombre impair de facteurs premiers inégaux entre eux; et en désignant par* $\Phi(x)$ *une fonction quelconque et par* $g(m)$ *une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs* m *et* n *satisfait aux conditions*

$$g(m)g(n) = g(mn) \ , \ g(1) = 1 \ ,$$

on aura

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) \sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)\, \Phi(mnx)$$

pour toutes les valeurs de x, *pour lesquelles la série dans le second membre converge indépendamment de l'ordre de ses termes.*

Exemple 1. Posons

$$g(m) = 1 \ , \ \Phi(x) = a^x \ ,$$

où $0 < a < 1$, nous obtiendrons de ce théorème pour $x > 0$

$$a^x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \sum_{m=1}^{m=\infty} a^{mnx} \ ;$$

en y remplaçant a^x par z, nous aurons pour $0 < z < 1$ la formule

$$z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n z^n}{1 - z^n} \ .$$

Exemple 2. Par les substitutions

$$g(m) = 1 \ , \ \Phi(x) = \frac{a^x}{x} \ ,$$

où $0 < a < 1$, nous trouverons pour $x > 0$

$$\frac{a^x}{x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{a^{mnx}}{mnx} \ ,$$

d'où l'on tire, en y remplaçant a^x par z ,

$$z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} \log \frac{1}{1 - z^n} .$$

Exemple 3. Pour

$$g(m) = 1 , \quad \Phi(x) = x a^x ,$$

où $0 < a < 1$, nous obtiendrons

$$x a^x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \sum_{m=1}^{m=\infty} m n x a^{mnx}$$

et par suite, en y remplaçant a^x par z,

$$z = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n \varepsilon_n z^n}{(1 - z^n)^2} .$$

Soit m un nombre entier positif, et posons

$$\varrho_m = 1 ,$$

si m est un nombre carré, mais

$$\varrho_m = 0 ,$$

si m n'est pas un nombre carré; en désignant par η_m la fonction conjuguée de ϱ_m, nous obtiendrons des équations (173) pour la détermination de la fonction η_m les égalités suivantes:

$$\eta_1 = 1 , \qquad \eta_5 = 0 , \qquad \eta_9 + \eta_1 = 0 ,$$

$$\eta_2 = 0 , \qquad \eta_6 = 0 , \qquad \eta_{10} = 0 ,$$

$$\eta_3 = 0 , \qquad \eta_7 = 0 , \qquad \eta_{11} = 0 ,$$

$$\eta_4 + \eta_1 = 0 , \qquad \eta_8 + \eta_2 = 0 , \qquad \eta_{12} + \eta_3 = 0$$

et, en général, on aura pour $m > 1$

$$\sum_{d_0} \eta_{d_0} = 0 , \tag{339}$$

où d_0 est égal successivement à tout diviseur du nombre m, pour lequel $\frac{m}{d_0}$ est un nombre carré. De ces équations on tire

$$\eta_1 = 1\ ,\ \eta_2 = 0\ ,\ \eta_3 = 0\ ,\ \eta_4 = -1\ ,\ \eta_5 = 0\ ,\ \eta_6 = 0\ ,$$

$$\eta_7 = 0\ ,\ \eta_8 = 0\ ,\ \eta_9 = -1\ ,\ \eta_{10} = 0\ ,\ \eta_{11} = 0\ ,\ \eta_{12} = 0\ ,$$

et nous démontrerons, que la fonction η_m ne peut prendre d'autres valeurs que $1\ ,\ 0\ ,\ -1$. Du théorème XII on tire dans ce cas

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \varrho_m g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n)\, \Phi(mnx)\ , \tag{340}$$

d'où

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) \sum_{m=1}^{m=\infty} \varrho_m g(m)\, \Phi(mnx)\ . \tag{341}$$

Pour $\Phi(x) = 1$ on en déduit l'équation

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \varrho_m g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = 1\ , \tag{342}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = 1\ . \tag{343}$$

Remplaçons dans l'équation (337) $g(m)$ par $g(m)^2$, nous aurons

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} g(m)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n)^2 = 1\ , \tag{344}$$

et des équations (343), (344) on tire

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n)^2\ . \tag{345}$$

En y posant

$$g(n) = \frac{1}{n^2}\ ,$$

nous aurons pour $z > 1$ la formule

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\eta_n}{n^z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{(n^2)^z} \quad , \tag{346}$$

et en égalant les uns aux autres les coefficients de $\frac{1}{n^z}$ dans les deux membres de cette équation, nous trouverons

$$\eta_n = \varepsilon_{\sqrt{n}} \quad ,$$

si n est un nombre carré, mais

$$\eta_n = 0 \quad ,$$

si n n'est pas un nombre carré. De ce qui précède résulte ce théorème:

Théorème XXIII. En posant

$$\varrho_m = 1 \quad ,$$

si m *est un nombre carré positif, mais*

$$\varrho_m = 0 \quad ,$$

si m *n'est pas un nombre carré positif, et en désignant par* η_{m} *la fonction conjuguée de* ϱ_{m} *, on aura pour* $\mathrm{m} > 1$

$$\sum_{d_0} \eta_{d_0} = 0 \quad ,$$

où d_0 *est égal successivement à tout diviseur positif du nombre* m, *pour lequel* $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{d}_0}$ *est un nombre carré; de plus on a*

$$\eta_m = \varepsilon_{\sqrt{m}} \quad ,$$

si m *est un nombre carré, mais*

$$\eta_m = 0 \quad ,$$

si m *n'est pas un nombre carré; en désignant par* $\Phi(\mathrm{x})$ *une fonction quelconque et par* $\mathrm{g}(\mathrm{m})$ *une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs* m *et* n *satisfait aux conditions*

$$g(m)g(n) = g(mn) \quad , \quad g(1) = 1 \quad ,$$

on aura

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) \sum_{m=1}^{m=\infty} \varrho_m g(m) \Phi(mnx)$$

pour toutes les valeurs de x, *pour lesquelles la série dans le second membre converge indépendamment de l'ordre de ses termes.*

Si l'on désigne par m un nombre entier positif, et par $p_1, p_2, p_3, \ldots$ les nombres premiers positifs, rangés par ordre de grandeurs croissantes, le nombre m peut se mettre sous la forme

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots .$$

d'une seule manière; par suite les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sont complétement déterminés, et en définissant une fonction numérique λ_m par l'équation

$$\lambda_m = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots},$$

λ_m sera une fonction bien déterminée pour tous les nombres entiers positifs m. En posant

$$m_1 = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \ldots ,$$

on a de même

$$\lambda_{m_1} = (-1)^{\beta_1+\beta_2+\beta_3+\cdots},$$

et puisque

$$m m_1 = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} p_3^{\alpha_3+\beta_3} \ldots ,$$

on a

$$\lambda_{mm_1} = (-1)^{\alpha_1+\beta_1+\alpha_2+\beta_2+\alpha_3+\beta_3+\cdots};$$

de ces équations on obtient la formule

(347) $$\lambda_{mm_1} = \lambda_m \lambda_{m_1},$$

qui subsiste pour tous les nombres entiers positifs m et m_1. Les valeurs de la fonction λ_m pour les douze premiers nombres sont

$$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = -1, \ \lambda_3 = -1, \ \lambda_4 = 1, \ \lambda_5 = -1, \ \lambda_6 = 1,$$

$$\lambda_7 = -1, \ \lambda_8 = -1, \ \lambda_9 = 1, \ \lambda_{10} = 1, \ \lambda_{11} = -1, \ \lambda_{12} = -1,$$

et en désignant par p un nombre premier quelconque, on a évidemment

$$\lambda_p = -1 .$$

Cela étant, désignons par ζ_m la fonction conjuguée de λ_m, nous obtiendrons des équations (173) pour la détermination des valeurs de la fonction ζ_m les égalités

$$\zeta_1 = 1 , \qquad \zeta_5 - \zeta_1 = 0 , \qquad \zeta_9 - \zeta_3 + \zeta_1 = 0 ,$$

$$\zeta_2 - \zeta_1 = 0 , \qquad \zeta_6 - \zeta_3 - \zeta_2 + \zeta_1 = 0 , \qquad \zeta_{10} - \zeta_5 - \zeta_2 + \zeta_1 = 0 ,$$

$$\zeta_3 - \zeta_1 = 0 , \qquad \zeta_7 - \zeta_1 = 0 , \qquad \zeta_{11} - \zeta_1 = 0 ,$$

$$\zeta_4 - \zeta_2 + \zeta_1 = 0 , \qquad \zeta_8 - \zeta_4 + \zeta_2 - \zeta_1 = 0 , \qquad \zeta_{12} - \zeta_6 - \zeta_1 + \zeta_3 + \zeta_2 - \zeta_1 = 0 ,$$

et, en général, on aura pour $m > 1$

$$\sum_{d d_1 = m} \lambda_d \zeta_{d_1} = 0 . \tag{348}$$

Des formules ci-dessus on tire

$$\zeta_1 = 1 , \ \zeta_2 = 1 , \ \zeta_3 = 1 , \ \zeta_4 = 0 , \ \zeta_5 = 1 , \ \zeta_6 = 1 ,$$

$$\zeta_7 = 1 , \ \zeta_8 = 0 , \ \zeta_9 = 0 . \ \zeta_{10} = 1 , \ \zeta_{11} = 1 , \ \zeta_{12} = 0 ,$$

et nous démontrerons, que la fonction ζ_m ne peut prendre d'autres valeurs que 0 , 1 . Du théorème XII on tire dans ce cas

$$\Phi(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda_m g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) \Phi(mnx) \tag{349}$$

ou, en renversant l'ordre de sommation,

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) \sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda_m g(m) \Phi(mnx) . \tag{350}$$

Pour $\Phi(x) = 1$ on en déduit

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda_m g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) = 1 . \tag{351}$$

Remplaçons maintenant dans l'équation (337) $g(m)$ par $\lambda_m g(m)$, ce qui est permis à cause de la formule (347), nous aurons

$$(352) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda_m g(m) \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \lambda_n g(n) = 1 \ .$$

et des équations (351) et (352) on tire

$$(353) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n \lambda_n g(n) \ ,$$

d'où

$$(354) \qquad \zeta_n = \varepsilon_n \lambda_n \ .$$

Dans les cas, où n est divisible par un nombre carré plus grand que l'unité, on a $\varepsilon_n = 0$, et par suite $\zeta_n = 0$; mais si le nombre n n'est pas divisible par un tel carré, n peut se mettre sous la forme

$$n = p_1 p_2 p_3 \ldots . p_s \ ,$$

où les facteurs premiers $p_1 , p_2 , \ldots p_s$ sont inégaux entre eux, et l'on a

$$\varepsilon_n = (-1)^s \ , \ \lambda_n = (-1)^s \ ,$$

et, par conséquent, on tire de l'équation (354)

$$\zeta_n = 1 \ .$$

Par là ce théorème est démontré:

Théorème XXIV. Soit m *un nombre entier positif, et* $p_1 , p_2 , \ldots p_s$ *tous les facteurs premiers inégaux, dont* m *est composé; posons*

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$$

et

$$\lambda_m = (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s} \ ,$$

et désignons par ζ_m *la fonction conjuguée de* λ_m, *on aura pour* $m > 1$

$$\sum_{dd_1 = m} \lambda_d \zeta_{d_1} = 0 \ ;-$$

de plus on a

$$\zeta_m = 0 \ ,$$

si m *est divisible par un nombre carré plus grand que l'unité, mais*

$$\zeta_m = 1 \ ,$$

si m *n'est pas divisible par un tel carré; en désignant par* $\Phi(x)$ *une fonction quelconque et par* $g(m)$ *une fonction, qui pour tous les nombres entiers positifs* m *et* n *satisfait aux conditions*

$$g(m)g(n) = g(mn) \ , \ g(1) = 1 \ ,$$

on aura

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) \sum_{m=1}^{m=\infty} \lambda_m g(m) \Phi(mnx)$$

pour toutes les valeurs de x, *pour lesquelles la série dans le second membre converge indépendamment de l'ordre de ses termes.*

Posons dans les trois théorèmes précédents

$$\Phi(x) = 1 \ ,$$

nous en obtiendrons les formules

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) = 1 \ , \tag{355}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho_n g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = 1 \tag{356}$$

ou, en vertu de la définition de la fonction ϱ_n,

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} g(n)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = 1 \tag{357}$$

et

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda_n g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) = 1 \ . \tag{358}$$

Les fonctions

$$g(n)\ ,\ g(n)^2\ ,\ \lambda_n g(n)$$

satisfaisant aux conditions, énoncées dans le théorème XX, on pourra transformer les premiers membres des équations (355), (357), (358) au moyen de ce théorème, ce qui donnera

$$(359)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) = \prod_p \big(1 - g(p)\big)\ ,$$

$$(360)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = \prod_p \big(1 - g(p)^2\big)\ ,$$

$$(361)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) = \prod_p \big(1 - \lambda_p g(p)\big) = \prod_p \big(1 + g(p)\big)\ ,$$

et de ces trois formules on tire

$$(362)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n)\ .$$

Cela fait, nous obtiendrons des équations (355), (356), (358), (362) les relations suivantes:

$$(363)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho_n g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n)\ ,$$

$$(364)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda_n g(n)\ ,$$

$$(365)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \varrho_n g(n)\ ,$$

$$(366)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda_n g(n)\ ,$$

$$(367)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varepsilon_n g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n)\ ,$$

$$(368)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \zeta_n g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} \eta_n g(n)\ .$$

Posons maintenant dans le théorème IX

$$\Phi(k) = 1 \ ,$$

nous obtiendrons

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} f(n)g(n) \sum_{n=1}^{n=\infty} f_1(n)g(n) = \sum_{n=1}^{n=\infty} g(n) \sum_{dd_1=n} f(d)f_1(d_1) \ ;$$

en appliquant cette formule aux seconds membres des équations (363), (364), . . . (368), et en égalant les uns aux autres les coefficients de $g(k)$ dans les deux membres des équations ainsi obtenues, nous aurons les formules

$$1 = \sum_{dd_1=k} \varrho_d \zeta_{d_1} \ , \tag{369}$$

$$\varrho_k = \sum_{dd_1=k} \lambda_d \ , \tag{370}$$

$$\lambda_k = \sum_{dd_1=k} \varepsilon_d \varrho_{d_1} \ , \tag{371}$$

$$\varepsilon_k = \sum_{dd_1=k} \eta_d \lambda_{d_1} \ , \tag{372}$$

$$\eta_k = \sum_{dd_1=k} \varepsilon_d \zeta_{d_1} \ , \tag{373}$$

$$\zeta_k = \sum_{dd_1=k} \eta_d \ . \tag{374}$$

Au moyen des formules précédentes nous déterminerons les valeurs moyennes des fonctions

$$\varrho_n \ , \ \lambda_n \ , \ \varepsilon_n \ , \ \eta_n \ , \ \zeta_n \ ;$$

posons pour ce but dans les équations (355), (356), (357), (358), (368)

$$g(n) = \frac{1}{n^{1+w}} \ ,$$

où w est une quantité positive; en appliquant aux équations ainsi obtenues les formules

$$\lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}} = 1 \ , \ \lim_{w=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+2w}} = \frac{\pi^2}{6} \ ,$$

nous en obtiendrons pour $w = 0$

$$\lim_{w=0} \frac{1}{w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{1+w}} = 1 \quad , \tag{375}$$

$$\lim_{w=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\eta_n}{n^{1+w}} = \frac{6}{\pi^2} \quad , \tag{376}$$

$$\lim_{w=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_n}{n^{1+w}} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \tag{377}$$

$$\lim_{w=0} \frac{1}{w} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n^{1+w}} = \frac{\pi^2}{6} \quad , \tag{378}$$

$$\lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^{1+w}} = \frac{6}{\pi^2} \quad . \tag{379}$$

Posons dans le théorème IV

$$a = 1 \ , \ b = 0 \ ,$$

et y remplaçons c_n successivement par

$$\varepsilon_n \ , \ \eta_n \ , \ \varrho_n \ , \ \lambda_n \ , \ \zeta_n \ ,$$

nous en obtiendrons, au moyen des équations (375) . . . (379), les formules

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n}{n} = \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{1+w}} = 0 \quad , \tag{380}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_n}{n} = \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\eta_n}{n^{1+w}} = 0 \quad , \tag{381}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n}{n} = \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_n}{n^{1+w}} = 0 \quad , \tag{382}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}{n} = \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n^{1+w}} = 0 \quad , \tag{383}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_n}{n} = \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^{1+w}} = \frac{6}{\pi^2} \quad . \tag{384}$$

Ces formules ont été démontrées sous la supposition, que les limites dans les premiers membres soient des quantités finies et déterminées. Des définitions des fonctions η_n , ϱ_n on peut conclure, que les formules (381) et (382) sont rigoureusement vraies, et dans ce qui va suivre nous donnerons une démonstration rigoureuse de la formule (384).

§. 10.

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE LA FONCTION E_m .

Posons dans le théorème XIII

$$f_1(m) = 1 \ , \ g(m) = 1 \ ,$$

d'où

$$f_2(m) = \varepsilon_m \ ,$$

nous aurons ce théorème:

Théorème XXV. Soit f(m) *une fonction quelconque, et posons pour tout nombre entier positif* k

$$h(k) = \sum_{dd_1 = k} f(d) \ ,$$

nous aurons

$$f(k) = \sum_{dd_1 = k} \varepsilon_d h(d_1) \ .$$

Voici quelques applications de ce théorème:

1) En posant

$$f(m) = 1 \text{ pour } m = 1 \ ,$$

$$f(m) = 0 \text{ pour } m > 1 \ ,$$

nous aurons évidemment

$$h(k) = 1 \ ,$$

et, par suite, nous obtiendrons la formule

$$f(k) = \sum_{dd_1=k} \varepsilon_d \ ;$$

par là nous avons retrouvé les formules

$$\sum_{dd_1=k} \varepsilon_d = 1 \tag{385}$$

pour $k = 1$ et

$$\sum_{dd_1=k} \varepsilon_d = 0 \tag{386}$$

pour $k > 1$.

2) Posons

$$f(m) = \varphi(m) \ ,$$

où $\varphi(m)$ désigne, combien il y a de nombres premiers à m dans le groupe

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ . \ . \ . \ . \ m \ ,$$

nous aurons

$$h(k) = \sum_{dd_1=k} \varphi(d) \ ;$$

mais, d'après une formule connue, on a

$$\sum_{dd_1=k} \varphi(d) = k \ . \tag{387}$$

Il s'ensuit

$$h(k) = k \ ,$$

et, en y appliquant le théorème précédent, on aura

$$\varphi(k) = \sum_{dd_1=k} \varepsilon_d d_1 \ . \tag{388}$$

3) En posant

$$f(m) = \chi(m) \ ,$$

où

$$\chi(m) = \log p \ ,$$

si m est une puissance du nombre premier p, mais

$$\chi(m) = 0 \ ,$$

si m est égal à 1, on si m est divisible par deux nombres premiers différents, on aura

$$h(k) = \sum_{dd_1=k} \chi(d) \ ;$$

mais de la définition de la fonction $\chi(m)$ résulte la formule

$$\sum_{dd_1=k} \chi(d) = \log k \ . \tag{389}$$

Il s'ensuit

$$h(k) = \log k \ ,$$

et, en y appliquant le théorème ci-dessus, on déduit la formule

$$\chi(k) = \sum_{dd_1=k} \varepsilon_d \log d_1 \ . \tag{390}$$

Maintenant nous résumons les formules (388), (390) dans le théorème suivant:

Théorème XXVI. En désignant par $\varphi(\mathrm{m})$, *combien il y a de nombres premiers à* m *dans le groupe*

$$1 \ , \ 2 \ , \ 3 \ , \ \ldots \ . \ m \ ,$$

et en posant

$$\chi(m) = \log p \ ,$$

si m *est une puissance du nombre premier* p, *mais*

$$\chi(m) = 0 \ ,$$

si m *est égal à* 1, *ou si* m *est divisible par deux nombres premiers différents, on aura pour tous les nombres entiers positifs* k

$$\varphi(k) = \sum_{dd_1=k} \varepsilon_d d_1 \ ,$$

$$\chi(k) = \sum_{dd_1=k} \varepsilon_d \log d_1 \ .$$

§. 11.

DE LA FONCTION Z_m .

Désignons par a une quantité positive, et posons dans le théorème IV

$$b = 0 \ , \ c_n = n^{a-1}\zeta_n \ ,$$

nous aurons la formule

$$(391) \quad \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^{1+w}} = a \lim_{n=\infty} \frac{1^{a-1}\zeta_1 + 2^{a-1}\zeta_2 + \cdots\cdots + n^{a-1}\zeta_n}{n^a} \ ;$$

en posant dans le théorème VI

$$b = 1 \ , \ c_n = \frac{\zeta_n}{n} \ ,$$

nous aurons

$$(392) \quad \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^{1+w}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\zeta_1}{1} + \frac{\zeta_2}{2} + \cdots + \frac{\zeta_n}{n}}{\log n} \ .$$

Des équations (379), (391), (392) on déduit

$$(393) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1^{a-1}\zeta_1 + 2^{a-1}\zeta_2 + \cdots + n^{a-1}\zeta_n}{n^a} = \frac{6}{\pi^2 a}$$

et

$$(394) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\zeta_1}{1} + \frac{\zeta_2}{2} + \cdots + \frac{\zeta_n}{n}}{\log n} = \frac{6}{\pi^2} \ ,$$

formules, qui ont été démontrées sons la supposition, que les limites dans les premiers membres soient des quantités finies et déterminées. Maintenant nous démontrerons rigoureusement ces deux formules; posons pour ce but dans le théorème XIV

$$f(m) = m^{a-1}\zeta_m \ , \ f_1(m) = m^{a-1}\varepsilon_m \ ,$$

où $a \geqq 0$, et observons, que d'après les équations (173)

$$f_2(m) = m^{a-1} ,$$

nous aurons

$$\psi(k) = \sum_{dd_1=k} d^{a-1}\zeta_d \cdot d_1^{a-1}\varepsilon_{d_1} = k^{a-1} \sum_{dd_1=k} \zeta_d \varepsilon_{d_1}$$

ou, d'après l'équation (373),

$$\psi(k) = k^{a-1}\eta_k ,$$

et, par suite, nous obtiendrons de la première formule du théorème sus-dit

$$(395) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} k^{a-1}\zeta_k = \sum_{h=1}^{h=n} F_2\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) h^{a-1}\eta_h ,$$

où

$$F_2(k) = 1^{a-1} + 2^{a-1} + \ldots + k^{a-1} .$$

D'après l'équation (231) on a

$$(396) \qquad F_2\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) = \frac{n^a - h^a}{a\,h^a} + K(a-1\ ,\ 0) + \frac{\lambda n^{a-1}}{h^{a-1}} ,$$

et des équations (395) et (396) on tire

$$(397) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} k^{a-1}\zeta_k = \sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \frac{n^a - h^a}{a\,h} + K(a-1\ ,\ 0)\,h^{a-1} + \lambda n^{a-1} \right\} \eta_h .$$

Remplaçons dans la somme du second membre h par h^2, ce qui est permis, la quantité η_h étant nulle, si h n'est pas un nombre carré, nous aurons

$$(398) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} k^{a-}\ \zeta_k = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ \frac{n^a - h^{2a}}{a\,h^2} + K(a-1\ ,\ 0)\,h^{2a-2} + \lambda n^{a-1} \right\} \varepsilon_h .$$

Maintenant nous distinguerons les deux cas suivants:

1) Pour $a = 0$ on tire de l'équation (398)

$$(399) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\zeta_k}{k} = \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \left\{ \frac{\log n - 2\log h}{h^2} + \frac{K(-1\ ,\ 0)}{h^2} + \frac{\lambda}{n} \right\} \varepsilon_h$$

$$= \log n \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \frac{\varepsilon_h}{h^2} + \lambda ,$$

où la quantité λ_1 est finie pour toutes les valeurs du nombre n.

En posant cette équation sous la forme

$$(400)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\zeta_k}{k} = \log n \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^2} - \log n \sum_{h=E(\sqrt{n})+1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^2} + \lambda_1 \ ,$$

et en observant, que la valeur numérique de la série

$$\sum_{h=E(\sqrt{n})+1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^2}$$

est plus petite que

$$\frac{1}{E(\sqrt{n})} \ ,$$

on obtiendra de l'équation (400)

$$(401)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\zeta_k}{k} = \log n \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^2} + \lambda = \frac{6}{\pi^2} \log n + \lambda \ ,$$

où la quantité λ est finie pour toutes les valeurs du nombre n.

2) Pour $a > 0$ on déduit de l'équation (398)

$$(402)\sum_{k=1}^{k=n} k^{a-1}\zeta_k = \frac{n^a}{a} \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \frac{\varepsilon_h}{h^2} - \frac{1}{a} \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \varepsilon_h h^{2a-2} + K(a-1\ ,\ 0) \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \varepsilon_h h^{2a-2}$$

$$+ n^{a-1} \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} \lambda\, \varepsilon_h = \frac{n^a}{a} \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^2} - \frac{n^a}{a} \sum_{h=E(\sqrt{n})+1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^2} + \lambda_1 \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} h^{2a-2} + \lambda_2 n^{a-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{6\, n^a}{\pi^2\, a} + \lambda_3 n^{a-\frac{1}{2}} + \lambda_1 \sum_{h=1}^{h=E(\sqrt{n})} h^{2a-2} \ ,$$

et, en y appliquant l'équation (232), on aura le théorème suivant:

Théorème XXVII. Soit n *un nombre entier positif, et* a *une quantité réelle, on aura*

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^{a-1}\zeta_k = \frac{6}{\pi^2} \log n + \lambda \ \textit{pour}\ a = 0 \ ,$$

$$= \frac{6n^a}{\pi^2 a} + \lambda_1 \text{ pour } 0 < a < \frac{1}{2} ,$$

$$= \frac{12\sqrt{n}}{\pi^2} + \lambda_2 \log n \text{ pour } a = \frac{1}{2} ,$$

$$= \frac{6n^a}{\pi^2 a} + \lambda_3 n^{a-\frac{1}{2}} \text{ pour } a > \frac{1}{2} ,$$

où les quantités λ *sont finies pour toutes les valeurs du nombre* n .

Pour $a = 1$ on déduit de ce théorème la formule

$$\sum_{k=1}^{k=n} \zeta_k = \frac{6n}{\pi^2} + \lambda\sqrt{n} , \tag{403}$$

d'où résulte cette proposition:

Le nombre de ceux des nombres

$$1 , 2 , 3 , \ldots . n-1 , n ,$$

qui ne sont divisibles par aucun nombre carré plus grand que l'unité, est égal à

$$\frac{6n}{\pi^2} + \lambda\sqrt{n} ,$$

en désignant par λ *une quantité, qui est finie pour toutes les valeurs du nombre* n .

§. 12.

DE LA FONCTION $\Phi(m)$.

En substituant dans le théorème IX

$$f(m) = \varphi(m) , f_1(m) = 1 , g(m) = \frac{1}{m^a} , \Phi(k) = x^k ,$$

nous en obtiendrons, en employant l'équation (387)

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m)}{m^a} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{mn}}{n^a} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{x^k}{k^{a-1}} . \tag{404}$$

formule, qui subsiste pour $-1 < x < 1$ et pour toutes les valeurs de la quantité a. Pour $a = 0$ et $a = 1$ on en déduit les formules

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m) x^m}{1 - x^m} = \frac{x}{(1-x)^2} ,$$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m)}{m} \log \frac{1}{1 - x^m} = \frac{x}{1-x} .$$

Posons maintenant dans l'équation (404)

$$x = 1 , \quad a = 2 + w ,$$

nous en obtiendrons pour $w > 0$

$$(405) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m)}{m^{2+w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+w}} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{1+w}} .$$

En multipliant les deux membres de cette équation par w, nous en tirerons pour $w = 0$

$$(406) \qquad \lim_{w=0} w \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m)}{m^{2+w}} = \frac{6}{\pi^2} .$$

En posant dans le théorème IV

$$b = 0 , \quad c_n = n^{a-2} \varphi(n) ,$$

nous en obtiendrons, a étant une quantité positive,

$$(407) \lim_{w=0} w \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m)}{m^{2+w}} = a \lim_{n=\infty} \frac{1^{a-2}\varphi(1) + 2^{a-2}\varphi(2) + \ldots + n^{a-2}\varphi(n)}{n^a}$$

et, en posant dans le théorème VI

$$b = 1 , \quad c_n = \frac{\varphi(n)}{n^2} ,$$

nous aurons

$$(408) \lim_{w=0} w \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\varphi(m)}{m^{2+w}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\varphi(1)}{1^2} + \frac{\varphi(2)}{2^2} + \ldots + \frac{\varphi(n)}{n^2}}{\log n} ,$$

et des équations (406), (407), (408) on déduit

$$(409)\quad \lim_{n=\infty} \frac{1^{a-2}\varphi(1) + 2^{a-2}\varphi(2) + \cdots + n^{a-2}\varphi(n)}{n^a} = \frac{6}{\pi^2 a}$$

et

$$(410)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\varphi(1)}{1^2} + \frac{\varphi(2)}{2^2} + \cdots + \frac{\varphi(n)}{n^2}}{\log n} = \frac{6}{\pi^2} \ ,$$

formules, qui ont été démontrées sous la supposition, que les limites dans les premiers membres soient des quantités finies et déterminées. Maintenant nous donnerons une démonstration rigoureuse de ces formules. Posons pour cet effet dans le théorème XIV

$$f(m) = m^{a-2}\varphi(m) \ , \ f_1(m) = m^{a-2} \ ,$$

où $a \geqq 0$, et observons, que d'après les équations (173)

$$f_2(m) = m^{a-2}\varepsilon_m \ .$$

nous aurons

$$\psi(k) = \sum_{dd_1=k} d^{a-2}\varphi(d) \cdot d_1^{a-2} = k^{a-2} \sum_{dd_1=k} \varphi(d)$$

ou, d'après l'équation (387),

$$\psi(k) = k^{a-1} \ ,$$

et, par conséquent, nous obtiendrons de la troisième formule du théorème sus-dit

$$(411)\quad \sum_{k=1}^{k=n} k^{a-2}\varphi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} \Psi\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) h^{a-2}\varepsilon_h \ ,$$

où

$$\Psi(k) = 1^{a-1} + 2^{a-1} + \cdots + k^{a-1} \ .$$

D'après l'équation (231) on a

$$(412)\quad \Psi\left(E\left(\frac{n}{h}\right)\right) = \frac{n^a - h^a}{a h^a} + K(a-1\ ,\ 0) + \frac{\lambda n^{a-1}}{h^{a-1}} \ ,$$

et des équations (411) et (412) on tire

$$(413)\quad \sum_{k=1}^{k=n} k^{a-2}\varphi(k) = \sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \frac{n^a - h^a}{a h^2} + K(a-1\,,\,0)h^{a-2} + \frac{\lambda n^{a-1}}{h} \right\} \varepsilon_h \,.$$

Cela étant, distinguons les deux cas suivants:

1) Pour $a = 0$ on déduit de l'équation (413)

$$(414)\quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\varphi(k)}{k^2} = \sum_{h=1}^{h=n} \left\{ \frac{\log n - \log h}{h^2} + \frac{K(-1\,,\,0)}{h^2} + \frac{\lambda}{hn} \right\} \varepsilon_h$$

$$= \log n \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\varepsilon_h}{h^2} + \lambda = \frac{6}{\pi^2} \log n + \lambda \,,$$

où λ désigne une quantité, qui est finie pour toutes les valeurs du nombre n.

2) Pour $a > 0$ on tire de l'équation (413)

$$(415)\quad \sum_{k=1}^{k=n} k^{a-2}\varphi(k) = \frac{n^a}{a} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\varepsilon_h}{h^2} + \left\{ K(a-1\,,\,0) - \frac{1}{a} \right\} \sum_{h=1}^{h=n} \varepsilon_h h^{a-2} + n^{a-1} \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\lambda \varepsilon_h}{h}$$

$$= \frac{n^a}{a} \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{\varepsilon_h}{h^2} + \lambda n^{a-1} \log n + \lambda_1$$

$$= \frac{6 n^a}{\pi^2 a} + \lambda n^{a-1} \log n + \lambda_1 \,,$$

λ et λ_1 étant des quantités finies. Des équations (414) et (415) résulte ce théorème:

Théorème XXVIII. Soit n *un nombre entier positif et* a *une quantité réelle, on aura*

$$\sum_{k=1}^{k=n} k^{a-2}\varphi(k) = \frac{6}{\pi^2} \log n + \lambda \text{ pour } a = 0 \,,$$

$$= \frac{6 n^a}{\pi^2 a} + \lambda_1 \text{ pour } 0 < a < 1 \,,$$

$$= \frac{6 n^a}{\pi^2 a} + \lambda_2 n^{a-1} \log n \text{ pour } a \geqq 1 \,,$$

où les quantités λ *sont finies pour toutes les valeurs du nombre* n .

Pour $a = 2$ on déduit de ce théorème la formule

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varphi(k) = \frac{3n^2}{\pi^2} + \lambda n \log n \ . \tag{416}$$

§. 13.

DE LA FONCTION $X(m)$.

Posons dans le théorème IX

$$f(m) = \chi(m) \ , \ f_1(m) = 1 \ , \ g(m) = \frac{1}{m^a} \ , \ \Phi(k) = x^k \ ,$$

nous obtiendrons, en vertu de la formule (389),

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\chi(m)}{m^a} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^{mn}}{n^a} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log k \, . \, x^k}{k^a} \ . \tag{417}$$

En y posant

$$x = 1 \ , \ a = 1 + w \ ,$$

nous aurons pour $w > 0$

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\chi(m)}{m^{1+w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log k}{k^{1+w}} \ . \tag{418}$$

Multiplions les deux membres de cette équation par w^2, nous en obtiendrons pour $w = 0$, en employant la formule (92),

$$\lim_{w=0} w \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\chi(m)}{m^{1+w}} = 1 \ . \tag{419}$$

En introduisant dans le théorème IV

$$b = 0 \ , \ c_n = n^{a-1}\chi(n) \ ,$$

nous aurons, a étant une quantité positive,

$$\lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)}{n^{1+w}} = a \lim_{n=\infty} \frac{1^{a-1}\chi(1) + 2^{a-1}\chi(2) + \ldots + n^{a-1}\chi(n)}{n^a} \ , \tag{420}$$

et, en posant dans le théorème VI

$$b = 1 \ , \ c_n = \frac{\chi(n)}{n} \ ,$$

nous obtiendrons

$$(421) \quad \lim_{w=0} w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)}{n^{1+w}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\chi(1)}{1} + \frac{\chi(2)}{2} + \cdots + \frac{\chi(n)}{n}}{\log n} \ .$$

Des équations (419), (420), (421) on déduit

$$(422) \quad \lim_{n=\infty} \frac{1^{a-1}\chi(1) + 2^{a-1}\chi(2) + \cdots + n^{a-1}\chi(n)}{n^a} = \frac{1}{a}$$

et

$$(423) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\frac{\chi(1)}{1} + \frac{\chi(2)}{2} + \cdots + \frac{\chi(n)}{n}}{\log n} = 1 \ ;$$

par là le théorème suivant est démontré.

Théorème XXIX. Soit n *un nombre entier positif et* a *une quantité positive, on aura*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^{a-1}\chi(1) + 2^{a-1}\chi(2) + \cdots + n^{a-1}\chi(n)}{n^a} = \frac{1}{a}$$

et

$$\lim_{n=\infty} \frac{\frac{\chi(1)}{1} + \frac{\chi(2)}{2} + \cdots + \frac{\chi(n)}{n}}{\log n} = 1 \ ,$$

pourvu que les limites dans les premiers membres soient des quantités finies et déterminées.

Pour $a = 1$ on déduit de ce théorème la formule

$$(424) \quad \lim_{n=\infty} \frac{\chi(1) + \chi(2) + \cdots + \chi(n)}{n} = 1 \ .$$

§. 14.

SUR LES SOMMES DES PUISSANCES DES DIVISEURS D'UN NOMBRE ENTIER.

Considérons encore quelques cas spéciaux du théorème XVI; supposons d'abord, que

$$t \geq 0 \ ,$$

et posons dans ce théorème

$$s = t \ , \ s_1 = 0 \ ,$$

nous aurons

$$\psi(k) = \sum_d d^t \ ,$$

où d est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre k, et

$$(425) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{n^{t+1}}{t+1} \left\{ K(-t-1 \ , \ 0) + \frac{1}{t} \right\} + n \left\{ K(t-1 \ , \ 0) - \frac{1}{t} \right\}$$

$$+ \lambda_1 n^t + \lambda_3 n^{\frac{t+1}{2}} + \lambda_4 n^t \frac{n^{\frac{1-t}{2}} - 1}{1-t} \ .$$

Posons dans le même théorème

$$s = 0 \ , \ s_1 = t \ ,$$

où $t \leqq 0$, nous en obtiendrons pour $t \gtrless -1$

$$(426) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = n \left\{ K(t-1 \ , \ 0) - \frac{1}{t} \right\} + \frac{n^{t+1}}{t+1} \left\{ K(-t-1 \ , \ 0) + \frac{1}{t} \right\}$$

$$+ \lambda_1 + \lambda_3 n^{\frac{t+1}{2}} + \lambda_4 \frac{n^{\frac{t+1}{2}} - 1}{t+1}$$

et pour $t = -1$

$$(427) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = n \left\{ K(-2 \ , \ 0) + 1 \right\} + \lambda_2 \log n \ .$$

Des formules (425), (426), (427) résulte ce théorème:

Théorème XXX. Désignons par t *une quantité réelle et posons*

$$\psi(k) = \sum_{d} d^t \ ,$$

où d *est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre* k, *nous aurons*, n *étant un nombre entier positif*,

$$\sum_{k=1}^{k=n} \psi(k) = \frac{n^{t+1}}{t+1}\left\{K(-t-1\ ,\ 0)+\frac{1}{t}\right\} + \lambda n^t \ \textit{pour}\ t>1\ ,$$

$$= \frac{n^2}{2}\left\{K(-2\ ,\ 0)+1\right\} + \lambda n \log n \ \textit{pour}\ t=1\ ,$$

$$= \frac{n^{t+1}}{t+1}\left\{K(-t-1\ ,\ 0)+\frac{1}{t}\right\} + n\left\{K(t-1\ ,\ 0)-\frac{1}{t}\right\} + \lambda n^{\frac{t+1}{2}} \ \textit{pour}\ 0<t<1\ ,$$

$$= n\log n + n\left\{2K(-1\ ,\ 0)-1\right\} + \lambda n^{\frac{1}{2}} \ \textit{pour}\ t=0\ ,$$

$$= n\left\{K(t-1\ ,\ 0)-\frac{1}{t}\right\} + \frac{n^{t+1}}{t+1}\left\{K(-t-1\ ,\ 0)+\frac{1}{t}\right\} + \lambda n^{\frac{t+1}{2}} \ \textit{pour}\ -1<t<0\ ,$$

$$= n\left\{K(-2\ ,\ 0)+1\right\} + \lambda \log n \ \textit{pour}\ t=-1\ ,$$

$$= n\left\{K(t-1\ ,\ 0)-\frac{1}{t}\right\} + \lambda \ \textit{pour}\ t<-1\ ,$$

en désignant par λ *des quantités, qui sont finies pour toutes les valeurs du nombre* n.

Au moyen de ce théorème nous déterminerons la valeur moyenne de la fonction $\psi(k)$. Désignons à cet effet par h un nombre entier positif, qui dépend du nombre n de manière que pour $n=\infty$

$$\lim h = \infty\ ,\ \lim \frac{h}{n} = 0\ ;$$

cela posé, nous obtiendrons du théorème précédent les résultats suivants:

1) Pour $t > 1$ on obtiendra la formule

$$(428) \qquad \sum_{k=n-h+1}^{k=n+h} \psi(k) = \frac{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}}{t+1}\left\{(n+h)^{t+1}-(n-h)^{t+1}\right\}$$
$$+\lambda_1(n+h)^t-\lambda_2(n-h)^t$$

ou, par développement en série suivant les puissances croissantes de $\frac{h}{n}$,

$$(429) \qquad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\}n^t+\lambda_3 n^{t-2}h^2+\lambda_4\frac{n^t}{h}\,.$$

Soit maintenant le nombre h du même ordre de grandeur que $n^{\frac{2}{3}}$, nous en tirerons

$$(430) \qquad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\}n^t+\lambda n^{t-\frac{2}{3}}\,.$$

2) Pour $t = 1$ on déduit de la même manière

$$(431) \qquad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \left\{K(-2\,,\,0)+1\right\}n+\frac{\lambda n\log n}{h}\,.$$

Par la substitution

$$h = (\log n)^{1+\sigma}\,,$$

où $\sigma > 0$, on en tire

$$(432) \qquad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \left\{K(-2\,,\,0)+1\right\}n+\frac{\lambda n}{(\log n)^{\sigma}}\,,$$

mais en y posant

$$h = n^{1-\sigma}\log n\,,$$

où $0 < \sigma < 1$, on obtiendra

$$(433) \qquad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \left\{K(-2\,,\,0)+1\right\}n+\lambda n^{\sigma}\,.$$

3) Pour $0 < t < 1$ on aura

$$(434)\quad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\}n^t + K(t-1\,,\,0) - \frac{1}{t} + \lambda_1 n^{t-2}h^2 + \frac{\lambda_2 n^{\frac{t+1}{2}}}{h}\quad .$$

Soit le nombre h du même ordre de grandeur que $n^{\frac{5-t}{6}}$, nous en obtiendrons

$$(435)\quad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\}n^t + K(t-1\,,\,0) - \frac{1}{t} + \lambda n^{\frac{2t-1}{3}}\,.$$

4) Pour $t = 0$ on obtiendra

$$(436)\quad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \log n + 2K(-1\,,\,0) + \frac{\lambda_1 h^2}{n^2} + \frac{\lambda_2 n^{\frac{1}{2}}}{h}\quad ;$$

si le nombre h est du même ordre de grandeur que $n^{\frac{5}{6}}$, on en tire

$$(437)\quad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = \log n + 2K(-1\,,\,0) + \frac{\lambda}{\sqrt[3]{n}}\quad .$$

5) Pour $-1 < t < 0$ nous trouverons

$$(438)\quad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = K(t-1\,,\,0) - \frac{1}{t} + \left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\}n^t + \lambda_1 n^{t-2}h^2 + \frac{\lambda_2 n^{\frac{t+1}{2}}}{h}\quad ,$$

d'où l'on tire, h étant du même ordre de grandeur que $n^{\frac{5-t}{6}}$,

$$(439)\quad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = K(t-1\,,\,0) - \frac{1}{t} + \left\{K(-t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}\right\}n^t + \lambda n^{\frac{2t-1}{3}}\,.$$

6) Pour $t = -1$ on déduit

$$(440)\quad \frac{1}{2h}\sum_{k=n-h+1}^{k=n+h}\psi(k) = K(-2\,,\,0) + 1 + \frac{\lambda \log n}{h}\quad .$$

En y posant

$$h = (\log n)^{1+\sigma}$$

où $\sigma > 0$, on aura

$$(441) \qquad \frac{1}{2h} \sum_{k=n-h+1}^{k=n+h} \psi(k) = K(-2\ ,\ 0) + 1 + \frac{\lambda}{(\log n)^{\sigma}}\ ,$$

mais par la substitution

$$h = n^{1-\sigma} \log n\ ,$$

où $0 < \sigma < 1$, on en obtiendra

$$(442) \qquad \frac{1}{2h} \sum_{k=n-h+1}^{k=n+h} \psi(k) = K(-2\ ,\ 0) + 1 + \frac{\lambda}{n^{1-\sigma}}\ .$$

7) Pour $t < -1$ on aura

$$(443) \qquad \frac{1}{2h} \sum_{k=n-h+1}^{k=n+h} \psi(k) = K(t-1\ ,\ 0) - \frac{1}{t} + \frac{\lambda}{h}\ .$$

Des formules, que nous avons déduites dans ce paragraphe, résulte le théorème suivant:

Théorème XXXI. En désignant par n *un nombre entier positif et par* t *une quantité réelle quelconque, la somme des puissances* $t^{\text{ièmes}}$ *des diviseurs positifs d'un nombre entier aux environs de* n *est, en moyenne, approximativement égale à*

$$\left\{K(-t-1\ ,\ 0) + \frac{1}{t}\right\} n^t + K(t-1\ ,\ 0) - \frac{1}{t}\ .$$

Désignons par r un nombre entier positif, et posons dans ce théorème

$$t = 2r - 1\ ,$$

nous trouverons, en y appliquant l'équation (38), que la somme des puissances $(2r-1)^{\text{ièmes}}$ des diviseurs positifs d'un nombre entier aux environs de n est, en moyenne, égale à

$$\frac{B_r (2\pi)^{2r}}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2r}\, n^{2r-1}\ ,$$

et, en posant

$$t = 1 - 2r \ ,$$

nous trouverons, que la somme des puissances $(1-2r)^{\text{ièmes}}$ des diviseurs positifs d'un nombre entier est, en moyenne, égale à

$$\frac{B_r(2.1)^{2r}}{2.1.2.3....2r} \ .$$

§. 15.

SOMMATION DE QUELQUES SÉRIES, DONT LES TERMES CONTIENNENT DES FONCTIONS NUMÉRIQUES.

Soit la fonction $\psi(k)$, comme dans le paragraphe précédent, donnée par l'équation

$$\psi(k) = \sum_d d^t \ ,$$

où d est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre k, et posons dans le théorème IX

$$f(m) = m^t \ , \ f_1(m) = 1 \ , \ \Phi(m) = 1 \ , \ g(m) = \frac{1}{m^a} \ ,$$

nous en obtiendrons pour $a > 1$, $a - t > 1$

$$(444) \qquad \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{a-t}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^a} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^a}$$

et par conséquent, en y appliquant la formule (36),

$$(445) \quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^a} = \left\{K(-a\ ,\ 0) + \frac{1}{a-1}\right\}\left\{K(t-a\ ,\ 0) + \frac{1}{a-t-1}\right\} \ ,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XXXII. En désignant par a *et* t *des quantités réelles, qui satisfont aux inégalités*

$$a > 1 \ , \ a - t > 1 \ ,$$

et en posant

$$\psi(k) = \sum_{d} d^t \ ,$$

où d *est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre* k, *on aura*

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^a} = \left\{K(-a\ ,\ 0) + \frac{1}{a-1}\right\}\left\{\left\{K(t-a\ ,\ 0) + \frac{1}{a-t-1}\right\}\right. .$$

Substituons dans ce théorème

$$a = 2r \ , \ t = 2r - 2s \ ,$$

r et s étant des nombres entiers positifs, nous en obtiendrons d'après la formule (38) la proposition suivante:

Désignons par r *et* s *des nombres entiers positifs et posons*

$$\psi(k) = \sum_{d} d^{2r-2s} \ ,$$

nous aurons

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^{2r}} = \frac{4^{r+s-1} B_r B_s \pi^{2r+2s}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2r \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2s} \ .$$

Pour $r = s$ on en déduit la formule

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^{2r}} = \frac{4^{2r-1} B_r^2 \pi^{4r}}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 2r)^2} \ ,$$

en désignant par $\psi(k)$ le nombre des diviseurs positifs du nombre k.

Nous ferons une autre application de l'équation (444); désignons, à cet effet, par w une quantité positive, et distinguons les trois cas suivants:

1) Pour $t < 0$ nous obtiendrons de l'équation (444), en y posant $a = 1 + w$,

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^{1+w}} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1-t+w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}} \ ; \tag{446}$$

joignons à cette équation l'identité suivante

$$(447)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{K(t-1\,,\,0)-\frac{1}{t}}{k^{1+w}} = \left\{K(t-1\,,\,0)-\frac{1}{t}\right\} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}\,,$$

nous en déduirons

$$(448)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)-K(t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}}{k^{1+w}} = \frac{\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1-t+w}} - K(t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}}{w} \cdot w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}\,,$$

et d'après la règle générale pour évaluer des fractions, qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, nous obtiendrons de cette équation pour $w=0$, en y appliquant les formules (36) et (117)

$$(449)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)-K(t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}}{k} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\log m}{m^{1-t}}$$

ou

$$(450)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)-K(t-1\,,\,0)+\frac{1}{t}}{k} = -\frac{1}{t^2} - K(-1+t\,,\,1)\,.$$

2) Pour $t=0$ on déduit de l'équation (444)

$$(451)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^{1+w}} = \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}}\right)^2\,,$$

où $w>0$, et par conséquent, en y appliquant l'équation (56),

$$(452)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^{1+w}} = \left(\frac{1}{w}+K(-1\,,\,0)-K(-1\,,\,1)\frac{w}{1}+K(-1\,,\,2)\frac{w^2}{1\,.\,2}\ldots.\right)^2\,,$$

où $0<w<1$. En outre on obtiendra de l'équation (56)

$$(453)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\log k}{k^{1+w}} = \frac{1}{w^2}+K(-1\,,\,1)-K(-1\,,\,2)\frac{w}{1}$$

$$+K(-1\,,\,3)\frac{w^2}{1\,.\,2}-\ldots$$

et

$$(454)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2K(-1,0)}{k^{1+w}} = 2K(-1,0)\left\{\frac{1}{w} + K(-1,0) - K(-1,1)\frac{w}{1}\right.$$
$$\left. + K(-1,2)\frac{w^2}{1\cdot 2} - \cdots\right\},$$

et de ces trois formules on tire

$$(455)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - \log k - 2K(-1,0)}{k^{1+w}} = -K(-1,0)^2 - 3K(-1,1) + \varepsilon,$$

où $\varepsilon = 0$ pour $w = 0$ et par suite nous aurons

$$(456)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - \log k - 2K(-1,0)}{k} = -K(-1,0)^2 - 3K(-1,1).$$

3) Pour $t > 0$ nous obtiendrons de l'équation (444), en y posant $a = t + 1 + w$,

$$(457)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k)}{k^{t+1+w}} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{t+1+w}}.$$

De cette équation et de l'identité

$$(458)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\left\{K(-t-1,0) + \frac{1}{t}\right\} k^t}{k^{t+1+w}} = \left\{K(-t-1,0) + \frac{1}{t}\right\} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}},$$

on tire, en retranchant membre à membre,

$$(459)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - \left\{K(-t-1,0) + \frac{1}{t}\right\} k^t}{k^{t+1+w}}$$
$$- \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{t+1+w}} - \frac{K(-t-1,0) - \frac{1}{t}}{w} \cdot w \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{1+w}},$$

et de cette équation on obtiendra pour $w = 0$

$$(460)\quad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - \left\{K(-t-1,0) + \frac{1}{t}\right\} k^t}{k^{t+1}} = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^{t+1}}.$$

et par suite, en y appliquant l'équation (36),

$$(461)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - \left\{K(-t-1,0) + \frac{1}{t}\right\} k^t}{k^{t+1}} = -\frac{1}{t^2} - K(-1-t,1)\ .$$

Des formules (450), (456), (461) résulte ce théorème:

Théorème XXXIII. En désignant par t *une quantité réelle quelconque, et en posant*

$$\psi(k) = \sum_{d} d^t\ ,$$

où d *est égal successivement à tous les diviseurs positifs du nombre* k, *on aura*

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - K(t-1,0) + \frac{1}{t}}{k} = -\frac{1}{t^2} - K(-1+t,1) \text{ pour } t<0\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - \log k - 2K(-1,0)}{k} = -K(-1,0)^2 - 3K(-1,1) \text{ pour } t=0\ ,$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\psi(k) - \left\{K(-t-1,0) + \frac{1}{t}\right\} k^t}{k^{t+1}} = -\frac{1}{t^2} - K(-1-t,1) \text{ pour } t>0\ .$$

Maintenant nous évaluerons les sommes de quelques séries, dont les termes contiennent les fonctions numériques

$$\zeta_n\ ,\ \varphi(n)\ ,\ \chi(n)\ .$$

Posons, à cet effet, dans l'équation (363),

$$g(n) = \frac{1}{n^{1+w}}\ ,$$

nous en obtiendrons pour $w>0$

$$(462)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^{1+w}} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+2w}}}\ ;$$

joignons à cette équation l'égalité suivante

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{6}{\pi^2}}{n^{1+w}} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}}, \tag{463}$$

nous aurons

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n - \frac{6}{\pi^2}}{n^{1+w}} \tag{464}$$

$$= w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+2w}}}{w} \cdot \frac{1}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+2w}}}$$

d'où l'on tire pour $w = 0$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n - \frac{6}{\pi^2}}{n} = \frac{36}{\pi^4} \lim_{w=0} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+2w}}}{w} \tag{465}$$

ou

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n - \frac{6}{\pi^2}}{n} = \frac{72}{\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^2} \tag{466}$$

et par suite, d'après l'équation (36),

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n - \frac{6}{\pi^2}}{n} = \frac{72}{\pi^4} \left\{1 + K(-2, 1)\right\}. \tag{467}$$

De l'équation (405), mise sous la forme

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{2+w}} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+w}}}, \tag{468}$$

et de l'identité

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{6}{\pi^2}\, n}{n^{2+w}} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}} \tag{469}$$

on tire

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \frac{6}{\pi^2}\, n}{n^{2+w}} \tag{470}$$

$$= w \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}} \cdot \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+w}}}{w} \cdot \frac{1}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+w}}},$$

d'où l'on déduit pour $w = 0$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \frac{6}{\pi^2}\, n}{n^2} = \frac{36}{\pi^4} \lim_{w=0} \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2+w}}}{w} = \frac{36}{\pi^4} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^2} \tag{471}$$

ou, en y appliquant l'équation (36),

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \frac{6}{\pi^2}\, n}{n^2} = \frac{36}{\pi^4} \left\{1 + K(-2\,,\,1)\right\}. \tag{472}$$

De l'équation (418) on déduit pour $w > 0$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n) - 1}{n^{1+w}} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^{1+w}} - \left(\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}\right)^2}{\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}}}, \tag{473}$$

mais puisque on a, d'après l'équation (56),

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1+w}} = \frac{1}{w} + K(-1\,,\,0) - K(-1\,,\,1)\frac{w}{1} + K(-1\,,\,2)\frac{w^2}{1.2} - \dots\dots,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^{1+w}} = \frac{1}{w^2} + K(-1\,,\,1) - K(-1\,,\,2)\frac{w}{1} + K(-1\,,\,3)\frac{w^2}{1.2} - \dots,$$

nous obtiendrons de l'équation (473) pour $w = 0$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n) - 1}{n} = -2K(-1, 0) . \tag{474}$$

Nous résumons les formules (467), (472), (474) dans le théorème suivant:

Théorème XXXIV. Les fonctions ζ_n, $\varphi(n)$, $\chi(n)$ *ayant le même sens qu'auparavant, on aura*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n - \frac{6}{\pi^2}}{n} = \frac{72}{\pi^4}\left\{1 + K(-2, 1)\right\} ,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(n) - \frac{6}{\pi^2} n}{n^2} = \frac{36}{\pi^4}\left\{1 + K(-2, 1)\right\} ,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n) - 1}{n} = -2K(-1, 0) .$$

En remplaçant a par $-a$ dans l'équation (36) et en y posant $b = 0$ et $b = 1$, nous obtiendrons pour $a > 1$ les formules

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^a} = K(-a, 0) + \frac{1}{a-1} , \tag{475}$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\log n}{n^a} = K(-a, 1) + \frac{1}{(a-1)^2} , \tag{476}$$

et, en remplaçant a par $2a$ et par $a - 1$ dans l'équation (475), nous aurons pour $a > \frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2a}} = K(-2a, 0) + \frac{1}{2a-1} , \tag{477}$$

et pour $a > 2$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{a-1}} = K(-a+1, 0) + \frac{1}{a-2} . \tag{478}$$

Cela posé, substituons

$$g(n) = \frac{1}{n^a}$$

dans les équations (355), (356), (357), (358), (368) et posons

$$x = 1$$

dans les équations (404), (417); des formules ainsi obtenues et des équations (475), (476), (477), (478) résulte le théorème suivant:

Théorème XXXV. Les fonctions ε_n, η_n, ζ_n, ϱ_n, λ_n, $\varphi(n)$, $\chi(n)$ *ayant le même sens qu'auparavant, on aura*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^a} = K(-a\,,\,0) + \frac{1}{a-1} \quad \textit{pour} \quad a > 1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^a} = \frac{1}{K(-a\,,\,0) + \dfrac{1}{a-1}} \quad \textit{pour} \quad a > 1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_n}{n^a} = K(-2a\,,\,0) + \frac{1}{2a-1} \quad \textit{pour} \quad a > \frac{1}{2}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\eta_n}{n^a} = \frac{1}{K(-2a\,,\,0) + \dfrac{1}{2a-1}} \quad \textit{pour} \quad a > \frac{1}{2}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n^a} = \frac{K(-2a\,,\,0) + \dfrac{1}{2a-1}}{K(-a\,,\,0) + \dfrac{1}{a-1}} \quad \textit{pour} \quad a > 1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^a} = \frac{K(-a\,,\,0) + \dfrac{1}{a-1}}{K(-2a\,,\,0) + \dfrac{1}{2a-1}} \quad \textit{pour} \quad a > 1\,,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^a} = \frac{K(-a+1\,,\,0) + \dfrac{1}{a-2}}{K(-a\,,\,0) + \dfrac{1}{a-1}} \quad \textit{pour} \quad a > 2\,,$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\chi(n)}{n^a} = \frac{K(-a\,,1) + \dfrac{1}{(a-1)^2}}{K(-a\,,0) + \dfrac{1}{a-1}} \quad pour \quad a > 1 \ .$$

En désignant par r un nombre entier positif, nous obtiendrons de ce théorème et de l'équation (38) les formules

$$(479) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{2r}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_n}{n^r} = \frac{B_r(2\pi)^{2r}}{2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(2r-1)\,2r} \ ,$$

$$(480) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon_n}{n^{2r}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\eta_n}{n^r} = \frac{2\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(2r-1)\,2r}{B_r(2\pi)^{2r}} \ ,$$

$$(481) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n^{2r}} = \frac{B_{2r}(2\pi)^{2r}}{B_r(2r+1)\,(2r+2)\,\ldots\,(4r-1)\,4r} \ ,$$

$$(482) \quad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\zeta_n}{n^{2r}} = \frac{B_r(2r+1)\,(2r+2)\,\ldots\,(4r-1)\,4r}{B_{2r}(2\pi)^{2r}} \ .$$

LES ORAGES

DANS

LA PÉNINSULE SCANDINAVE

PAR

H. MOHN

ET

H. HILDEBRAND HILDEBRANDSSON.

(AVEC DOUZE PLANCHES.)

(PRÉSENTÉ À LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES D'UPSAL LE 12 FÉVRIER 1887).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1888.

I. INTRODUCTION.

C'est, comme on le sait, Le Verrier, qui le premier organisa pour l'étude des orages un réseau de stations pourvu des instructions et des formulaires, qui dans la suite ont été, presque sans changements, adoptés dans la plupart des pays. Les premiers réseaux de stations de ce genre, hors de France, furent établis par nous en 1867 en Norvège, et en 1871 en Suède. Ces observations faites en France et dans la Péninsule Scandinave, conduisirent à la découverte des lois générales de l'origine de ces phénomènes et de leur extension, aussi bien qu'à la fixation de leurs périodes diurne et annuelle.

Déjà M. Fron, qui a étudié, et qui étudie encore les observations des orages en France, trouva directement que les orages ne sont pas seulement des phénomènes localisés, mais qu'ils avaient des rapports intimes avec les minima barométriques, et qu'ils apparaissent dans la partie antérieure des tempêtes de tourbillons, puis, en suivant leurs mouvements (en général de l'ouest à l'est) s'avancent sur une grande étendue de la surface terrestre. En prenant dans chaque station la moyenne de l'heure du commencement et de celle de la fin des orages, et en transportant ces chiffres à leurs places respectives sur une carte, il fut facile de tracer des lignes à moments égaux, »*Lignes isochrones*», et par là d'avoir une représentation graphique du mouvement successif de l'orage. »Cette surface, dit-il [1]), dans laquelle se meuvent les nuées orageuses, peut être assimilée, comme première approximation, à un anneau ou tore animé d'un mouvement de rotation autour de son axe, situé à une certaine distance du sol, ayant une région dangereuse, et entraîné par le courant général». Mais outre ces orages se propageant régulièrement,

1) E. Fron: »Sur la marche des périodes orageuses en France, pendant l'année 1866». Annuaire de la Soc. Météorologique de France. T. XVI. p. 28. 1868.

il y avait et l'on observait dès le commencement »des orages erratiques». Déjà dans la préface du premier ouvrage sur cette question, dans l'Atlas des orages de l'année 1865, Le Verrier dit: »Souvent lorsque les nuées orageuses venant de la mer ont envahi le ciel, la foudre commence à gronder dans quelques départements de l'intérieur; elle éclate simultanément en plusieurs points du territoire», . . . Tandis que les orages s'avançant régulièrement semblent être à tel point indépendants de la nature du sol, que »si les accidents du sol, les chaînes de montagnes, les vallées, les forêts exercent une action sur les nuages inférieurs, leur influence est souvent peu considérable sur l'ensemble du phénomène, qui se propage dans les régions supérieures, avec sa vitesse propre et indépendante des saillies du sol».

Les recherches sur les orages en Norvège ont conduit à un résultat encore plus précis touchant les conditions atmosphériques dans lesquelles les orages se forment. Les conditions qui paraissent indispensables à la formation des orages sont *des courants ascendants contenant une quantité considérable de vapeur d'eau.* Pour que les courants ascendants s'établissent il faut en première ligne une température élevée. La vapeur d'eau contribue, par sa condensation dans la région des nuages, puissamment à la force des courants. On peut signaler deux espèces de conditions atmosphériques qui sont favorables à la formation des orages. Toutes les deux sont accompagnées de courants ascendants; la différence entre elles consiste seulement en ce qui concerne le mouvement. Pendant les mois d'été le rayonnement solaire produit une température élevée. L'air puise les vapeurs de la mer ou des nappes d'eau et monte en donnant lieu à la formation des nuages et des orages. On peut appeler ces orages, *orages de chaleur.* Ils se produisent le plus souvent dans les parties centrale et orientale du pays. Dans les orages de chaleur la force du vent, la vitesse des nuages, la force des éclairs, du tonnerre et de la pluie, ainsi que l'écart de l'état hygrométrique, sont plus faibles, pendant que la température est de beaucoup plus haute et la quantité de vapeur d'eau un peu plus élevée que dans les orages en général. Les orages de chaleur sont bornés à la saison chaude, l'insolation étant insuffisante pour les produire pendant l'hiver. La relation entre la période diurne des orages et les orages de chaleur est évidente; ils sont tous des résultats de la même cause: l'influence des rayons du soleil sur la terre. La condition la plus favorable à la formation des orages se présente, quand un centre de dépression barométrique, accompagné d'un mouvement tournant, venant de l'Atlantique, se

transporte vers la Norvège, ou au-dessus. C'est à la partie antérieure, ou orientale, d'un tel tourbillon à laquelle appartiennent la plupart des vents du sud avec leur grande quantité de vapeur et leur haute température, que se trouvent les vents les plus fréquents pendant les orages. Les orages appartenant à la partie postérieure des tourbillons, sont des phénomènes très rares. Les orages engendrés par les tourbillons sont beaucoup plus fréquents que ne le sont les orages de chaleur. La plupart des orages sur les côtes sont *des orages de tourbillon*, et les orages d'hiver ont toujours cette origine. On ne doit cependant pas regarder un orage de tourbillon comme formé d'une couche de nuages à hautes tensions électriques, que le vent pousse devant lui. On peut dire, que la propagation des orages n'est pas due seulement au transport des nuages, dont l'électricité devrait se perdre dans un long trajet, mais plutôt à la production nécessaire des conditions spéciales, nécessaires à la formation des nuages orageux, parmi lesquelles nous mettons en première ligne, *des courants ascendants chauds et humides* [1]).

Les recherches en Suède confirment pleinement les résultats auxquels on était parvenu en France et en Norvège. Dans ce pays aussi les orages sont de deux espèces différentes, orages de tourbillon et orages de chaleur. Toutefois en Suède il est *impossible de tracer une limite bien déterminée entre ces deux espèces d'orages.* En effet, elles se présentent souvent simultanément dans des parties du pays, voisines l'une de l'autre. Or, lorsque le baromètre accuse un fort minimum, pendant lequel le courant d'air ascendant est très nettement marqué, les orages offrent aussi une grande régularité dans leurs mouvêments progressifs; mais lorsqu'il y a une faible dépression, le tourbillon agit plutôt comme facilitant la formation des orages locaux aux heures les plus chaudes du jour et dans les endroits les plus propices. Dans ce cas, on ne peut pas plus remarquer de progression régulière que dans les orages de chaleur proprement dits.

Les orages les plus nombreux en Suède, sont ceux dits de chaleur. En revanche les orages de la fin de l'automne et de l'hiver, alors que les bourrasques sont fréquentes et bien caractérisées, sont des phénomènes extrêmement rares en Suède. Ici les orages de chaleur

1) Mohn: »Orages en Norvége pendant l'année 1867. Atlas météorologique de l'Observatoire Imp. de Paris. Année 1868».

Voyez aussi du même auteur. »Nogle Bemerkninger om Tordenvejrenes Dannelse, Om Tordenvejr i Norge. 1867, 68, 69 og 71». Vidensk. selsk. Forh. 1867—72.

sont aussi les plus violents, suivis parfois de grêle d'une violence peu commune [1]).

Dans ces derniers temps, de pareils stations pour l'étude des orages ont été établis dans plusieurs pays. Depuis 1879 on a établi un pareil réseau de stations en Bavière, auquel bientôt après se joignit un pareil réseau dans le Würtemberg. Ces travaux furent organisés par M. le Professeur M. Bezold, Directeur de l'observatoire météorologique à Munich, et les résultats sont chaque année publiés dans les annuaires [2]) de cet établissement.

Ici également la différence entre les orages de tourbillon et les orages de chaleur apparaît clairement. Les cartes météorologiques de Bavière se dressent d'une façon un peu différente de celles de France et de la Péninsule Scandinave. En effet, M. Bezold porte immédiatement sur les cartes l'heure *du commencement* et *de la fin* de l'orage à chaque station. Pour les orages de tourbillon on peut alors mener deux systèmes de lignes *isobrontes*, qui donnent le commencement et la fin de l'orage à chaque heure. L'étendue du pays qui se trouve entre les deux lignes à une certaine heure, marque l'aire sur laquelle l'orage se répand simultanément. On voit que cette aire forme une bande étroite dont la longueur est à peu près perpendiculaire à la ligne de propagation de l'orage.

Il a ensuite introduit sur les cartes météorologiques les lignes isobares et les lignes isothermes, les indications du baromètre et celles du thermomètre étant aussi exactement que possible réduites au niveau de la mer. Comme le nombre des stations de la contrée en question est très grand, les lignes isobares ont pu être menées pour chaque millimètre.

Il s'est montré alors [3]), que les orages apparaissent principalement, quand les lignes isobares montrent *une tendance à former des dépressions secondaires*, pendant que la température est élevée, et l'humidité de l'air considérable.

Immédiatement derrière la première ligne isobronte, et parallèlement à celle-ci, se trouve la limite antérieure de l'aire de la pluie. La

1) H. Hildebrand Hildebrandsson: Les orages de 1871 à 1875 en Suède. Atlas météorologique de l'Observatoire de Paris, T. VIII 1876, et en suédois dans le Bihang t. K. Svenska Vet. Akad. Handl. Bd. 4. N:o 13. — Voyez aussi: Les orages en Suède 1870. Upsala. Annuaire de l'université Royale. 1873. (En suédois).

2) Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern depuis 1879.

3) L. c. 1882. Voyez aussi: Oesterr. Zeitschrift 1883, p. 281.

position de cette ligne isobronte est encore remarquable *par un rétrécissement aussi bien des lignes isobares que des lignes isothermes.* La température, qui est élevée à la partie antérieure de l'orage, baisse tout à coup, quand l'orage éclate. La pression atmosphérique de son côté montre une hausse rapide. Celle-ci apparaît sur la carte comme une côte allongée, presque parallèle au bord antérieur de l'orage. Le gradient devient très considérable, et un vent violent souffle perpendiculairement aux lignes isobares dans la direction de la propagation de l'orage.

Un résultat semblable avait été obtenu par M. Köppen [1]) l'année précédente, en étudiant un orage spécial.

Les recherches les plus détaillées sur les orages sont sans doute les travaux connus de M. Ciro Ferrari en Italie. Depuis que la direction des stations météorologiques, organisées en 1876 par l'Observatorio di Brera à Milan, et dirigées par Frisiani et Schiaparelli, avait été transportée à l'Ufficio centrale di meteorologia à Rome, le nombre des stations s'est accru de telle sorte qu'aujourd'hui il forme, surtout dans l'Italie nord, un des réseaux les plus serrés que l'on puisse trouver. Ce n'est pas ici le lieu de s'engager dans un compte rendu des recherches importantes de M. Ciro Ferrari; mais nous renvoyons nos lecteurs aux ouvrages originaux [2]). Nous rappellerons seulement quelques uns des résultats les plus importants. La marche est représentée par des lignes isochrones, ou lignes passant par les points où *l'orage était à la même heure à son maximum* (face massima). Les orages se rangent sous trois types principaux: 1° Orages locaux de peu de durée et de peu d'étendue (orages de chaleur). 2° Orages qui se propagent sensiblement en ligne droite, de manière que les courbes isochrones sont sensiblement des droites parallèles. 3° Orages rayonnant tout autour d'un point, de telle sorte que les courbes isochrones sont sensiblement des arcs de cercle concentriques (2° et 3° orages de tourbillon). Par rapport aux relations des orages avec la situation générale de l'atmosphère en Europe, on trouve que si le centre barométrique le plus voisin ou le plus important, est un centre de haute pres-

1) Der Gewittersturm vom 9. August 1881. Annalen der Hydrographie und Maritimen Meteorologie. 1882, p. 595.

2) Osservazioni dei temporali raccolte nel 1880 e 1881. Annali del Ufficio centrale di meteorologia italiana 1881, 82. Voyez aussi: Ciro Ferrari: Untersuchungen über die dem »Ufficio centrale di meteorologia» mitgetheilten Gewitter-Beobachtungen vom Jahre 1881, dans la Deutsche meteorol. Zeitschrift, Oktober 1885, ainsi que les communiqués de M. Alfred Angot dans l'Annuaire de la Soc. Météor. de France, 1883, p. 349 et de M. C. Lang dans l'Oesterr. Zeitschrift. Août 1884.

sion, il n'y a ni orages ni pluie dans la Haute Italie; au contraire, la proximité ou la prépondérance d'un centre de basse pression est une condition favorable à la production du mauvais temps ou des orages.

En poussant plus loin cette étude, M. Ferrari a pu dresser le tableau suivant, qui donne le temps correspondant à chacun des types de la situation générale.

Situation générale.	Temps.
I. Hautes pressions	
bien définies ou rapprochées	— Très beau temps.
mal définies ou lointaines	— Beau temps.
lointaines vers le SSE—SSW	— Légères manifestations pluvieuses et électriques.
dans le NW—N—NE et basses pressions dans le S—ESE	— Beau temps.
II. Basses pressions	
sur la vallée même du Pô	— Pluies abondantes, orages.
rapprochées	— Pluies abondantes et orages.
larges et peu profondes	— Pluies.
au S—ESE	— Plutôt beau temps.
lointaines	— Pluies et orages.
en forme d'anse sur la vallée du Pô avec l'ouverture au NE—ESE	— Orages nombreux.
en forme d'anse sur la vallée du Pô, larges et peu profondes	— Pluies, orages peu nombreux.
III. Pression uniforme	— Généralement des orages.
dépendant de deux anticyclones voisins	— Toujours des orages.

Relativement à la température, M. Ferrari trouve que, dans la vallée du Pô, une période orageuse coïncide toujours avec une période de chaleur; toute élévation dans la courbe des températures diurnes est accompagnée d'une élévation correspondante du nombre des orages. Les orages sont donc déterminés par deux causes principales: l'une locale, une température élevée; l'autre générale, une dépression barométrique, ou plus généralement de certaines conditions barométriques; si la cause locale, c'est-à-dire la chaleur, fait défaut, on a seulement des pluies sans orages.

Un des phénomènes les plus remarquables qui accompagnent les orages, est un grand abaissement de la température; dans les orages de

1880, on a ainsi observé des abaissements rapides de 5°, 10° et plus. Cet abaissement de température est d'autant plus notable, que nous savons que l'orage est généralement précédé par un temps très chaud.

Chaque orage est aussi lié à un minimum d'humidité, dans la partie postérieure duquel il se trouve. Derrière ce minimum se trouve un maximum de vapeur d'eau. L'orage apparaît par conséquent sur la limite entre une région sèche et une région humide.

Enfin, un dernier point, que les recherches de M. Ferrari ont bien mis en évidence, est la liaison intime des orages, avec l'existence de petites dépressions barométriques locales. Ces petites dépressions, que l'on pourrait appeler *dépressions orageuses*, naissent avec l'orage, s'accentuent quand il se renforce, et meurent avec lui. L'orage a une tendance à rester dans la *partie postérieure* de ces petites dépressions, ou bien la phase maximum de l'orage se produit au moment du minimum barométrique. Autour de ces dépressions orageuses comme autour des dépressions ordinaires à plus large surface, le vent tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre.

De même qu'en Bavière, il n'a été possible de faire apparaître ces faibles dépressions, qu'en réduisant avec le plus grand soin les indications barométriques au niveau de la mer, alors que le réseau de stations est assez serré pour permettre de tracer les lignes isobares pour chaque millimètre. Ce n'est que par ce moyen qu'il a été possible de faire apparaître ces faibles dépressions aussi nettement qu'elles se présentent maintenant sur les cartes nombreuses de M. Ferrari.

M. A. Lancaster a aussi constaté la nature cyclonique des orages en Belgique dans sa discussion des observations d'orages de 1878 et 1879 publiée dans les annales de l'Observatoire Roy. de Bruxelles.

L'apparition fréquente des orages dans les anses des lignes isobarométriques (basses pressions en forme d'anse) est d'ailleurs un fait qui a souvent été observé par tous les savants, qui ont étudié journellement des cartes synoptiques. Déjà en 1877 ce fait a été constaté par la Deutsche Seewarte [1]), où ces anses sont appellées »Gewittersäcke».

Les orages sont donc en rapport intime avec la formation des minima secondaires ou satellites.

1) Monatliche Übersicht der Witterung. Juni 1877.

II. DESCRIPTION DE QUELQUES ORAGES PARTICULIERS.

1° L'orage de tourbillon le 6 Août 1881. La carte 1^{r} montre la distribution de la pression de l'air en Europe, le matin. Une haute pression règne dans l'Europe centrale et s'étend comme un coin par-dessus la Baltique et la Finlande, séparant deux dépressions, l'une dans le NE de la Russie, l'autre plus forte sur la mer entre la Norvège et l'Islande. Les lignes isobarométriques forment des traces d'anses (Gewittersäcke) au-dessus de la Norvège et de la Suède centrale, depuis Cap Stad jusqu'à Stockholm. — La carte 2 pour 9^{h} du soir montre que ces anses ont beaucoup augmenté en grandeur et embrassent la plus grande partie de la Scandinavie. Le lendemain, comme le montre la carte 3, un minimum secondaire s'est formé au-dessus du golfe de Bothnie. Cet état barométrique est, comme nous le savons, très favorable à la formation des orages.

En Norvège, l'orage éclata déjà vers les 5 heures du matin, (voyez la carte 15) près de Lister, et se propagea dans le courant de la matinée le long de la côte de Skagerack. De 10^{h}—11^{h} du matin il atteignit le Christianiafjord, où la vitesse de son mouvement de translation n'était plus que la moitié de celle au commencement de la journée. Vers le Nord, l'orage était limité d'une ligne entre Stavanger à l'ouest et le Ringerike à l'est, sans atteindre ni à Ullensvang, ni au lac Mjösen. Dans les environs du Christianiafjord la partie septentrionale des isobrontes est écartée un peu vers l'est. A 1^{h}30^{m} du soir on observa une chute de foudre à Lierne dans le département de Trondhjem. Dans l'après-midi un autre orage éclate à Christiansund vers 3^{h}; à 6^{h} cet orage sévit à Trondhjem et à Selbo avec de la grêle d'une violence extraordinaire.

Vers le midi, l'orage entra en Suède. La carte 15 montre comment la ligne isobronte 0^{h} s'étend du rivage du Cattegat à travers la partie est du Vermland. Aux stations peu nombreuses du nord du Vermland, et de la Dalécarlie, on n'a pas observé d'orage, mais à Ljusnedal à l'est de Röros sur la frontière de la Norvège, l'orage éclata dans le même temps. Il s'avança régulièrement dans l'après-midi de l'ouest à l'est, et éclata à 8^{h} du soir sur la côte du gouvernement de Stockholm. A 10^{h} du soir il passa au-dessus de la Gotlande. La carte 16 donne les lignes isochrones usuelles, déterminées par la moyenne de l'heure du commencement et de celle de la fin de l'orage à chaque station.

Comme l'on voit, il importe peu si en menant les lignes isochrones on emploie les heures du commencement ou la moyenne des heures du commencement et de la fin. En effet, l'étendue du pays qui en même temps est atteint par l'orage forme une bande étroite. Cette bande semble avoir eu une plus grande largeur dans la partie ouest du pays que dans l'est, où les orages ont eu une très courte durée.

La Carte 17 donne les lignes isothermes à 2^h du soir. Elle montre conformément à ce que M. Bezold a observé en Bavière et M. Ferrari en Italie, que la température baisse subitement avec le commencement de l'orage. Cependant *l'orage n'a pas formé une bande continue*, dirigée perpendiculairement à sa longueur. Aussi bien dans la partie nord que dans la partie sud de la région traversée par l'orage, il y a un grand nombre de stations où l'on n'a pas observé d'orage. Dans le sud, dans le Halland, les gouvernements de Kronoberg, de Jönköping, et de Kalmar, de même que dans le nord, dans les gouvernements d'Östersund et de Vesternorrland, l'orage n'éclata qu'à des stations fort distantes entre elles. Même sur l'étendue entre le Skagerack et la mer d'Åland, sur laquelle à peu près toutes les stations ont été atteintes par l'orage, celui-ci s'est présenté avec une force différente dans les endroits divers. De plusieurs stations on rapporte positivement, *que l'orage n'a pas passé au-dessus de la station même, mais dans le voisinage immédiat.* De Gothembourg on nous rapporte, que l'orage violent ne passa pas au-dessus de la ville, mais au sud de celle-ci. Dans la ville on remarqua en même temps quelques coups de vent, avec un peu de pluie.

A Odenstomta dans le gouvernement de Linköping se montrèrent d'énormes nuages orageux à l'ouest, mais quand l'orage s'approcha il s'était pour ainsi dire divisé, de sorte qu'à la station on n'observa qu'un vent violent et de la pluie pendant quelques minutes, tandis que les éclairs et le tonnerre se firent remarquer des deux côtés, aussi bien au nord, qu'au sud. Une pareille observation fut faite à Brännkyrka, au sud de Stockholm. Le nuage orageux sembla se partager, l'un passa au nord et l'autre au sud de la station. Des deux côtés, surtout au sud, l'orage était d'une violence extrême, tandis qu'à la station même il ne tomba qu'un peu de pluie.

Un peu au Nord de Hjulsjö, dans le gouvernement d'Örebro, il se forma, en même temps que l'orage passait sur la station, une trombe qui renversa un grand nombre d'arbres dans la forêt. Immédiatement à l'ouest de la station, la foudre est tombée sur l'église de Nykroppa et

l'a incendiée entièrement. De la grêle tomba sur 13 stations, toutes marquées sur la carte.

Un orage de tourbillon est par conséquent formé d'un grand nombre d'orages localisés, rangés en ligne et avec des espaces intermédiaires plus ou moins grands, le tout s'avançant comme une ligne de soldats. Combien de temps chaque orage particulier subsiste-t-il, on ne peut le dire, car il faudrait pour cela un réseau de stations extrêmement dense.

Probablement ils s'évanouissent après avoir parcouru quelques kilomètres, tandis que d'autres se forment aux points les plus favorables.

2° **Les orages du 5 Juillet 1874.** Les Cartes 4, 5 et 6 font voir la distribution de la pression de l'air le 5 Juillet au matin et au soir, et le 9 au matin. On voit comment à cette époque aussi il s'est formé pendant le cours de la journée une dépression secondaire au-dessus de la Péninsule Scandinave. La carte 18 montre qu'en Suède se sont formés deux orages de tourbillon. Les lignes isochrones sont menées d'après la moyenne des heures du commencement et de la fin. L'un commença dans le voisinage de Gothembourg à 7^h du matin, passa entre le Venern et le Vettern vers le NE, et cessa vers midi un peu au NE d'Upsala. Le second commença à 8^h du matin au sud de Halmstad et atteignit la côte de la Baltique à Vestervik à midi.

En Norvège on observa le même jour un orage dans la région entre Kongsberg et Elverum. Sur la plupart des localités au sud et au nord de Christiania, l'orage éclata entre 2^h—3^h du soir. Dans la province de Trondhjem on observa des orages le soir, dans quelques localités.

En outre un orage éclata vers midi au-dessus d'un grand nombre de stations le long de la côte du golfe de Bothnie entre Hernösand et Haparanda. À un petit nombre de stations dans l'intérieur du Jemtland et de la Laponie des orages ont été observés à diverses heures de la journée, mais de la plupart des stations dans ces régions, il ne nous est pas parvenu de rapports. Ces derniers orages ne peuvent bien être classifiés que comme des orages de chaleur.

Ceci confirme ce qui avait été trouvé précédemment, qu'en Suède les orages de tourbillon et les orages de chaleur ne sont pas aussi différents entre eux qu'en Norvège. Des orages avec une propagation régulière se montrent en certaines régions du pays, tandis que des orages localisés, irrégulièrement répartis, apparaissent le même jour en d'autres endroits.

Les deux orages de tourbillon, du jour en question, confirment en outre, ce que nous avons trouvé tout à l'heure, c. à. d., que les orages *n'étaient pas composés d'une bande continue, mais d'orages séparés, rangés en ligne.* Car il s'en faut de beaucoup, que toutes les stations dans les régions atteintes, aient eu de l'orage. Ainsi à Upsala il n'y eut au même temps, où, suivant l'indication des lignes isochrones l'orage aurait passé la station, ni tonnerre, ni pluie, et comme nous le verrons plus loin, les instruments n'ont accusé qu'une légère perturbation. Des exemples encore plus frappants de ce fait pourraient être cités, comme l'orage du 16 sept. 1878, qui était remarquablement violent et accompagné de grêle à Upsala, et qui causa de fortes perturbations sur les instruments; perturbations que nous étudierons dans la suite. Cet orage qui commença au sud du lac de Hjelmaren, s'avança régulièrement vers la région de Gefle, *et cependant 15 stations seulement l'ont rapporté.*

3° **Les orages de chaleur le 25 Juillet 1872** [1]). Comme nous l'avons fait voir plus haut, il a paru par les recherches précédentes, qu'en Suède les orages de chaleur se déchaînent souvent avec une violence inouïe. L'orage le plus violent, qui autant qu'on le sache ait jamais passé sur Upsala, et qui encore est de fraîche mémoire, était l'orage maintenant en question.

Les cartes 7 et 8 montrent la distribution de la pression de l'air le matin et à 2^h du soir le 25 Juillet 1872. Une haute pression règne, avec un maximum plus étendu au-dessus de la mer du Nord entre la Norvège et l'Islande, et une moindre au-dessus de la Suède méridionale, le Cattegat et la Baltique. Dans le creux entre ces maxima, ou sur le penchant NW de ce dernier, éclatèrent une foule d'orages, dispersés sur un grand nombre de stations. Ils sont représentés sur la carte n° 19, l'heure du *commencement* de l'orage étant marquée à chaque station. Si dans le courant de la journée deux orages nous ont été signalés, l'heure du premier a été souslignée. (Entre Upsala et Vesterås l'espace a manqué pour marquer toutes les stations. Dans le voisinage du chiffre 2,30, on remarque à plusieurs stations des orages entre 2^h et 3^h du soir).

Dans l'après-midi il y eut des orages entre 2^h—3^h, observés dans l'intérieur de la Norvège méridionale, dans le Hallingdal, Valders, auprès du Mjösen et à Elverum. Dans le Hallingdal on rapporte avoir vu un

1) Une monographie de cet orage a été publiée par M. S. Hjeltström: »Hagelfallet i Upsala, d. 25 Juli 1872. Upsala 1879.

météore en boule ayant l'apparence d'une étoile brillante, peut-être une foudre globulaire. Plus tard, à $5^h\ 20^m$, un orage éclata dans la province de Trondhjem. Nulle part l'orage ne paraît avoir eu un mouvement de translation régulier sur un espace plus considérable. A Upsala une haute pression avec une haute température avait règné depuis le 21. Le jour précédant, le 24, la moyenne diurne était de + 21°,2, max. + 28°,4 et min. + 12°,8. Le 25 dans la matinée, la température s'éleva considérablement jusqu'à ce que le maximum, immédiatement avant l'orage, fut atteint avec + 31°,9. La diminution de la température avec la hauteur semble avoir été remarquablement rapide. Par hasard on lut en même temps que le maximum cité, une température de + 34° sur les thermomètres placés dans le parc de l'Observatoire au-dessous de la colline sur laquelle se trouve le pavillon avec les appareils enregistreurs, et + 30°,0 sur un thermomètre en dehors de la partie nord-est du cabinet de physique, à une distance d'environ 550 m. à l'ESE du thermomètre enrégistreur, et 7—9 mètres plus haut que celui-ci. L'humidité absolue était considérable: 14,8 millim. à 10^h du matin. Comme d'habitude elle diminua ensuite graduellement, et n'était que 13,2 millim. à 1^h du soir immédiatement avant l'orage. Après le passage de l'orage elle monta de nouveau rapidement, et atteignit à 6^h du soir la valeur extraordinaire de 18,0 millm.

Les vents avaient été pendant plusieurs jours faibles, du sud; et le ciel presque complètement clair.

Dans ces conditions l'orage éclata subitement. A $0^h\ 52^m$ on entendit les premiers coups de tonnerre, et quelques minutes après l'orage éclata, précédé de quelques tourbillons et suivi de pluie et de grêle en quantité inouïe, venant du NW. A $1^h\ 18^m$ du soir la grêle commença dont les grains avaient environ 3 cm. de diamètre. Ils étaient formés de couches alternantes de glace blanche et transparente. Elle continua jusqu'à $1^h\ 40^m$ et dans ce court laps de temps, il tomba plus de 32 millim. d'eau. Les champs furent dévastés à l'W et au NW de la ville, perte évaluée à 13000 couronnes, et dans la ville plus de 5000 fenêtres furent brisées et les plantations endommagées. Nous étudierons plus loin la marche des instruments pendant l'orage.

L'aire qui fut atteinte par cet orage était extrêmement restreinte. *Elle avait tout au plus 4 à 5 kilomètres sur sa plus grande étendue.* Tout autour le beau temps continua. De l'autre côté de la rivière du Fyris l'orage n'atteignit qu'une partie minime de la ville.

III. VARIATIONS DES INSTRUMENTS PENDANT LE PASSAGE D'UN ORAGE AU-DESSUS DE LA STATION.

Les diagrammes ci-joints, I—XII, indiquent les variations observées à Upsala pendant le passage d'un orage. On y trouve les variations de la pression de l'air, celles de la température et celles de la direction du vent, les heures de la pluie, ou de la grêle, et en haut les directions des nuages qui ont été observées à cette occasion; les flèches ordinaires indiquent la marche des nuages inférieurs, et les flèches barrées la marche des Cirrus. Malheureusement l'anémomètre n'enregistre la vitesse du vent qu'en moyenne par heure.

Les diagrammes I, III, V et VII sont des exemples d'orages de chaleur typiques; II, IV et VI des exemples d'orages de tourbillon.

I° Le 7 Juin 1878, comme le montre la carte 9, une haute pression barométrique s'étendait sur la vallée du Rhin, un minimum dans le nord de la Péninsule Scandinave. La ligne isobare 755 qui traversait le pays depuis Trondhjem jusqu'à Réval, en passant par Upsala, dévie ensuite vers le nord de la Finlande. Elle présente deux sinuosités au-dessus de la Suède centrale et de la Baltique, qui montrent une tendance à former des orages et des minima secondaires.

De 9^h—11^h du matin, 1^h—2^h et 4^h—6^h du soir, des orages de chaleur dispersés éclatèrent au-dessus de la plus grande partie de Svéaland, depuis la côte NE du lac de Venern, jusqu'à la Baltique. Chaque orage se présentait à plusieurs stations, mais n'avait à chaque endroit qu'une étendue peu considérable, et un grand nombre de stations n'ont fait mention d'aucun orage, tandis que d'autres ont eu jusqu'à trois orages à de courtes intervalles. A Upsala l'état atmosphérique fut parfaitement tel qu'on pouvait l'attendre d'après la carte. Encore à 10^h du matin le vent était du SSW. la marche des nuages inférieurs du SW et celle des nuages supérieurs de l'W. A 10^h 30^m un nuage bleu foncé s'éleva au-dessus de l'horizon au NW. A 11^h précises commencèrent la pluie et la grêle, accompagnées de tonnerre. L'orage passa du NW au SE au-dessus de l'Observatoire. La pluie et la grêle ne durèrent que quinze minutes. A 11^h 25^m une forte étincelle passa par l'appareil télégraphique de l'Observatoire, et un courant continu suivit pendant plusieurs minutes toute la ligne. Un peu après midi l'orage cessa. Le vent sauta subitement d'abord au NW et au N, d'où il continua à souffler jusqu'à midi; il passa alors au NE et aussitôt après au SE, resta à peu près une heure

dans cette direction et fut vers 2^h du soir de nouveau au S, de sorte qu'il avait accompli une rotation complète. *A midi les Cirrus s'avançaient vers l'est, complètement indépendants du vent à la surface de la terre.* A $2^h\ 10^m$—3^h d. s. le même phénomène se renouvelle. Un nouvel orage, suivi de pluie et de grêle, passe de l'W à l'E au-dessus de l'Observatoire, et le vent fit de nouveau une rotation complète avec le soleil.

A $4^h\ 30^m$, on entendit le tonnerre du SW. A $5^h\ 45^m$—$6^h\ 10^m$ d. s. on n'entendit pas le tonnerre à Upsala, mais il tomba une violente averse, et le vent fit entre 5^h et 7^h encore une rotation nouvelle. A 7 h. les Cirrus allaient toujours de l'W à l'E. La température tombe subitement pendant la chute de la grêle et de la pluie. Le baromètre montre une *baisse faible* immédiatement avant le saut du vent, *suivie d'une hausse subite* au même instant que le vent passe au NW. Pendant cette hausse rapide du baromètre le vent augmente considérablement de force.

Le diagramme III montre un cas analogue à I. Les cartes 11 et 12 du 4 Août 1881 ressemblent beaucoup aux cartes 9 et 10, avec un maximum dans l'Europe centrale et un minimum dans le voisinage de Vardö. La ligne isobare de 755 millim. présente aussi des sinuosités remarquables vers le SW jusqu'à Stockholm et Christiania.

En Suède se formèrent des groupes d'orages de chaleur, dans la région entre le lac de Siljan au nord et le Bråviken au Sud. A Upsala on entendit le tonnerre depuis $0^h\ 45^m$—$1^h\ 40^m$ d. s. Entre $0^h\ 45^m$—$0^h\ 55^m$, tomba une averse de pluie, qui continua faiblement jusqu'à $1^h\ 26^m$, quand arriva une nouvelle averse, qui à $1^h\ 34^m$ changea en grêle violente avec des grains sphériques à moitié transparents, les plus grands ayant un centimètre de diamètre. La grêle ne dura que deux minutes, après quoi la pluie continua jusqu'à $1^h\ 50^m$ d. s. Le soir à $4^h\ 30^m$ commença une nouvelle pluie qui dura jusqu'à environ $5^h\ 30^m$. Le tonnerre ne se fit pas entendre, mais à peu près dans le même temps on entendit le tonnerre à deux stations dans le voisinage d'Upsala, c. à. d. à Frötuna dans le NE et à Krusenberg, situé à 7—8 kilomètres au S, auprès du lac de Mälaren. Entre 5^h et 6^h il y eut du tonnerre à plusieurs stations à l'W et au S du Bråviken.

Les mouvements des instruments à Upsala se voient par le diagramme III. Le vent, qui le matin avait peu à peu passé du SW à l'WSW, sauta au commencement du premier orage au NW, mais sans tourner comme dans le premier cas dans toutes les directions de la boussole, car il persista au NW—N jusqu'après 6^h soir; à cette heure il revint par l'W au SW. A 8^h du matin les nuages inférieurs ainsi que

le vent allèrent de l'WSW; une couche intermédiaire de l'W et les nuages les plus élevés du NW. *Ces derniers gardèrent la même direction sans changement jusqu'à 2h du soir.* La température baissa rapidement pendant les averses, surtout pendant la grêle, pour remonter ensuite de nouveau. La courbe baromètrique montre, bien que moins distinctement, les mêmes variations que dans le premier cas I, c. à. d. une baisse peu considérable suivie d'une hausse rapide.

Les diagrammes V et VII montrent la marche des instruments à Upsala pendant deux des orages les plus violents qui aient eu lieu en Suède. Tous les deux sont des orages de chaleur typiques. VII est l'orage du 25 Juillet 1872 qui a été décrit en détail, ci-dessus, tandis que V représente le violent orage du 28 Juin 1876. Les cartes 13 et 14 montrent les lignes isobares à 8h du matin et à 2h d. s. Une haute pression s'étend au-dessus des îles Britanniques; à l'E se trouve deux centres de dépression, l'un dans le SE de la Russie, l'autre derrière la Mer Blanche dans le voisinage de la Nouvelle Zemble, envoyant une anse de dépression à travers la Finlande, le golfe de Bothnie et la Suède jusqu'à Christiania.

Entre 1h et 6h d. s. éclatèrent des orages sur une cinquantaine de stations dans le Helsingland et la partie est du Svéaland à l'est des lacs de Siljan et de Hjelmaren.

A 1h d. s. le tonerre commença à se faire entendre à Upsala du NNW; à 1h 45m commença la tempête, et à 1h 55m une averse mêlée de grêle. Immédiatement avant le commencement de la grêle se forma une trombe en miniature près de la tour sud de la cathédrale; elle formait un cylindre complet qui se mouvait vers le SSW. Près d'un poteau de reverbère en fonte elle s'arrêta immobile pendant 10—15 secondes, passa la place entre la maison de l'Archevèque et le Séminaire, et se perdit auprès du monument de Gustave Adolphe. La colonne qui avait la même hauteur que les maisons, tournait dans un sens opposé à la marche des aiguilles d'une montre. A 2h 15m du soir le tonnerre était le plus fort et le centre de l'orage semblait se trouver au NE. Les diagrammes des deux orages montrent les mêmes traits que les précédents. Surtout les baisses de la température sont énormes, peut-être les plus grandes qui aient eu lieu à Upsala. La quantité de la pluie et de la grêle était aussi très considérable, étant de 28,7mm. le 28 Juin 1876 et de 33,82mm. le 25 Juillet 1872, dont plus de 32mm. pendant la première averse qui ne dura que 35 minutes.

Les diagrammes II, IV et VI montrent la marche des instruments pendant quelques orages de tourbillon. Les orages du 6 août 1881 et du 5 Juillet 1874 ont déjà été décrits en détail. Le 16 Sept. 1878 l'orage éclata seulement sur 15 stations, mais les lignes isochrones peuvent se mener facilement et montrent comment l'orage, qui vers le midi éclata dans le gouvernement de Nyköping au sud du lac de Hjelmaren, s'avança régulièrement du SW au NE vers le rivage du golfe de Bothnie, à l'embouchure du Dalelf. Le premier coup de tonnerre s'entendit à Upsala à 4^h 10^m du soir, et l'orage passa du SSW au-dessus de l'observatoire du 4^h 15^m à 4^h 50^m d. s. suivi de pluie et de grêle.

Les diagrammes II et IV montrent les mêmes phénomènes dans la marche des instruments que les précédents. L'orage du 5 Juillet 1874, qui s'arrêta à quelques myriamètres au NE d'Upsala, montre (diagr. VI) un mouvement des instruments peu important et très faible à 11^h d. m. —0^h 30^m du soir de la même allure que d'ordinaire, justement au moment où l'orage selon les isochrones devait passer au-dessus d'Upsala. *Néanmoins on n'y observa dans ce temps ni tonnerre, ni pluie à Upsala.* L'averse sans orage qui arriva environ 2^h 50^m d. s. fut suivie de variations encore plus marquées dans la marche des instruments.

Ces variations particulières indiquées dans la marche des instruments ne sont pas spécifiques aux orages. Elles accompagnent la grêle comme le montrent les diagr. VIII, IX et X. Le diagr. VIII montre même un des cas de grésil qui ont lieu si souvent au commencement du printemps. La température alors, loin d'être élevée, est souvent même très basse. Le grésil est cependant suivi d'une baisse encore plus grande de la température, d'une hausse de la pression de l'air, précédée par une baisse lente et par une rotation du vent contraire à la marche des aiguilles d'une montre.

Les variations des instruments s'étendent aussi à une certaine distance en dehors de l'aire au-dessus de laquelle la pluie et la grêle se produisent. Le 3 Juillet 1883 un orage violent passait tout à côté d'Upsala. A 8^h 50^m du soir il se trouvait à l'WSW et passait au S de l'Observatoire. Il n'y eut pas de pluie à Upsala. La marche des instruments est représentée dans le diagr. XI.

En d'autres occasions, lorsque l'orage est un peu plus éloigné, comme le 21 Mai et le 23 Juin 1886, on ne voit pas la moindre perturbation sur les courbes des instruments divers. Cependant il faut remarquer que les averses de pluie ou de grésil, qui arrivent quelquefois, quand le baromètre monte avec une rapidité considérable d'après le pas-

sage d'un grand minimum d'hiver, ne causent pas toujours une perturbation sensible dans la marche du baromètre, comme on le voit du diagramme XII.

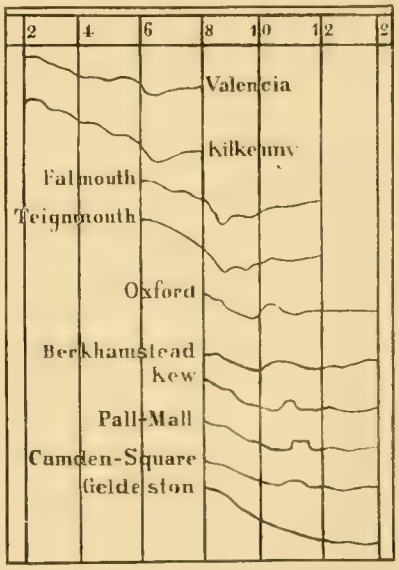
Les oscillations en question sont donc de même nature, aussi bien pendant les orages de chaleur, que pendant les orages de tourbillon, ainsi que pendant chaque pluie en forme d'averse.

La règle est simple:

1° Le baromètre baisse d'abord tantôt d'une manière assez rapide, tantôt d'une manière lente et presque insensible, puis remonte brusquement dès que la pluie commence.

2° La température baisse tout-à-coup pendant la pluie pour remonter ensuite rapidement.

Barogrammes, 13 Janvier 1886.



3° Le vent tourne subitement avec le soleil en même temps que le baromètre monte, et parcourt parfois tout le cercle de l'horizon.

4° Bien que, manquant d'un enregistreur anémométrique propre à cet effet, nous ne puissions pas le montrer par des chiffres ou des courbes, il est pourtant le cas, que la force du vent augmente considérablement, lorsque le baromètre commence à monter.

Ces variations des instruments pendant les orages et les averses de grêle et de pluie sont bien connues de chacun qui a étudié les courbes des appareils enregistreurs. Plusieurs de ces courbes barométriques irrégulières ont aussi été publiées ces dernières années par M. M. Mascart [1]), Hjeltström [2]), Köppen [3]), Clément Ley [4]), Scott [5]), Assmann [6]),

1) Journal de Physique 1879 p. 329—336.

2) La grêle à Upsala le 28 Juillet 1872. Upsala 1879. (En suédois).

3) Monatliche Uebersicht der Witterung, Juni 1877. Der Gewittersturm vom 9 August 1881. Ann. der Hydrographie und Maritimen Meteorologie 1882.

4) The Eurydice Squall. Symons Meteorological Magazine, April 1878.

5) Note on a sudden Squall on January 13th, 1886. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, Oct. 1886 p. 292.

6) Die Gewitter in Mittel-Deutschland. Mitteil. d. Verein f. Erdkunde. Halle 1886.

Sprung [1]), Abercromby [2]) etc. Nous reproduisons ici les barogrammes anglais du 13 Janvier 1886, pour la comparaison.

Selon MM. Köppen, Sprung et Abercromby certains orages, qui se forment dans la partie postérieure d'une anse de basse pression (» *V-shaped isobars*»), ont la forme d'une bande *continue* de plusieurs kilomètres de longeur. Cependant, dans notre pays nous n'avons pas trouvé d'orages qui éclatent simultanément dans tous les points d'une bande longue et étroite. Au contraire, cette bande est, pour ainsi dire, brisée, et consiste *d'un nombre d'orages rangés en ligne, avec des intervalles plus ou moins grands.* L'intensité de ces petits tourbillons orageux est fort variable. On voit quelques fois un de ces tourbillons se développer en véritable trombe.

Nous voyons par conséquent, *que la marche d'un orage au-dessus d'une station ressemble au passage d'un petit tourbillon.* M. Lancaster [3]) est arrivé au même résultat par l'étude des orages en Belgique 1878 et 1879 et par l'observation de l'enregistreur du vent pendant l'orage.

»En examinant», dit-il, »les feuilles de l'enregistreur de la direction et de la force du vent, nous remarquâmes que presque tous les orages donnaient lieu à une rotation plus ou moins complète de la girouette. Les exemples de ces mouvements de la girouette pendant les orages sont nombreux; ils se montrent chaque fois que le météore électrique se trouve au-dessus ou près du lieu d'observation. Ces phénomènes nous offrent dans un court espace de temps la reproduction de ceux qui s'observent sur une plus grande échelle pendant le passage des dépressions barométriques. Or la rotation de la girouette est le trait distinctif de ces dernières; il est donc naturel de considérer ces deux ordres de perturbations atmosphériques — les dépressions et les orages — comme des phénomènes de même espèce quant à leur nature cyclonique, et puisque les seconds ne prennent naissance que sous l'influence des premières, on peut les regarder comme de véritables satellites de celles-ci. Les mouvements du baromètre pendant les orages sont aussi des indications très précieuses quant à la nature de ces manifestations atmosphériques; comme pour la direction du vent, ils représentent dans des proportions très restreintes ce que nous observons lors du passage des dépressions étendues».

1) Lehrbuch der Meteorologie. Hamburg 1885, p 276—296.

2) Quarterly Journal of the Met. Soc. 1875. — Weather. London 1887.

3) Discussions des observations d'orages faites en Belgique pendant l'année 1876 et 1879. Annales de l'Observatoire Roy. de Bruxelles Serie II. T. I, II.

Sous un rapport pourtant les variations du baromètre pendant un orage, diffèrent de celles pendant le passage d'un tourbillon plus grand. *La baisse en est extrêmement lente et presque insensible, tandis que la hausse qui suit est très rapide.* Ceci est en relation directe avec la force du vent, qui est, comme on le sait, faible ou = 0 avant le commencement de l'orage, mais extrêmement violent pendant la hausse du baromètre. *De même pendant un orage, la pluie tombe pendant la hausse du baromètre, ou dans la partie postérieure du tourbillon.* Le mécanisme d'un tel tourbillon orageux est donc sans doute fort compliqué. M. Mascart[1]) a étudié les variations du baromètre pendant les orages, et cherche à les expliquer de la façon suivante. »L'examen de ces courbes met en évidence une relation très simple: *le baromètre monte dès que la pluie commence.* Toutefois il faut bien remarquer que cette règle n'est pas générale; elle ne se vérifie pas si le ciel est tout à fait couvert et si la pluie est fréquente et abondante, mais seulement lorsque le ciel est parcouru par des nuages isolés et qu'il se produit par intervalles des averses suivies d'éclaircies».

»La cause de ces changements rapides de pression, paraît très simple. Dans les circonstances que j'ai indiquées, l'état hygrométrique de l'air n'est pas très élevé. La pluie qui tombe d'un nuage, traversant un espace non saturé, s'évapore en partie, et cette vapeur développée sur place donne lieu a un accroissement local de la pression, accroissement très faible en général, mais qui peut dans certaines pluies d'orages, atteindre 2 millim. de mercure. L'influence d'une quantité de vapeur produite brusquement en un point, suffit pour amener une faible variation. La diminution de pression qui se manifeste pendant les orages peut s'expliquer par un phénomène inverse. Tout le monde a pu remarquer en effet, que les nuages orageux se forment sur place, et le passage d'une certaine quantité d'eau, de l'état de vapeur à l'état de gouttelettes, doit donner lieu à une diminution de la pression. On constate d'ailleurs sur les courbes que la chute de pression se fait généralement d'une manière plus lente et à différentes reprises, tandis que l'accroissement est beaucoup plus brusque».

Ces idées semblent nous donner l'explication principale du phénomène en question. Cette explication paraît aussi d'autant plus naturelle, comme nous avons montré, que *toute pluie qui arrive sous forme d'averse, même le grésil à une température au-dessous de 0°, est suivie de variations*

1) L. c.

identiques dans la marche des instruments, qu'elle soit suivie de tonnerre ou non. Nous arrivons ainsi à ce résultat surprenant, que pendant un orage, *le tonnerre même, ou les phénomènes électriques, sont des phénomènes secondaires.* Ceci s'accorde avec l'explication de M. Edlund[1]), de la production de l'électricité pendant les orages. »C'est», dit-il, »une liquéfaction *intense* et *violente* de la vapeur d'eau de l'atmosphère qui est la cause principale de la grandeur excessive de la tension électrique dans les décharges disruptives des orages» [2]).

On peut donc en conclure qu'une averse moins forte et violente, peut avoir lieu, sans que l'électricité atteigne la tension nécessaire pour la formation d'un orage.

IV. LES CONDITIONS MÉTÉOROLOGIQUES DES ORAGES DANS L'OSTLAND DE LA NORVÈGE.

Dans les études sur les changements du temps en été, dans l'Ostland, (c-à-d., le pays autour de Christiania, depuis l'embouchure du Christianiafjord au sud, jusqu'au lac de Mjösen au nord, et depuis Kongsberg à l'ouest, jusquà la frontière suédoise à l'est), études faites en 1884 et 1885 à l'Institut météorologique de Norvège, avec subvention spéciale accordée par le Storthing, dans le but de trouver des règles pour l'avertissement du temps aux agriculteurs, les conditions de la formation des orages furent l'objet d'un examen plus approfondi. Ce travail était confié à M. K. Hesselberg, à qui nous devons les résultats ici rapportés.

Après avoir examiné une suite de cas spéciaux des jours d'orages de l'année 1884, M. Hesselberg arriva aux résultats importants, relatés plus loin. Lorsqu'il fut constaté qu'au mois de Juillet 1883, il y avait eu des orages presque chaque jour dans l'Ostland, M. Hesselberg fut chargé d'essayer ses résultats sur les valeurs moyennes des éléments météorologiques de ce mois et il se trouva alors, qu'ils en étaient une complète vérification. Nous donnons par conséquent ici les cartes de la

1) Sur l'origine de l'électricité atmosphérique. Stockholm 1884.
2) L. c. pag. 79.

distribution de la pression de l'air, de la température, de l'état hygrométrique et du nombre des jours d'orages pour le mois de Juillet 1883. (Cartes 20—23).

D'après les recherches de M. Hesselberg, les conditions pour la formation d'un orage dans l'Ostland dans le courant de la journée, sont les états suivants de l'atmosphère, à 8^h du matin:

1) *Pression de l'air*, un peu haute, généralement avec plusieurs minima partiels, dans l'intérieur du pays. S'il n'y a qu'un seul minimum partiel de pression, il doit avoir une forme irrégulière, de sorte que la pression plus haute envoie de petits maxima partiels, en forme de coins ou de languettes dans l'intérieur de la région de pression inférieure. L'orage se forme alors dans les maxima partiels. Le cas le plus ordinaire est, qu'il y a là un minimum de pression dans l'est, au nord des lacs suédois, et un autre à l'ouest, au-dessus de la partie méridionale de l'intérieur de la Norvège. Ces deux minima sont séparés par une crête de pression un peu plus haute (»*Wedge-Shaped Isobars*»). C'est ici que se trouve le siège de l'orage. Ici soufflent à côté l'un de l'autre, à l'est le vent du nord, à l'ouest le vent du sud.

2) *Une température* élevée sur l'intérieur du pays, en règle répartie en deux maxima partiels, chacun appartenant à son minimum de pression. La température doit pourtant être élevée aussi entre ces maxima.

3) Deux ou plusieurs maxima partiels *d'humidité relative* dans l'intérieur du pays, en règle avec 90 % ou plus. Au moins deux maxima sont nécessaires, en général, l'un à l'est, et l'autre à l'ouest.

Tous ces maxima partiels sont généralement indiqués par les instruments de Carlstad d'un côté, et de Granheim (parfois aussi de Dovre et d'Ullensvang de l'autre côté, le maximum de température aussi par ceux de Christiania. La hauteur barométrique et la direction du vent à Eidsvold est aussi d'une grande importance, car le vent à Eidsvold pendant les orages est très souvent de direction opposée à celle du vent à Christiania; à Eidsvold un vent du nord souffle vers la dépression orientale, tandis qu'à Christiania un vent du sud souffle vers le minimum occidental.

S'il n'y a qu'un minimum de pression partiel au nord de Christiania, les orages dans l'Ostland sont causés par un maximum de pression partiel qui pénètre comme un coin ou une languette par-dessus le Christianiafjord dans le minimum, et alors celui-ci descend des deux côtés du fjord. La température est supposée réduite au niveau de la

mer. Les cartes ci-jointes montrent qu'elle était la situation moyenne atmosphérique au matin du mois de Juillet 1883.

Les cas discutés par M. Hesselberg doivent presque tous être classifiés comme des orages de chaleur. Il est probable que c'est à cette classe qu'il faut rapporter la plupart des orages d'été dans l'Ostland. Comme on le voit, et comme il apparaît encore plus clairement par l'examen de la statistique sur la fréquence des orages, les orages de chaleur, aussi bien que les orages de tourbillon, sont liés à des minima barométriques, mais que ces minima dans le premier cas sont plus faibles, plus localisés, d'une forme plus irrégulière, avec un mouvement de propagation plus lent et moins régulier, et accompagnés d'une température élevée et d'une humidité relative considérable. Les orages de tourbillon accompagnent les vents les plus chauds des grandes dépressions barométriques, surtout là où les lignes isobares ont des sinuosités. Les orages de chaleur accompagnent des dépressions d'été dans l'intérieur du pays, qui sont relativement faibles et qui sont immobiles, ou n'ont qu'un mouvement de propagation lent et irrégulier. Les premiers appartiennent principalement aux côtes, les autres à l'intérieur du pays. Les orages d'hiver sur les côtes sont des orages de tourbillon.

La différence entre les orages de chaleur et les orages de tourbillon, devient ainsi une différence de degrès et non de genre.

Les conditions nécessaires à la formation des orages, dans l'Ostland, indiquées plus haut, semblent devoir rendre la prévision de ces phénomènes comparativement facile. La difficulté se trouve cependant dans les ressources purement matérielles. L'institut météorologique de Norvège ne reçoit point de télégramme de matin, des stations comme Carlstad, Eidsvold, Granheim et Ullensvang. Parfois les conditions se sont pourtant trouvées telles, que les dépêches reçues à Christiania ont permis de voir que les conditions d'un orage étaient remplies, et l'on a prédit des orages qui ont éclaté plus tard dans la journée.

V. HAUTEUR DES NUAGES ORAGEUX.

Il paraitraît, par les différentes indications de la littérature touchant ce sujet, que la hauteur des nuages orageux est très variable à des occasions différentes et dans des endroits différents. Kämtz [1]) et M. Hann [2]) donnent des hauteurs considérables. Le premier marque la limite inférieure à 4000 pieds environ, le second à 1400 m., tandis que les sommets des nuages s'élèvent souvent plus haut que les sommets des montagnes de la Suisse. En revanche, M. Reimann [3]) dit que la plupart des orages dans les Mont des Géants (Riesengebirge), sont plus bas que le sommet de la Schneekoppe (1599 m.) de sorte que de 18 orages par an, 10 passent complètement sous le sommet de la montagne, et que le ciel au-dessus est complètement serein; 5—6 enveloppent le sommet de vapeurs, et 2—3 seulement se montrent complètement au-dessus. M. Kolbenheyer [4]) a vu au sommet de la Babiagora, sur la frontière de la Galicie et de la Hongrie (1725 m.), un orage au-dessous de lui dont les nuages laissaient complètement libre le sommet de cette montagne, ainsi que celui de la Brana dans le voisinage (1520 m.). Aussi d'autres voyageurs racontent avoir vu des orages au-dessous d'eux, comme M. le prof. Knop [5]), plus bas que 2400 mètres.

Cette question a beaucoup gagné en importance par les recherches de M. Sohncke [6]) sur l'origine de l'électricité des orages et de l'électricité ordinaire. En comparant les résultats obtenus par la navigation aérienne, il montre d'abord que la surface isotherme de 0° pendant les mois d'été les plus chauds se trouve à une hauteur de 3—4000 mètres, et qu'elle ne descend qu'éxceptionellement à 2000 m. Elle monte en moyenne pendant la matinée et descend de nouveau vers le soir. Au-dessus de la surface en question, les nuages se présentent sous forme de »*nuages de glace*», qui apparaissent comme des cirrus, tandis qu'au-dessous d'eux s'étendent »*les nuages aqueux*», Nimbus, Cumulus, etc. Il a de plus démontré expérimentalement, qu'un morceau de glace se

1) Vorlesungen über Meteorologie, Halle 1840, s. 428—30.
2) Meteorologische Zeitschrift. Juli 1886.
3) Meteorologische Zeitschrift. Juni 1886.
4) Meteorologische Zeitschrift. Octobre 1886.
5) Meteorologische Zeitschrift. Nov. 1886.
6) Der Ursprung der Gewitter-Electricität und der gewöhnlichen Electricität der Atmosphäre. Jena, 1885.

charge d'électricité, à 0°, quand on dirige sur lui un courant d'air chaud saturé d'humidité et de vapeur d'eau.

L'électricité atmosphérique se formerait ainsi selon lui par le frottement de deux courants d'air, dont l'un transporterait des aiguilles de glace, l'autre des gouttelettes d'eau. L'électricité des nuages orageux se formerait de même lorsque leurs sommets traverseraient rapidement le voile des Cirro-Stratus. Il cherche aussi à démontrer, qu'aux jours d'orages la surface isotherme de 0° se trouve extraordinairement bas, ce qui le rend plus facile pour le courant chaud d'air ascendent d'élever des »nuages aqueux» au-dessus de celle-ci.

Si maintenant nous allons examiner ces opinions différentes, nous aurons d'abord à nous appuyer sur les mesures directes entreprises par MM. Ekholm et Hagström à Upsala, sur les hauteurs des nuages [1]). Il apparaît de ces mesures nombreuses, qu'au-dessus de la plaine d'Upsala, les Cirrus flottent à une hauteur moyenne d'environ 9000 m. au-dessus du sol. Le mince voile des cirro-stratus se trouve en général à 1000 m. plus haut. Seulement quelques fois on a pu observer de véritables Cirrus au dessous de 6000 m. Les sommets des nuages orageux au contraire se trouvent ordinairement à une hauteur de 3000 m. Une seule fois, le 28 Juillet 1884, on mesura un pareil sommet à un peu plus de 5000 m. de hauteur. Un percement d'un voile de Cirro-Stratus ne peut donc être admis, du moins à Upsala. De plus il n'est même pas nécessaire que des formes de nuages plus élevées fassent leur apparence en même temps que les formes inférieures, — condition affirmée par plusieurs savants, comme étant indispensables pour que les pluies puissent avoir lieu. On voit souvent à Upsala, — et ce fait est bien constaté, — des orages, aussi bien que des averses ordinaires de pluie, venir de nuages bas, détachés, du type des Cm-Str, tandis que le ciel est d'ailleurs complètement serein. Pour ce qui regarde la base inférieure des nuages orageux, elle se trouve en moyenne à une hauteur de 1400 m. laquelle coïncide avec la valeur citée par M. Hann comme observée dans les Alpes.

Le cas ordinaire est au contraire, que les sommets des nuages s'entourent de vapeurs fines qui s'étendent de là dans toutes les directions et couvrent parfois une grande partie du ciel. A l'oeil ils ressemblent complètement à des Cirrus ou à des Cirro-Stratus. La formation

1) Ekholm et Hagström: Mesures des hauteurs et des mouvements des orages. Acta Soc. R. Sc. Ups. 1885; et un résumé des mesures nouvelles: Die Höhe der Wolken im Sommer zu Upsala, Meteor. Zeitschrift, März 1887.

de cette couche de nuages cirriformes a été bien décrite par M. Hann [1]). C'est cette couche qui a donné lieu à la supposition que les sommets des nuages orageux s'élèvent jusqu'à la région des vrais Cirrus. Les mesures d'Upsala montrent que ces »*faux Cirrus*» sont à la même hauteur que les sommets des Cm-Str eux-mêmes, c.-à.-d. à une hauteur moyenne d'environ 3000 m. La formation de ces »faux Cirrus» pourrait peut-être s'expliquer le plus aisément de la même façon que la formation du brouillard flottant au-dessus des surfaces d'eaux plus chaudes que l'air pendant un jour froid d'hiver. De la surface relativement chaude du sommet du nuage s'évapore de l'eau, qui à son tour se précipite en forme de cristaux de glace dans les environs plus froids. Mais de cette manière un frottement entre des courants entraînant de la glace et d'autres entraînant de l'eau, n'a guère lieu.

Que les nuages orageux n'atteignent pas les Cirrus, se prouve encore d'une autre manière, en ce que *la marche des véritables Cirrus n'est point affectée par les violentes perturbations des parties inférieures de l'atmosphère pendant les jours d'orages.*

Ceci apparaît en partie des diagrammes ci-joints. L'observation des nuages supérieurs n'est cependant pas toujours facile à éxécuter pendant l'orage même, car ils sont souvent cachés par des nuages plus bas, ou par des »faux Cirrus». Mais on peut prouver que la marche des nuages supérieurs et des nuages inférieurs, *par rapport les uns aux autres*, montre une irrégularité remarquable, presque toujours, quand le temps est orageux.

Il est prouvé, qu'en général [2]) les nuages inférieurs sont déviés à droite de la direction des vents à la surface de la terre, et de même que les nuages supérieurs tirent à droite des nuages inférieurs, de sorte que, si par exemple le vent vient du Sud, les nuages inférieurs vont en même temps du SSW ou du SW et les nuages supérieurs de l'W ou du NW. Il y a pourtant de rares exceptions à cette règle. Le *nombre de jours*, à Upsala, pendant les 12 années 1874—1885, que la marche des nuages supérieurs a eu par rapport aux nuages inférieurs une déviation contraire est de 218, ou à peu près 18 par an. Ces cas se répartissent ainsi sur les différents mois.

---

1) Zeitschrift der Oesterreich. Gesellschaft für Meteorologie 1873, p. 105; 1880, p. 434.

2) Hildebrand Hildebrandsson. Atlas des courants supérieurs de l'atmosphère. Stockh. 1877, p. 14. — Distribution des éléments météorologiques autour des minima et des maxima barométriques. Acta Soc. Reg. Sc. Upsala 1883, p. 10.

Janvier	1	Mai	30	Septembre	23
Février	7	Juin	34	Octobre	7
Mars	11	Juillet	49	Novembre	4
Avril	15	Août	31	Décembre	6
					218 jours.

Ces chiffres montrent un surplus considérable pendant les mois chauds sur les mois froids. La variation suit mieux la variation annuelle de la température que celle de la lumière, élément qui devrait être le plus important si toutefois la longueur du jour, dont dépend le nombre des observations, était la *seule* cause de la variation. Il paraît donc déjà par là que les phénomènes déterminés par une plus haute température, parmi lesquels nous avons en premier lieu les orages, doivent montrer leur influence sur les anomalies en question, c'est-à-dire sur la marche des nuages. Au moyen des régistres des orages, on a examiné à quels jours des 218 cités, on a observé un orage dans le gouvernement d'Upsala ou dans quelqu'un des gouvernements immédiatement voisins. Ces jours étaient répartis de la manière suivante. Dans la 2^{me} colonne on a donné la différence entre les nombres dans ce tableau et ceux dans le précédent.

	Orage	*Diff.*		*Orage*	*Diff.*
Janvier	0	1	Juillet	30	19
Fevrier	0	7	Août	15	16
Mars	1	10	Septembre	8	15
Avril	2	13	Octobre	0	7
Mai	13	17	Novembre	0	4
Juin	25	9	Décembre	1	5
				95	

Ainsi dans 95 cas, la marche des nuages supérieurs a eu une déviation anormale par rapport aux nuages inférieurs pendant les jours d'orages. Quant aux conditions particulières dans lesquelles cet état abnorme a lieu, ce n'est pas ici le lieu de s'engager dans des examens plus détaillés. Quiconque s'est occupé d'étudier les mouvements des nuages supérieurs, sait bien, que lorsque des minima secondaires se forment, la marche des nuages supérieurs n'est pas déterminée par eux, mais par le minimum principal. Ce n'est que lorsque ces satellites ont grandi et se sont éloignés du minimum principal, qu'ils commencent à régler eux aussi les mouvements des courants supérieurs. Comme d'autre part, les orages sont en rapport intime avec ces satellites, et souvent apparaissent à l'intérieur de ceux-ci, il s'en suit, qu'au moins en général, les mouvements des nuages supérieurs ne sont pas influencés par les

mouvements parfois violents dans les régions inférieures de l'air, pendant les orages.

Ces considérations et plus encore les mesures directes des nuages, déjà cités, prouvent donc, que les nuages orageux se trouvent à un niveau inférieur à celui des Cirrus, et qu'ils se trouvent en moyenne entre 1400 et 3000 m. au-dessus de la surface terrestre. A savoir, s'ils se trouvent à des hauteurs diverses aux divers endroits de la terre, est une question qui ne peut être résolue que par des mesures directes.

VI. ÉCLAIRS SANS TONNERRE EN SUÈDE ET ORAGES CORRESPONDANTS EN 1871, 1872 ET 1873.

Pour vérifier que les éclairs secs ne sont, au moins dans notre pays, que le reflet d'un orage éloigné, chose fort discutée en d'autres pays, nous donnons ici la liste complète des observations des éclairs secs observés en Suède pendant les trois années 1871, 1872 et 1873. Nous voyons par là, qu'on peut avec peu d'exceptions toujours indiquer un orage dans la même direction dans laquelle les éclairs secs ont été observés [1]). Le tableau contient pour chaque observation: 1. *Le jour*, 2. *l'heure*, 3. *la station* et 4. *la direction*, dans laquelle on a observé les éclairs secs.

Éclairs secs.			Orage correspondant.
1871.			
16	Juin ?	Östergarn (Gothland) NW et E.	À Vesterhejde (Gothland) au soir.
27	Juillet	9^h s. Råneå (Norrbotten) SW.	Un orage avait passé au-dessus de la station 4^h—5^h s. de l'E—W.
4-5	Août	11^h s.—1^h m. Viska (Laponie) SW.	Le 4 au soir orage à Ljungå en Jemtland.
4	„	11^h 30^m Sko (Upsala) S.	Orage au soir dans le gouvernement de Vesterås et au matin suivant dans celui de Nyköping.
9	„	9^h—11^h 30^m s. Skönvik (Sundsvall) NNW—E.	Un grand orage passe le soir de la frontière norvégienne par Jemtland—Hernösand et disparaît pendant la nuit au-dessus du golfe de la Bothnie.
„	„	10^h s. Forsa (Gefleborg) W.	

1) Nous devons les renseignements sur les orages en Danemark à la bienveillance du Capitaine G. Rung à l'Institut météorologique de Copenhague.

10	Août $8^h\ 30^m$ s. Sinclairsholm (Scanie).	?
25	„ $8^h\ 30^m$ s. Glimåkra (Scanie)?	Tempête pendant la nuit. Un orage éclate sur la station au matin suivant.
2	Sept. au soir Oxelösund (Nyköping)?	Un orage de tourbillon éclata le soir du 2 Sept. au-dessus de la côte ouest de la Suède et passa pendant la nuit du 2—3 à travers le pays et au-dessus de la Baltique. Carlscrona fut atteint à $2^h\ 15^m$—$3^h\ 30^m$ m., Christianstad à $0^h\ 30^m$—$1^h\ 45^m$ m.
„	„ $7^h\ 50^m$—$8^h\ 30^m$ s. Alkvettern (Örebro) SSW.	
„	„ 8^h—$9^h\ 30^m$ s. Uddevalla W.	
„	„ $8^h\ 30^m$ s. Carlscrona W.	
„	„ 8^h s. Tomarp (Christianstad) NW.	
1872.		
31	Janv. matin et soir Kristdala (Kalmar)?	?
„	„ „ „ „ Locknevi „ N.	?
22-23(?)	Avril nuit Hemse (Gothland) W.	Probablement le 23—24. Cette nuit, orage violent à plusieurs stations de la Suède méridionale.
27	„ $8^h\ 30^m$ s. Skönvik (Sundsvall) N.	?
14	Mai 10^h s. Skeppsholmen (Elfsborg) S.	Orage au soir dans le Halland.
1	Juin $10^h\ 30^m$ s. Harg (Stockholm) SE.	A $7^h\ 50^m$—$8^h\ 40^m$ du soir un orage passa Osbyholm, situé dans le SSE de Harg, en s'éloignant au-dessus de la Baltique.
„	„ au soir Dingelvik (Elfsborg) S.	Au-dessus du Cattegat?
13	„ $10^h\ 30^m$ s. Ferglanda (Elfsborg) SW.	Orage au soir dans le Halland.
2	Juillet 9^h s. Jäder (Nyköping) NE.	Orages de chaleur à une foule de stations à diverses heures de la journée.
4	„ 10^h s. Flisby (Jönköping) ENE.	Orage à 4^h s. à Låckebo, situé à l'E de Flisby.
10	„ 10^h s. Tomarp (Christianstad) W.	Orage en Danemark.
13-14	„ nuit Gustafsberg (Uddevalla) SE.	Orage à plusieurs stations entre le Vettern et la partie NE de la Scanie.
„	„ „ Björkholm (Halland) E.	
14-15	„ „ Björkholm (Halland) W.	Orage en Danemark.
„	„ „ Löpanäs (Vexiö) SE (SW?)	?
15	„ au soir Halmstad SV.	Orage en Danemark.
„	„ „ „ Björkholm (Halland) W.	„ „ „
„	„ „ „ Löpanäs (Vexiö) E.	Plusieurs orages ont passé ce soir au-dessus de quelques stations dans les gouvernements de Linköping et de Vexiö se dirigeant vers la Baltique.
„	„ „ „ Glimåkra (Christianstad) E.	
16	„ 10^h s. Jäder (Nyköping) SW.	Le tonnerre se fit entendre à la station Jäder 3^h—$4^h\ 30^m$ s. Orage de chaleur à plusieurs stations ce jour là. Au soir, 9^h — minuit, orages à la côte nord du Venern.
„	„ 10^h—12^h s. Holmstorp (Örebro) S.	

3	Août	10^h s. Halmstad SW.	Orage en Danemark.
„	„	10^h s. Kärne (Carlstad) E.	Orages à plusieurs stations du gouvernement d'Örebro ce soir.
4	„	11^h 30^m—minuit Kärne (Carlstad) SE,	Orages sur le rivage nord du lac Hjelmar pendant la nuit.
9	„	10^h - 11^h s. Jäder (Nyköping) E.	En même temps orage à la station Tumbo au SE de Jäder.
11	„	depuis 10^h s. Noresund (Vermland) E.	L'orage avait probablement éclaté à ce moment à l'E de cette station; vers minuit on vit les premiers éclairs à Carlstad. L'orage alla pendant la nuit sur une bande étroite de là au-dessus d'Örebro vers le lac de Mälaren, qu'il atteignit vers 6^h m. le 12.
„	„	9^h—10^h 30^m s. Tomarp (Christianstad) S.	Sur le Baltique?
11-12	„	nuit Lagmansered (Elfsborg) S.	Orage en Danemark le 11 et à Tofter (Bohuslän) 0^h—3^h m. le 12.
12	„	9^h—10^h s. Holmstorp (Örebro) S.	Orages à plusieurs stations entre le Venern et le Vettern ce soir.
12-13	„	nuit Lagmansered (Elfsborg) S.	Orage en Bohuslän 2^h—3^h m.
13	„	9^h—10^h s. Tumbo (Nyköping) E.	Un orage avait passé au-dessus de la station du SW—E à 5^h—7^h s. Orages à beaucoup de stations ce même jour.
31	„	au soir Björkholm (Halland) S.	Sur le Cattegat?
1	Sept.	9^h—10^h s. Tomarp (Christianst.) W.	?
5	„	10^h 45^m s. Hofby (Skaraborg) NW.	A 10^h du soir un nuage sombre avait passé la station du S—N avec une pluie forte.
6	„	2^h—3^h m. Nora (Vesterås)?	Orage d'une violence extraordinaire aux environs du Mälaren.
„	„	2^h m. Skinnskatteberg (Vesterås)?	
6-7	„	nuit Sibo (Gefleborg) N—NE.	Un orage venant le soir du Jemtland a passé pendant la nuit au nord de la station vers le golfe de Bothnie.
„	„	„ Björn (phare au SE de Gefle) N.	
6	„	10^h—11^h s. Tomarp (Christianstad) NW.	Orage à Glimåkra au N de Tomarp à 7^h—11^h m.
7	„	7^h 45^m s. Kärne (Carlstad) NNE.	Orages à plusieurs stations dans la Dalécarlie et dans le gouvernement de Gefleborg.
8	„	au soir Hemse (Gothland) SW.	Orages à plusieurs stations dans le gouvernements de Jönköping et de Kalmar. Dans la nuit l'orage atteignit Visby.
11	„	11^h 30^m s. Kärne (Carlstad) N.	Un seul éclair. Le nord du Vermland et la partie NW de la Dalécarlie ont peu de stations.

20	Sept. au soir Björn (phare au SE de Gefle) SSE.	Un orage fort passa ce soir de l'ouest à l'est au-dessus de plusieurs stations du gouvernement de Nyköping et s'éloigna vers la Baltique.
„	„ „ „ 3 stations (Upsala) SE.	
„	„ „ „ Sätra (Vesterås) E(SE?)	
„	„ „ „ Hjulsjö (Örebro) W(E?)	
„	„ „ „ Visby (Gothland) NW.	
„	„ „ „ Hemse „	
22	„ 8h s. Jäder (Nyköping) S.	Orage très fort à la plupart des stations de Gothland.
„	„ 7h—9h s. Björkholm (Halland) SW.	Sur le Cattegat?
23	„ 7h—8h s. Jäder (Nyköping) S.	Un orage passe ce soir Oxelösund et s'éloigne au-dessus de la Baltique.
24	„ 6h—7h s. Jäder (Nyköping) N.	?
„	„ 8h—10h s. Sko (Upsala)?	
24-25	„ nuit Gustafsberg (Bohuslän) S.	Au-dessus du Cattegat?
25	„ 6h—8h s. Jäder (Nyköping) S.	Orage en Danemark.
„	„ 7h s. Getinge (Halland) W—N.	
„	„ au soir 3 stations en Scanie W.	
28	„ au soir Hellefors (Örebro) S.	Orage sur le rivage nord du Venern, à plusieurs stations entre le Venern et le Vettern, dans le Bohuslän, et au S du Vettern.
„	„ „ „ Noresund (Vermland)?	
„	„ „ „ Getinge (Halland)?	
„	„ „ „ Låckebo (Kalmar)?	
„	„ „ „ Tomarp (Christianstad)?	
„	„ „ „ Glimåkra „ ?	
„	„ „ „ Gumlösa „ NW.	
30	Octobre au soir Hjelmsäter (Skaraborg) W.	Orage à Ferglanda de l'autre côte du Venern.
„	„ 8h 30m s. Halmstad SW.	Sur le Cattegat?
31	„ 4h 50m—5h 50m m. Tomarp NW.	A 4h 30m m. orage à Glimåkra au nord de Tomarp.
25	Nov. 7h s. Sparrsäter (Skaraborg) NE.	?
	1873.	
27	Mai 9h 40m s. Gumlösa (Christanstad) WNW.	?
4	Juin 10h s. Falun W.	Orage à Mora à l'W de Falun.
16	„ au soir Mora (Dalécarlie) N.	Orage à Lillherrdal dans le Herjeådal.
16	„ 9h 30m s. Falun SW.	Un orage passe 6h—10h s. au-dessus de Leksand, Grängshammar et Hedemora, ou à SW—S de Falun.
15	Juillet 9h 25m—11h s. Tumbo (Nyköping) SW.	Un orage violent passe ce soir au-dessus de la Suède méridionale du Cattegat jusqu'à Gothland.

27	Juillet	10h s. Tomarp (Christianstad) W.	Orage en Seland (Danemark) et la partie NW de la Scanie ce soir.
„	„	9h s. Glimåkra „ SW.	
28	„	9h—10h s. Vestervigge (Östersund) WNW.	Orage à Undersåker (Gouvernement d'Östersund).
„	„	9h s. Ljusnedal (Östersund) NE.	
3	Août	10h—12h s. Buhlsjö (Linköping) E.	Un orage a passé le Mälaren de l'ouest à l'est pendant l'après-midi. Probablement sur la Baltique au soir.
11	„	1h—3h 30m m. Ving (Elfsborg) WSW.	Orage dans Halland 1h 30m—5h m.
13	„	? Uddnäs (Vesterås) SE.	?
17	„	9h s. Tånnö (Jönköping) E.	Orage en plusieurs endroits du Gothland à 8h—11h s.
„	„	9h—10h s. Stafsinge (Halland) ?	
22-23	„	nuit Kockhem (Skaraborg) SSW—NW.	Orage en Danemark, qui passe le Cattegat et éclate sur le Bohuslän pendant la nuit.
„	„	10h—11h s. Uddevalla SW.	
„	„	nuit Vese (Bohuslän) S.	
„	„	9h—11h s. Björkholm (Halland) WSW.	
„	„	10h s. Malmö SE et NNW.	
24	„	9h 30m s. Degeberg (Skaraborg) W.	Sur le Cattegat probablement. L'orage éclate à Halland le jour suivant.
„	„	au soir Halmstad WSW.	
26	„	au soir Halmstad WSW.	Orage en Danemark arrivant en Halland au soir.
„	„	9h s. Vallen (Halland) SSW.	
„	„	au soir Borrby (Scanie) SE—S—W.	
„	„	8h—10h s. Glimåkra (Scanie) SW—S.	
„	„	9h s. Gumlösa (Scanie) SW.	
„	„	9h—12h s. Skanör „ S—W.	
„	„	7h 30m s. Malmö „ SW—NW.	
27	„	au soir Borrby (Christianstad) S—W.	Orage en Danemark et à plusieurs stations de la Suéde méridionale.
„	„	8h s. Malmö SW.	
28-29	„	7h—7h 30 s. Ving (Elfsborg) E.	Orage faible au S du Vettern au soir.
„	„	au soir Halmstad WSW.	Orage en Danemark, qui a passé le sud de la Suède pendant la nuit, et sévi avec grande violence à Christianstad et à Kalmar au matin suivant.
„	„	? Vallen (Halland) ?	
„	„	nuit Björkholm (Halland) WSW.	
„	„	au soir Borrby (Scanie) S—W.	
„	„	„ „ Vese (Bohuslän) S.	
29	„	9h 15m s. Tumbo (Nyköping) NE(NW?).	Orage en Vermland, qui avance aux environs du lac Mälaren.
„	„	au soir Halmstad WSW.	Orage en Danemark, qui arrive à Malmö le 30 à 6h 30m du matin.

30	Août	au soir Halmstad WSW.	Orage en Danemark, qui arrive à Halland le 31 à 5^h du matin.
1 (2?)	Sept.	9^h—10^h s. Degeberg (Skaraborg) S.	Orage fort à plusieurs stations de la Scanie le 2 au soir.
4	„	8^h—9^h s. Glimåkra (Christianstad) SW.	
„	„	? Malmö S et NW.	
4	„	9^h s. Nora (Örebro) S.	Orage sur plusieurs stations entre le Venern et le Vettern.
„	„	10^h s. Degeberg (Skaraborg) W.	Un autre orage venant du Cattegat descend sur le nord du Halland à 9^h 30^m s. Orages en Danemark simultanément.
„	„	8^h s. Halmstad ?	
„	„	8^h 30^m s. Björkholm (Halland) S.	
„	„	8^h 30^m Vallen (Halland) ?	
„	„	9^h s. Tomarp (Christanstad) NW.	Orage à Carlscrona.
„	„	9^h 30^m s. Esphult „ NW.	
5	„	8^h 30^m s. Noresund (Vermland) E.	Orage à plusieures stations entre le Vermland et le lac de Mälaren.
„	„	au soir Dix stations au nord et au sud du Mälaren SW—NE.	
„	„	8^h s. Tomarp (Scanie) S.	Orage à Borrby au côte SE de la Scanie.
„	„	10^h—11^h s. Uddevalla (Bohusl.) W.	Au-dessus du Cattegat?
7	„	au soir Tomarp (Scanie) ?	Orage à plusieurs stations de la Suède ce soir.
9	„	au soir Löpanäs (Kronoberg) S.	Orage à plusieurs stations entre le Cattegat et la Baltique ce soir; orage d'une grande violence à Copenhague.
„	„	„ „ Skeppsholmen (Elfsb.) S.	
„	„	8^h 25^m s. Björkholm (Halland) SE—SW.	
„	„	9^h—10^h s. Låckebo (Kalmar) SW.	
„	„	au soir Glimåkra (Scanie) W.	
„	„	„ „ Tomarp „ ?	
„	„	au soir Söderåkra (Kalmar) E.	Au-dessus de la Baltique?
10	„	9^h 40^m s. Bjästa (V. Norrland) ESE.	Au-dessus de la Golfe de Bothnie?
„	„	8^h s. Björkholm (Halland) E—SE.	Orages à plusieurs stations en Danemark, en Halland, en Scanie et en Blekinge ce soir.
„	„	au soir Tomarp (Scanie).	
10-11	„	nuit Ljungby (Kalmar) E—S.	Au-dessus de la Baltique?
12	„	8^h s. Nora (Örebro) SW.	Orage à plusieurs stations au sud de la Suède.
„	„	7^h s. Gillberga (Vermland) NW.	?
14-15	„	nuit Vese (Bohuslän) SSW.	Orage en Danemark le 14 et à Halmstad au soir.
18-19		„ nuit Björkholm (Halland) ?	Orages à plusieurs stations de la Suède méridionale.
„		„ 9^h 30^m s. Esphult (Scanie) ?	
„		„ 8^h 30^m s. Glimåkra „ SE.	

14-15	Oct.	$6^h\ 30^m$—8^h s. Halmstad ?	Orage en Danemark qui parvint au côte sud de la Scanie vers minuit.
„	„	nuit Björkholm (Halland) W—SW.	
„	„	au soir Tånnö (Jönköping) S.	
„	„	8^h s. Tomarp (Scanie) W.	
„	„	9^h s. Glimåkra „ SW.	
15-16	„	nuit Björkholm (Halland) W—SW.	Cette nuit de nouveau un orage venant de Danemark fait irruption au sud de la Scanie.
„	„	minuit Tomarp (Scanie) W.	
22	„	10^h—11^h s. Ving (Elfsborg) W.	Orage en Bohuslän.
25	„	$8^h\ 30^m$ s. Bred (Upsala) W.	?
„	„	9^h—10^h s. Gumlösa (Scanie) SW.	
15	Nov.	au matin Löfånger (Vesterbotten) ?	?

Ainsi, presque toujours quand les éclairs n'ont pas été observés au-dessus de la mer, on a pu signaler un orage à peu près dans la direction indiquée par les éclairs. Ceux-ci ont été observés souvent à une distance considérable (4—500 kilomètres), ce qui confirme les observations de M. Bezold. Selon lui on a vu en Bavière en forme d'éclairs secs des orages qui ont sévi simultanément à l'autre côté des Alpes dans l'Autriche méridionale. La distance de Carlscrona à Copenhague, ou des environs du lac de Mälaren à Gothland, n'est guère moindre.

VII. STATISTIQUE.

Fréquence des orages. La Suède est divisée en trois parties principales: (voyez la carte 29).

1°) *Norrland*, comprenant les gouvernements du Norrbotten, Vesterbotten, Vesternorrland, Östersund et Gefleborg.

2°) *Svealand*, ou les gouvernements de Falun (Dalecarlie), Upsala, Stockholm, Nyköping ou Sudermanie, Vesterås, Örebro et Vermland.

3°) *Götaland*, ou les gouvernements de Skaraborg, Elfsborg, Bohuslän, Halland, Linköping ou Ostrogothie, Jönköping, Kronoberg, Kalmar, Blekinge, Malmöhus et Christianstad, ces derniers formant ensemble l'ancienne province de Scanie, la plus méridionale de la Suède, et lîle Gothland.

Dans le gouvernement de Vesterås, les observations ne commencèrent qu'en 1872. Dans ce qui suit, Bohuslän et Halland ou la côte du Cattegat, sont traités ensemble comme un seul district, et de même la partie la plus méridionale du pays, le Blekinge et la Scanie.

La Norvège est divisée en cinq parties principales:

1°) *L'Ostland*, ou les gouvernements (amt) de Smaalenene, Akershus, Hedemarken, Christian, Buskerud, Jarlsberg-Laurvik, Bratsberg et Nedenes. Les limites sont: au nord le Dovrefjeld, à l'W les Langfjelds, au S le Skagerack et à l'E la Suède.

2°) *Le Vestland*, avec les gouvernements de Lister Mandal, Stavanger, Söndre-Bergenhus, Nordre-Bergenhus, forme la partie ouest de la Norvège méridionale entre les Langfjelds et l'Atlantique jusqu'à cap Stad.

3°) *Romsdal-Trondhjem*, ou les gouvernements de Romsdal, Söndre-Trondhjem et Nordre-Trondhjem, situé entre cap Stad et Dovrefjeld au Sud, au Nord le Nordland, à l'E la Suède et la mer à l'W.

4°) *Nordland-Tromsö*, les deux gouvernements du Nordland et du Tromsö, formant la partie la plus étroite de la Norvège entre la mer à l'W, la Laponie et la Finlande à l'E.

5°) *Le Finnmarken*, un seul gouvernement du même nom, entre l'Océan et la Mer de Barents, au N., la Finlande et la Russie au S.

La fréquence annuelle des orages dans chaque division du pays est indiquée dans les tableaux I a. et I b., ainsi que sur la carte 24.

Tab. I a.

Fréquence des orages dans les différents gouvernements de la Suède.

(Nombre moyen pour chaque observateur).

Gouvernement	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	Moy.
Norrbotten	6.29	7.40	9.33	4.75	6.67	5.50	5.75	3.80	3.75	6.33	5.96
Vesterbotten	4.81	7.90	7.64	5.75	5.14	5.75	7.33	7.33	5.67	5.33	6.26
Vesternorrland	3.40	8.00	6.60	7.17	8 00	4 00	4.93	3.00	6.29	6.25	5.76
Östersund	4.85	7.20	5.64	3.18	7.63	3.83	2.67	4.67	8.33	4.50	5.25
Gefleborg	5.90	9.70	8.00	10.17	14.38	7.00	7.60	5.67	6.80	9.33	8.46
Dalécarlie	4.72	9.70	6.40	4.82	12.80	3.00	6.67	4.50	6.67	7.00	6.63
Upsala	5.41	14.00	6.45	5.56	7.18	6.07	7.70	10.55	16.33	6.75	8.60
Vesterås	—	17.70	14.00	7.11	9.60	7.75	9.17	9.29	11.62	8.29	10.50
Stockholm	4.50	11.90	3.70	4.60	6 57	4.80	6.50	4.67	6 00	4.50	5.77
Nyköping	4.60	17.50	8.14	5.86	9.50	9.75	10.56	14.22	9.55	10.00	9.97
Örebro	5.53	14.40	8.62	6.50	8.50	6.30	8.45	9.25	12.13	7.83	8.75
Vermland	5.44	18 30	8.89	9.20	10.50	5.46	7.73	8.00	9.75	10.00	9.33
Skaraborg	5.89	22.30	11.33	6.83	9.25	8.70	7.57	7.83	10.43	9.67	9.98
Elfsborg	8.77	22.00	13.57	8.60	12.50	8.40	7.25	16.20	10.51	11.85	**11.97**
Bohus et Halland . .	5.20	17.70	13.13	12.14	10.00	10.75	7.50	8.50	12.60	12.00	10.95
Linköping	4.40	10.60	4.67	4.00	6.33	10.67	12.25	8.57	10.85	8.58	8.09
Jönköping	7.23	16.40	8.64	7.36	6.71	6.43	5.50	7.60	6.20	10.75	8.28
Kronoberg	6.08	16.20	11.55	7.43	11.67	9.25	8.14	11.67	11.57	13.00	10.66
Kalmar	8.20	12.40	9.40	4.00	8.20	6.17	7.14	11.67	8.14	17.00	9.23
Blekinge et Scanie .	7.90	13.70	16.47	10 78	8.78	7.63	6.47	10.40	6.58	9.41	9.81
Gothland	5.06	11.20	10.25	2.50	7.67	—	3.75	6.78	5.36	7.00	6.62
Nombre des stations .	*268*	*239*	*230*	*158*	*171*	*137*	*155*	*147*	*147*	*135*	

Tab. I b.

Fréquence des orages dans les différents gouvernements de la Norvège.

Gouvernement	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	Moy.
Smaalene	2.57	6.77	4.40	6.84	5.88	4.50	4.00	7.25	6.33	4.66	5.32
Akershus	4.01	16.67	7.20	7.76	10.82	5.50	6.60	7.25	14.75	13.00	**9.36**
Hedemarken	5.78	12.53	8.14	6.93	10.27	8.44	7.00	8.32	7.72	6.67	8.18
Christian	3.66	9.66	8.16	5.68	4.51	8.00	2.75	3.33	9.34	7.66	6.28
Buskerud	3.17	8.33	9.00	7.66	7.60	3.80	3.40	3.50	8.33	18.50	7.33
Jarlsberg	3.65	8.99	6.86	12.22	6.16	8.24	6.16	6.60	8.70	9.25	7.68
Bratsberg	2.26	6.00	—	8.20	9.75	8.50	2.00	7.00	7.50	—	5.12
Nedenes	3.71	10.14	4.25	5.25	6.00	5.50	11.50	15.00	17.00	12.50	9.09
Lister et Mandal	4.40	16.40	7.50	11.27	5.50	6.00	7.80	7.00	10.00	10.00	8.59
Stavanger	4.82	8.90	9.10	10.50	4.13	4.29	5.85	3.31	7.80	5.50	6.42
Söndre-Bergenhus	5.21	6.44	7.28	7 32	5.14	4.40	8.00	2.60	4.75	3.66	5.48
Nordre-Bergenhus	3.66	4.56	4.89	10.45	2.57	1.89	3.39	1.28	2.00	2.85	3.75
Romsdal	3.07	2.54	3.10	5.65	0 88	2.01	2.11	1.00	2.84	3.89	2.71
Söndre-Trondhjem	4.63	6.39	5.80	6.71	4.64	6.64	4.71	4 00	5.25	6.32	5.51
Nordre-Trondhjem	5.40	4.33	3.00	5.80	3.33	5.00	6.50	1.50	5.99	3.50	4.44
Nordland	4.82	1.89	2.99	4.01	1.10	2.49	1.42	1.34	1.27	1.77	2.31
Tromsö	1.33	0.80	2.20	1.40	1.40	3.08	0.14	0.33	0.80	0.66	1.22
Finmarken	2.60	1.33	2.83	1.20	2.00	3.34	1.84	0.80	0.25	1.75	1.79
Nombre des stations	*163*	*134*	*104*	*143*	*121*	*106*	*99*	*73*	*74*	*68*	

En les examinant, on trouvera que les orages sont le plus fréquents dans le gouvernement d'Elfsborg, au sud du lac Venern et sur la côte du Cattegat; dans la partie la plus méridionale de la Suède et dans les régions voisines des grands lacs Venern, Vettern, Hjelmaren et Mälaren. Leur nombre diminue quelque peu vers la Baltique, et encore plus vers le nord et l'ouest. Dans le nord de la Suède la forme des courbes ressemble beaucoup aux courbes qui représentent le débâcle des glaces dans les lacs. Des maxima secondaires de fréquence se trouvent dans les parties extrêmes de l'W et du S de la Norvège. Un minimum remarquable existe à l'entrée du fjord de Christiania, immédiatement au nord du maximum sur la côte du Cattegat.

Le tableau II donne la fréquence pour les grandes parties principales du pays. On voit par là, comment la fréquence diminue vers le nord.

Tab. II. Fréquence des orages dans les grandes divisions du pays.

	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	Moy.
Norrland	5.05	8.04	7.44	6.20	8.36	5.22	5.66	4.81	6.17	6.35	6.33
Svealand	5.03	14.79	8.03	6.24	9.24	6.16	8.11	8.64	10.29	7.77	8.43
Götaland	6.53	15.83	11.00	7.07	9.01	8.50	7.29	9.91	9.13	11.03	9.53

Tab. II. *(Suite).*

	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	Moy.
Ostland	3.82	10.14	6.88	7.32	7.98	6.69	5.61	6.96	9.61	9.77	7.48
Vestland	4.56	8.89	7.19	9.80	4.32	3.93	6.00	2.80	5.50	4.20	5.72
Romsdal-Trondhjem .	3.97	4.18	3.71	5.96	2.75	4.69	3.61	2 30	4.31	4.50	4.00
Nordland	4.26	1.57	2.71	3.43	1.08	2.60	1.00	1.00	1.09	1.46	2.02
Finmarken	2.60	1.33	2.83	1.20	2.00	3.50	1.83	0.80	0.25	1.75	1.81

Tab. III. Fréquence des orages dans les différentes régions suivantes.

	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	Moy.
1. *Partie méridionale de Suède.*											
Région méridionale .	7.90	13.70	16.47	10.78	8.78	7.63	6.47	10.40	6.58	9.41	9.81
Région occidentale .	6.33	20.08	11.73	9.19	10.56	8.33	7.51	19.13	10.82	10.88	10.56
Région centrale . . .	5.79	14.73	9.28	6.46	9.41	6.47	7.61	8.81	10.75	8.94	8.83
Région orientale . . .	5 43	13.10	6.48	4.62	7.65	7.85	9.11	9.78	8.64	10.02	8.27
Ile Gothland	5 06	11.20	10.25	2.50	7.67	—	3.75	6.78	5.36	7.00	6.62
2. *Norvège.*											
Ostland littoral . .	3.29	8.92	5 63	6 60	5.11	6.22	6.22	9.14	9.29	7.71	6.81
Ostland l'intérieur	3.96	10.51	7.29	7.49	8.56	6.82	5.41	6.27	9.71	10.53	7.66
Vestland littoral . .	5.86	10.12	8.27	11.68	5.10	4.89	7.05	3.46	7.64	5.44	6.95
Vestland l'intérieur	1.77	5.70	4.56	5.10	2.00	1.63	3.00	1.57	2.14	2.33	2.98
Romsdal- littoral . .	3.33	1.55	3 58	6.53	1.17	3.60	3.50	0.83	3.00	4.29	3.14
Trondhjem l'intérieur	4.53	6.82	3.89	5.00	5.13	6.50	3.83	4.50	5.83	4.80	5.08
Nordland littoral . .	4.40	1.00	2.73	3.74	0.90	2.82	1.25	1.29	1.13	1.13	2.04
Nordland l'intérieur	3.74	3.67	2.67	2.00	1.67	2.00	0.00	0.00	1.00	2.33	1.91
Finmarken littoral . .	0.50	0.33	0.00	0.67	0.67	1.33	0.50	0.00	0.00	1.00	0.50
Finmarken l'intérieur	4.00	2.33	4.25	2.00	3.33	5.67	2.50	1.00	0.33	2.00	2.74

Sur le tableau III les contrées de Svealand et de Götaland ont été rangées dans les groupes suivant: *La partie la plus méridionale*, comprenant la Scanie et le Blekinge; *La partie Ouest*, ou les gouvernements du Vermland, Skaraborg, Elfsborg, Bohuslän et Halland. *La partie centrale*, ou la Dalécarlie, Örebro, Upsala, Vesterås, Jönköping et Kronoberg; *La partie Est*, comprenant la côte de la Baltique ou les gouvernements de Stockholm, Nyköping, Linköping, Kalmar et l'île de Gothland. On voit que la fréquence est la plus grande dans la partie ouest de la Suède méridionale et qu'elle diminue vers l'Est. A Gothland elle est à peu de chose près, égale à celle dans le Norrland.

Le tableau III montre aussi la différence entre le littoral et l'intérieur de la Norvège pour chacune des parties principales du pays. On

voit qu'en général les orages sont plus nombreux à l'intérieur du pays que sur les côtes. Ce n'est que dans le *Vestland* et dans la région de *Romsdal-Trondhjem* que l'inverse a lieu.

Le nombre des orages varie beaucoup d'après les années. Ceci s'applique à toutes les parties du pays. On ne peut par les tableaux conclure à une période dans la fréquence des orages pendant une série d'années.

Période diurne des orages [1]).

Tab. IV a.

Période diurne de la fréquence des orages dans différents mois 1871—80.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	Md.	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	Mn.
Janvier—Mai.																								
Suède	10*	10*	12	18	19	18	14	33	29	31	47	89	101	103	138	**164**	145	131	106	93	68	55	45	23
Norvège																								
l'intérieur	3	2	1*	4	3	4	3	6	6	9	9	16	18	29	**37**	33	32	28	16	17	11	4	3	3
littoral . .	11	10	12	16	5	14	16	15	4*	15	10	16	9	7	23	26	25	25	**38**	27	31	9	13	15
Juin.																								
Suède	29	23	18*	28	30	26	36	38	56	57	107	177	277	321	**442**	439	437	378	244	176	131	115	80	33
Norvège																								
l'intérieur	1	0*	5	1	0*	3	5	3	15	15	22	46	61	104	**107**	97	91	93	80	43	26	6	9	2
littoral . .	3*	3	6	5	3	5	6	9	8	12	11	26	25	25	28	**38**	34	28	17	19	7	14	5	4
Juillet.																								
Suède	55	35	45	38	33*	47	58	39	54	66	137	234	353	427	461	**536**	516	402	284	202	131	106	75	68
Norvège																								
l'intérieur	4	5	4	5	3*	8	12	9	24	27	43	46	69	126	140	**149**	132	113	76	46	36	31	21	11
littoral . .	5*	6	10	7	10	21	20	15	21	29	26	29	23	51	56	60	**62**	51	38	33	26	18	19	7
Août.																								
Suède . . .	35	27*	31	40	46	48	50	55	42	62	98	192	231	271	338	**411**	390	279	224	124	109	104	76	41
Norvège																								
l'intérieur	4	2*	2*	5	2	4	2	5	13	15	17	39	60	73	**99**	94	84	71	39	33	25	11	7	3
littoral . .	21	13	10	14	4*	21	21	16	19	23	21	11	23	34	**37**	33	33	33	21	25	31	19	20	16
Septembre—Décembre.																								
Suède	52	52	47	41	33	31	31	28	26*	27	37	77	67	77	138	154	**169**	150	86	93	100	77	69	69
Norvège																								
l'intérieur	8	4	3*	5	7	6	11	7	12	9	10	5	12	18	17	**28**	26	25	19	21	19	7	5	6
littoral . .	23	23	18	14*	25	25	32	27	27	27	32	19	23	23	29	40	51	35	45	52	**69**	45	44	26

1) Le temps indiqué est le temps local, au centre de l'orage. En 1879—1880 le temps commun fut introduit en Suède d'après un méridien qui passe à 12 minutes à l'ouest de Stockholm. Ce méridien divise le pays en 2 parties à peu près égales l'un à l'E, l'autre à l'W et c'est pourquoi on n'a pas cru nécessaire de réduire à l'heure locale de chaque station les observations de ces années là. L'erreur ainsi commise doit être insensible, puisque les corrections auraient eu des signes contraires à l'E et à l'W à partir du méridien en question.

Tab. IV b.

Période diurne des orages dans différentes parties du pays 1871—80.

	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	MD	1h	2h	3h	4h	5h	6h	7h	8h	9h	10h	11h	MN
Norrland . .	28	14	23	14*	21	30	26	15	21	34	72	125	108	205	250	**263**	247	249	180	115	96	87	56	37
Svealand . .	48	39	41	54	42	30*	30	46	72	73	110	222	362	454	599	**747**	**747**	568	406	254	165	133	111	65
Götaland . .	105	94	89*	97	98	110	133	132	114	136	236	422	479	540	667	**694**	663	523	358	319	278	237	178	132
Suède (pro mille) (nombre des observations 14656)	*12*	*10*	*10*	*11*	*11*	*12*	*13*	*13*	*14*	*17*	*29*	*53*	*70*	*82*	*103*	**116**	*113*	*91*	*64*	*47*	*37*	*32*	*24*	*16*
Norvège l'intérieur	20	13*	15	20	15	25	33	30	70	75	101	152	220	350	**400**	**401**	365	330	223	160	117	59	45	25
littoral . .	63	54	58	57	47*	86	95	92	79	106	100	101	103	150	173	197	**205**	172	159	156	144	105	101	68
Norvège (pro mille) (nombre des observations 5935)	*14*	*11*	*12*	*13*	*10*	*19*	*22*	*21*	*25*	*31*	*34*	*43*	*54*	*84*	*96*	**101**	*96*	*84*	*64*	*53*	*44*	*28*	*25*	*16*

Les tableaux IV a. b. montrent que les orages sont le plus nombreux dans l'après-midi, vers 4^h, et qu'ils ont un minimum de fréquence vers 2^h—4^h du matin. Ceci s'applique à toute la Suède et à l'intérieur de la Norvège dans toutes les saisons, de même que dans les autres parties de l'Europe [1]). Cette règle est vraie aussi pour la côte ouest de la Norvège pendant la saison chaude. Ceci indique une influence directe de la variation diurne de la température, et aussi une liaison avec la variation diurne de la pression atmosphérique [2]). Une température élevée et une pression diminuée, accompagnent presque toujours la plupart des orages.

Sur le littoral de la Norvège, il n'est pourtant pas ainsi pendant la saison froide. Il est vrai que même alors, il se produit un minimum pendant les premières heures du matin. Le maximum de fréquence n'arrive cependant que plus tard, ou vers 8^h du soir. Nous rencontrons en Norvège le phénomène signalé par le Dr Hellmann [3]), à

1) Klossowsky: Les orages en Russie. Odessa, 1885.
R. Assmann: Die Gewitter in Mitteldeutschland, Halle 1886.
Lancaster: Discussion des observations d'orages, faites en Belgique. Ann. de l'Obs, Roy. de Bruxelles. Ser. 2. T. I—II.

2) Chr. Hansteen: Meteorologiske Constanter for Christiania. (Svenska Vet. Akad. Handl. 1850). — Norsk meteorologisk Aarbog 1868. S. VIII. (Bergen); 1869 S. XI. (Christianssand).

3) Ueber die tägliche Periode der Gewitter in Mitteleuropa. Meteorologische Zeitschrift 1885. S. 433.

savoir, que dans l'Europe centrale, les orages d'hiver se produisent plus souvent la nuit, que le jour. M. A. BUCHAN a montré la même chose pour le nord-ouest de l'Ecosse [1]), et on l'entrevit déjà dans l'étude des orages en Norvège en 1868 [2]).

Quant à la cause de ce phénomène, M. HELLMANN la place dans l'augmentation de la vitesse du vent, observée à plusieurs stations du Nord de l'Europe, surtout pendant les tempêtes, justement aux heures de la journée, où les orages d'hiver, étant tous des orages de tourbillon, sont le plus nombreux. Les stations sur la côte ouest de la Norvège, où les orages d'hiver sont le plus nombreux, comme à Bergen, Hellisö et Ona, montrent cependant une moindre force moyenne du vent à 8^h du soir qu'à 2^h du soir. La station polaire autrichienne à Jan Mayen y trouva, pendant 1882—83, la vitesse du vent plus grande pendant la nuit que pendant le jour. On doit aussi remarquer, que la fréquence maxima des orages à Stykkisholm sur la côte ouest de l'Islande, où des orages n'ont pas lieu en été, se produit vers 5^h du matin et 5^h—10^h du soir. L'explication acceptée par M. HELLMANN, n'est donc pas suffisante pour ce qui regarde la Norvège, et des recherches ultérieures sont ainsi nécessaires.

Période annuelle de la fréquence des orages.

Tab. V. Période annuelle de la fréquence des orages.

		Janv.	Fevr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juill.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.	Totaux
Suède														
Norrland		2	1	5	7	137	657	**973**	526	81	20	3	1	2413
Svealand		7	1	4	112	461	**1457**	1397	1407	525	84	2	0	5457
Götaland		5	1	14	176	596	1610	**2049**	1373	855	154	35	7	6875
Suède (totaux)		14	3*	23	295	1194	3724	**4419**	3306	1461	258	40	8	14745
Norvège														
Ostland	littoral	6	0	1	3	47	130	**169**	147	80	21	10	0	614
	l'intérieur	5	1	1	6	212	714	**817**	538	138	29	0	3	2464
Vestland	littoral	*93*	19	24	22	42	173	**332**	277	162	157	75	44	1420
	l'interieur	18	9	1	2	4	27	**98**	42	15	22	12	10	260
Romsdal-	littoral	*63*	7	1	1	4	32	**85**	33	29	38	34	42	369
Trondhjem	l'intérieur	14	4	4	1	11	84	**170**	82	18	8	11	10	417
Nordland	littoral	*35*	17	12	2	0	8	53	**59**	14	17	19	19	255
	l'intérieur	0	4	1	0	0	1	**32**	16	4	2	2	3	65
Finmarken	littoral	1	0	0	0	0	2	**7**	2	0	0	0	0	12
	l'intérieur	0	0	0	0	1	13	**48**	25	0	0	1	0	88
Norvège	littoral	*198*	43	38	28	93	345	**646**	518	285	233	138	105	2670
	l'intérieur	37	18	7	9	228	839	**1165**	703	175	61	26	26	3294
	totaux	*235*	61	45	37*	321	1184	**1811**	1221	460	294	164	131	5964

1) Journal of the Scottish Meteorological Society. Vol. V. p. 324.

2) Atlas météorologique de l'Observatoire de Paris. 1868. D. 17. Période diurne.

Le tableau V montre que, dans toute la Suède et dans l'intérieur de la Norvège, le nombre des orages est le plus grand dans la saison la plus chaude de l'année ou pendant le mois de Juillet. Plus on s'avance vers le Nord, plus les orages sont concentrés autour de cette époque, comme on peut le voir par la comparaison des nombres pour le Götaland d'un côté, et du Norrland et de l'intérieur du Finmark d'un autre côté.

Sur la côte de la Norvège, les conditions sont très différentes. Certes, même là les orages se produisent en général le plus souvent en Juillet ou en Août, mais un maximum secondaire de fréquence se trouve aussi en hiver au mois de Janvier. Ce cas remarquable sera étudié d'une manière détaillée plus loin. Dans l'intérieur de la Norvège, nous avons encore des orages d'hiver, bien qu'en nombre restreint; en Suède ils sont au contraire d'une rareté extrême.

La période annuelle des orages en Suède correspond complètement à celle qu'on a trouvée en Belgique, l'Allemagne centrale et la plus grande partie du Nord de la Russie et de la Sibérie. Dans la Russie centrale et méridionale, ainsi que dans le Caucase, la fréquence maxima a lieu déjà au mois de Juin. Le cas signalé par M. v. Bezold [1]) que dans l'Allemagne méridionale la fréquence des orages a deux maxima pendant les mois d'été, maxima qui semblent se rapprocher les uns des autres et de la saison la plus chaude à mesure que l'on avance vers le nord, peut encore, surtout en certaines années, se montrer dans l'Allemagne centrale, mais a complètement disparu en Suède.

Direction du vent et marche des nuages pendant un orage.

Tab. VI. Direction du vent pendant les orages.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmes
1. Suède (1871—1880).									
Janvier—Mai	56*	83	95	90	145	**203**	165	76	87
Juin	69	89	111	108	144	**170**	149	67*	93
Juillet	60*	66	86	106	167	**190**	169	66	90
Août	40*	42	78	108	176	**221**	175	76	84
Septembre—Décembre	22	20*	56	98	180	**271**	198	62	93
Année:									
Norrland	62*	82	108	140	**188**	154	126	74	66
Svealand	66	58*	78	98	167	**188**	169	84	92
Götaland	40*	61	88	96	150	**230**	182	56	97
Totaux (Suède)	56*	67	91	111	168	**191**	159	72	85

1) von Bezold: Ueber das doppelte Maximum in der Häufigkeit der Gewitter während der Sommermonate. Sitzungsb. d. K. b. Akad. d. Wissensch. zu München 1875. Heft. II.

Tab. VI. *(Suite).*

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmes
2. Norvège (1867—83).									
a. *L'intérieur*									
Janvier—Mai	60	16*	31	104	261	**266**	131	63	68
Juin	103	51*	69	125	**224**	139	85	95	109
Juillet	76	60*	72	101	**229**	160	119	67	116
Août	85	50*	56	119	**247**	146	86	64	147
Septembre—Décembre	39	36*	45	119	203	**272**	110	84	92
Année	80	50*	62	113	**234**	168	102	73	118
b. *Littoral:*									
Janvier—Mai	15*	36	40	66	186	**388**	186	66	17
Juin	34	98	107	158	217	**226**	50	32*	78
Juillet	59	72	77	133	203	**243**	74	54*	85
Août	61	65	89	118	192	**262**	80	34*	99
Septembre—Décembre	21*	29	42	117	219	**366**	138	38	30
Année	41*	57	70	119	204	**296**	104	44	65
c. *Tout le pays:*									
Janvier—Mai	34	27*	36	82	217	**337**	163	65	39
Juin	83	65*	80	135	**222**	165	74	76	100
Juillet	70	65	74	112	**220**	190	102	62*	105
Août	75	56	70	118	**223**	196	84	51*	127
Septembre—Décembre	25	31*	43	117	215	**342**	132	49	46
Totaux (Norvège)	63	54*	65	115	220	**226**	103	60	94

Tab. VII. Marche des nuages pendant les orages.

	N	NE	E	SE	S	SW	W	NW	Calmes
1. Suède (1871—1880).									
Norrland	64	57*	69	93	**206**	199	164	92	56
Svealand	66	48*	55	82	174	202	**207**	106	60
Götaland	46	44*	67	95	178	**259**	208	61	42
Totaux	59	50*	63	90	186	**220**	193	86	53
2. Norvège (1867—73).									
L'intérieur	56	45*	65	128	**291**	192	120	51	52
Littoral	30*	54	61	130	229	**303**	111	46	36
Totaux	45*	49	63	129	**264**	240	116	49	45

Comme le tableau VI le montre, la direction ordinaire du vent en Suède pendant les orages est du SW et la plus rare du N. Dans le Norrland pourtant le vent du sud est le plus fréquent. Ceci correspond à la direction moyenne du vent en Suède. Celle-ci est dans la partie la plus méridionale du pays l'WSW, passe dans le Svealand au SW et dans le Norrland jusqu'au S. La marche des nuages concorde assez bien avec la direction du vent.

La position géographique de la Norvège et ses conditions orographiques rendent ces études plus compliquées dans ce pays. Là aussi, des orages ont eu lieu avec tous les vents possibles, mais la direction principale du vent a été sur la côte du SW et dans l'intérieur du pays du S.

Dans la saison froide de l'année, notamment en automne, la direction principale du vent dans l'intérieur du pays est environ du SW. Mais en cette saison il y a peu d'orages dans l'intérieur. Dans les mois les plus chauds, qui sont relativement riches en orages, le vent du sud est dans l'intérieur du pays le vent dominant pendant les orages. Le minimum de fréquence des orages a lieu au littoral par un vent du N et dans l'intérieur par un vent du NE, règle qui s'applique dans toutes les saisons. Dans l'intérieur, le vent du nord montre un maximum secondaire de fréquence. En général, la fréquence varie régulièrement du vent le plus rare au vent le plus fréquent.

Ce sont par conséquent les vents les plus chauds qui apportent ou accompagnent le plus grand nombre des orages, et les vents les plus froids qui accompagnent le plus petit nombre des orages. Plus la température de l'air est élevée, plus aussi sa richesse en vapeur d'eau est grande, à la règle, surtout dans le voisinage de la mer.

Les vents les plus fréquents pendant les orages sur le littoral sont du SW; au contraire dans l'intérieur du S. Ceci peut tenir à des conditions, dont probablement les suivantes sont les plus importantes.

La côte de l'ouest, la partie la plus étendue de tout le littoral, depuis Lindesnes jusqu'au cap Nord, reçoit les orages principalement avec les vents du sud-ouest. Ces vents sont des vents de mer et indiquent des minima de pression barométrique, se trouvant vers le NNW au large dans la mer de Norvège. S'il éclate en même temps un orage plus à l'est dans l'intérieur du pays, les gradients doivent y être dirigés plus vers l'ouest et le vent par conséquent plus au Sud. De tels orages sont des orages de tourbillon. Cependant les orages dans l'intérieur commencent généralement plus tard, quand le tourbillon s'est avancé plus loin vers l'est, et alors le vent dans l'intérieur devient plus de l'ouest.

Dans les mois les plus froids, l'intérieur du pays n'a presque pas d'orages. S'il y en a, ce sont des orages de tourbillon. Dans les mois d'automne et de printemps, la plupart des orages dans l'intérieur sont aussi des orages de tourbillon. Et nous voyons par la statistique que pendant ces mois (Septembre—Mai) les vents les plus fréquents pendant les orages sont du SW. Le plus grand nombre des orages dans l'intérieur sont des orages de chaleur, se formant avec des minima secondaires de pression dans l'intérieur du pays, pendant les mois d'été. La statistique montre, qu'ils sont le plus généralement accompagnés de vents du sud. Ces conditions seront mieux expliquées plus loin, en comparant la fréquence des orages dans les différents mois et les différentes parties de

la Norvège, avec la répartition de la pression atmosphérique. A côté des considérations ci-dessus, on doit aussi remarquer qu'en général les vents dans l'intérieur sont moins déviés de la direction du gradient, que les vents de mer [1]), et que par conséquent, le gradient ayant la même direction, un vent qui sur le littoral souffle du SSW, doit à l'intérieur du pays être moins dévié à cause du frottement plus considérable qu'il éprouve, et y souffler du Sud.

La marche des nuages (tabl. VII), telle qu'elle a été notée par les observateurs, correspond en général à la direction du vent. La concordance est la plus parfaite sur le littoral, comme l'on devait s'y attendre, du moment où il est question d'orages de tourbillon, et où le frottement plus faible exercé par la surface de la mer permet au vent de suivre la direction indiquée par la marche des nuages, de beaucoup plus près que dans l'intérieur du pays. Il est à remarquer que dans l'intérieur du pays il semble que la fréquence des vents du nord soit plus grande à la surface terrestre qu'à la hauteur où flottent les nuages, tandis que le contraire a lieu pour les vents du sud. Si cela n'est qu'un résultat, provenant de l'insuffisance du nombre des observations, on voit par là, qu'il y a des vents locaux dans les couches inférieures de l'air dans les orages de l'intérieur, lesquels eux-mêmes sont de nature locale. Le mouvement plus rapide de l'air dans les orages de la côte comparés à ceux de l'intérieur du pays se trouve indiqué par les 6.5 pour cent de calme du premier, contre 11.8 pour cent du second, pour toute l'année. Que le mouvement de l'air est plus rapide dans les couches supérieures, où se trouvent les nuages, cela se prouve par le tabl. VII sur la marche des nuages, lequel montre pour la côte 3.6 % de calmes dans les nuages, contre 5.2 % pour l'intérieur. Un air calme, pendant les orages, est par conséquent un cas deux fois plus fréquent à la surface de la terre qu'à la hauteur des nuages orageux.

Relation entre la répartition de la pression atmosphérique et la fréquence des orages en Norvège.

Dans »l'Oesterreichische Zeitschrift für Meteorologie» 1884, p. 149, on trouve une table donnant les hauteurs normales du baromètre, pour 30 stations norvègiennes, réduites à l'espace de 16 ans, entre 1867—1882.

1) Mohn et Guldberg: Études sur les mouvements de l'atmosphère. P. I. Christiania 1876. p. 21.

Si l'on réduit ces hauteurs barométriques à la pesanteur sous 45° de lat. et au niveau de la mer, puis applique les corrections trouvées pour le baromètre normal et pour les baromètres des stations [1]), on obtient les nombres du tableau suivant. Si l'on transporte les hauteurs barométriques du tableau sur des cartes, et si l'on trace les isobares, on obtient un aperçu de la répartition de la pression atmosphérique au-dessus de la Norvège dans les divers mois. De telles cartes ont été publiées dans »l'Oesterreichische Zeitschrift für 1884», et s'étendent jusqu'à la mer de Norvège et à la partie nord-ouest de l'Europe [2]).

Tab. VIII. Hauteurs baromètriques réduites à 45° et au niveau de la mer; 1867—82 (16 ans) corrigées d'après les corrections connues en automne 1886.

700 m.m. +

Stations	Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juill.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Année
Röros	60.9	59.7	59.2	60.2	60.8	59.5	58.3	58.5	58.6	58.9	58.7	59.1	59.4
Tönset	60.7	59.3	58.5	59.4	59.8	58.8	57.7	57.9	58.2	58.5	58.5	59.2	58.9
Dovre	60 0	58.6	58.1	59.1	59.5	58.5	57.2	57.5	57 7	57.9	57.5	58.0	58.5
Granhejm	61.3	59 6	59.3	59.6	59.9	58.6	57.3	57.5	58.3	58.7	58.3	59.4	58.9
Elverum	60.6	60.0	59.2	59.5	59.8	58.6	57.4	57.3	58.2	58.9	58.2	59.3	58.9
Eidsvold	59.8	59.4	58.6	59.3	59.7	58.7	57.6	57.9	58.3	58.1	57.6	58.2	58.7
Christiania	60.8	59.5	59.0	59.6	60.2	59.1	58.0	58.3	58.5	58.9	58.0	58.6	59.1
Sandösund	60.8	59.5	59.0	59.6	60 4	59.4	58.2	58.3	58.5	58.9	57.9	58.4	59.1
Oxö	60.6	59.6	59.1	59.7	60.9	60.0	58.8	58.6	58.9	58.5	57.8	58.0	59.2
Mandal	60.6	59.6	59.1	59.7	61.0	60.0	58.9	58.7	58.9	58.5	57.7	58 0	59.2
Skudesnes	59.3	58.6	58.6	59 6	61.2	60.2	58.9	58.5	58.4	57.9	57.2	57.0	58.8
Ullensvang	59.7	59 0	59.0	59.8	60.8	59.7	58.3	58.0	58.5	58.3	57.9	57.8	58.9
Bergen	58.2	57.6	57 9	59.0	60.5	59.8	58.5	58.0	57.9	57.2	56.5	56.3	58.1
Leirdal	59 8	58.6	58.7	59.7	60 4	59.3	57.9	57.9	58.3	58.4	57.8	58.0	58.7
Flesje	59.3	58.8	58.7	59.9	60.8	59.6	58.2	58,2	58.2	58,1	57.7	57 8	58.8
Florö	57.5	57.0	57.5	59.3	60.6	59.8	58.4	58.0	57.8	56.8	56.3	55 9	57.9
Dombesten	57.7	57.1	57.4	59.4	60.6	59.7	58.5	58.1	58.0	67.0	56.6	56.0	58.0
Aalesund	56.4	56.0	56.6	59.0	60 4	59.7	58.3	58 0	57.4	56.2	55.7	54.9	57.4
Christiansund	56 3	55.8	56.5	58 9	60.6	59.9	58.5	58.2	57.4	56.3	55.6	54.9	57.4
Ytteröen	58.3	57.3	57.8	59.5	61.0	60.2	58.7	58.8	58.0	57.9	56.9	56.5	58.4
Brönö	55.8	55.2	56.0	58.6	60.3	59.8	58.4	58.3	57 2	56.4	55.5	54.8	57.2
Ranen	56.5	56.0	56.5	59.1	60.7	60 0	58.6	58.6	57.4	57.2	56 4	56.0	57.8
Bodö	54.9	54.3	55.2	58.1	60:1	59.5	58.2	58.0	56.8	56,1	55.1	54.5	56.7
Lödingen	54.1	53.8	54.8	57.9	60.1	59.5	58.2	57.9	56.5	56.0	54.7	54.2	56.5
Fagernes	54.2	54.1	54 9	58 0	60.1	59.5	58.3	58.1	56.5	56.1	54.9	54.4	56.6
Tromsö	53.3	53.0	54.0	57.5	60.1	59.4	58.4	58.0	56.2	55.6	54.0	53.6	56.1
Alten	54.5	54.2	54 8	58.0	60.8	59 8	58.5	58.1	56.9	55.9	55.3	55.1	56.8
Gjesvær	53.1	52.6	53.6	57.0	60.4	59 8	58 6	58.1	56.2	54.9	54.0	53.2	55.9
Vardö	54.0	53.4	53.9	57.2	60 5	59.3	58.8	58.2	56.6	55.3	54.4	54.2	56.3
Sydvaranger	55.7	55.2	55.2	58.0	61.1	59.7	58.9	58.6	57.4	56.3	55.6	55.8	57.3

1) Jahrbuch des norwegischen meteorologischen Instituts für 1884. Vorwort, p. VI et VII. Jahrbuch für 1885, Vorwort.

2) Sur ces cartes les hauteurs barométriques de la Suède sont à diminuer de la correction pour la pesanteur, et les hauteurs norvégiennes à corriger pour la variation du baromètre normal trouvée après ce temps.

Tab. IX. Norvège 1867—1883. Nombre des orages par station [1]).
C = Côte. I = Intérieur.

	Janv.	Févr.	Mars	Avril	Mai	Juin	Juil.	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.	Année
Smaalenene C.	**0.03**	0.00	0.00	0.00	0.19	0.52	0.94	**1.13**	0.13	0.13	0.06	0.00	3.13
„ I.	0 02	0.00	0 00	0.00	0.48	1.38	1 78	**2.12**	0.43	0.23	0.03	0.02	6.50
Akershus	0.00	0.00	0.00	0.03	0.90	2.18	**3.00**	2 07	0.48	0.05	0.00	0.01	8.71
Hedemarken	0.00	0.00	0.01	0.04	0.52	2.00	**3.14**	2.29	0.23	0.04	0.01	0.00	8.26
Christian	**0.02**	0.01	0.00	0.00	0 07	1.34	**2.88**	1.66	0.02	0.02	0.00	0.00	6.02
Buskerud	**0.02**	0.00	0.00	0.03	0.60	1.41	**2.34**	1.60	0.17	0.03	0.00	0.02	6.23
Jarlsberg et Laurvik C.	**0.07**	0.00	0.00	0.03	0 44	1.21	1.76	**2.22**	0.63	0.15	0.11	0.00	6.62
„ I.	**0.09**	0.00	0.00	0 00	0.64	1.32	**2.23**	2.14	0.41	0 00	0.00	0.00	6.82
Bratsberg C.	0.00	0.00	0.00	0.08	0.15	0.15	0 77	**1.92**	0.08	0.00	0.00	0.00	3.15
„ I.	0.00	0.00	0.00	0.02	0.62	0.88	1.70	**1.90**	0.63	0.05	0.02	0.00	5.82
Nedenes C.	0.00	0.00	0.02	0.02	0 65	1.00	**3.13**	2.60	0.83	0.38	0.21	0.00	8.85
„ I.	**0.07**	0.00	0.00	0.00	0.27	0.67	2.07	**2.67**	0.33	0.33	0.00	0.00	6.40
Lister et Mandal C.	**0.18**	0 03	0.05	0.06	0.51	1.09	1.95	**2.12**	1.14	0.62	0.30	0.09	8.14
„ I.	**0.14**	0 07	0.00	0.00	0.36	1.00	**2.21**	1.79	0.43	**0.86**	0.00	0.07	6.93
Stavanger C.	**0.20**	0.06	0.07	0.08	0.33	0.77	1.61	**1.81**	0.63	**0.72**	0.41	0.10	6.78
„ I.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	1.60	**2.00**	0.40	0.20	0.00	0.00	5.20
Söndre-Bergenhus C.	**0.43**	0.23	0.10	0.03	0.22	0.58	1.50	**1.63**	0.50	**0.60**	0.38	0.18	6.38
„ I.	**0.13**	0.08	0.04	0.00	0 00	0.42	**1.67**	0.88	0.25	0.37	**0.38**	0.13	4.33
Nordre-Bergenhus C.	**0.85**	0.23	0.22	0.20	0.28	0.38	**1.18**	1.08	0.82	**0.90**	0.60	0.45	7.18
„ I.	**0.16**	0.11	0.02	0.02	0.01	0.14	**0.61**	0.51	0.07	**0.13**	0.11	0.06	1.95
Romsdal C.	**0.45**	0.16	0.03	0 02	0 09	0.13	**0.50**	0 28	0.35	0.24	**0.42**	0.30	2.97
„ I.	0 24	0.13	0.13	0.02	0.04	0 22	**0.85**	0.50	0.26	0.11	**0.31**	0.24	3.05
Söndre-Throndhjem C	**0.57**	0.07	0 03	0 03	0 00	0.70	**0.77**	0.63	0.10	0.27	**0.30**	0.23	3.70
„ I.	**0.12**	0.03	0.01	0.00	0.15	1.21	**2.32**	1.65	0.18	0 03	**0.06**	0.01	5.77
Nordre-Throndhjem C.	0.24	**0.26**	0.06	0.09	0.09	0.59	**1.29**	0 79	0.24	**0.32**	0.18	**0.38**	4.53
„ I.	0.00	**0.04**	0 00	0.04	0.08	**1.48**	1.36	0.92	0.16	0 00	**0.20**	0.00	4.28
Nordland C.	**0.27**	0.14	0.09	0.04	0.00	0.14	0.55	**0.56**	0.12	0.16	**0.32**	0.14	2.53
„ I.	0.12	**0.18**	0.05	0.00	0 00	0.25	**0.88**	0.60	0.10	0.08	0.08	0.10	2.43
Tromsö C.	0.06	**0.19**	0.02	0.00	0.00	0.13	0.30	**0.43**	0.00	0.00	0.00	0.00	1.13
„ I.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	**1.00**	0.75	0.00	0.00	0.00	**0.25**	2.50
Finmarken C.	**0.03**	0.00	0.00	0.00	0.00	0.12	0.36	0.21	0.00	0.00	0.00	0.00	0.73
„ I.	**0.02**	0 00	0 00	0.00	0.04	0.57	**1.33**	0.73	0.00	0 02	0.02	0.02	2.75

Si l'on transporte les chiffres du tableau IX sur des cartes et y trace des lignes passant par tous les lieux ayant le même nombre d'orages par station, on obtient une vue générale de la fréquence des orages dans les divers mois et dans les différentes parties du pays.

De plus, en comparant les tables ou les cartes indiquant la répartition de la pression atmosphérique ou celle des autres éléments climatologiques [2]) avec celles de la fréquence des orages, on arrive aux résultats suivants:

1) Ces nombres diffèrent un peu de ceux donnés à la page 35. Ils ont été calculés d'une série d'observation plus longue, et l'on a donné à chaque an un poids proportionné au nombre des stations qui ont fait des observations d'orages.

2) De telles tables se trouvent publiées dans »l'Oesterreich. Zeitschrift für Meteorologie 1884, p. 150—152; 1885, p. 8—18 et p. 478—485.

En *Janvier* (voy. carte 25) il y a un maximum de pression dans l'intérieur du sud de la Norvège et dans le nord de la Suède. A l'est de l'Islande se trouve un minimum. Un minimum plus profond se trouve aussi à l'ouest de l'Islande. Enfin une zône de basse pression s'étend dans la partie nord de la Mer du Nord vers le NE au-dessus du Skagerack, des lacs suédois et du golfe de Bothnie. Dans la mer de Norvège la température de l'air envoie des languettes chaudes en dehors et le long des côtes de Norvège vers la partie est de la Mer de Barents. Une anse d'air froid, dont la base se trouve dans la Laponie entre le golfe de Bothnie et la Mer de Barents, couvre la partie centrale de la péninsule scandinave. La tension de la vapeur d'eau est répartie à peu près de la même façon que la température. Les vents régnants soufflent sur la côte de Norvège en laissant la terre à droite et la mer à gauche.

L'intérieur du pays, notamment l'Ostland, avec ses vents froids du nord, et le Nord de la Norvège, avec ses vents de terre froids, n'ont point, ou très peu d'orages (voy. carte 26). A l'embouchure du Christianiafjord, où la statistique des vents montre une prédominence marquée bien que faible des vents du SW sur les vents de NE, il y a 0.07 orages par station, un maximum secondaire. A partir de Lindesnes, le nombre des orages augmente et dépasse 0.25 par station le long de toute la côte de l'ouest jusqu'à Lofoten.

Depuis Bergen jusqu'au Trondhjemsfjord, il y a le long de la côte plus de 0.5 orages par station, et entre le Sognefjord et le cap Stad il y a le plus grand nombre, 0.85 par station. Ce maximum de fréquence se trouve dans la partie de la côte qui est le plus rapprochée du minimum barométrique à l'Est de l'Islande et dans la partie du pays qui a la plus haute température moyenne, la plus grande humidité absolue et où les vents méridionaux sont prédominants. Vers le nord et le sud la tension de la vapeur devient plus faible, la température moins élevée et la distance au minimum de pression de la mer de Norvège plus grande.

Au mois de *Février*, la répartition de la pression, de la température, de la tension de la vapeur d'eau et des vents régnants sont à peu près comme en Janvier. L'intérieur du pays n'a presque pas d'orages, non plus que la côte de l'Ostland et le Finmark. La côte ouest a le plus grand nombre d'orages, (la côte de Söndre- et Nordre-Bergenhus 0.23 par station). Ici se trouve aussi la plus haute température et la plus grande tension de la vapeur d'eau.

Au mois de *Mars* la répartition des éléments climatologiques en Norvège est peu changée. Le minimum de pression à l'est de l'Is-

lande est en voie de disparaître. Un minimum plus accentué est en face de Tromsö. L'intérieur de l'Ostland et du Finmark n'a pas d'orages. Leur plus grande fréquence est sur la côte ouest (côte du Nordre-Bergenhus, 0.22 par station), où la température est la plus élevée.

En *Avril* le type d'hiver prédomine, mais il s'est formé un minimum de pression atmosphérique à l'est du Christianiafjord, et la pression la plus basse dans la mer de Norvège est située au large de Tromsö et du Finmark. Les orages commencent à se montrer dans l'Ostland, mais l'intérieur du pays et le Finmark sont en général trop froids pour les orages. La plus grande fréquence se trouve encore sur la côte ouest (Nordre-Bergenhus 0.20 p. station), où la température continue d'être la plus élevée.

En *Mai* la transition au type du climat de l'été, a déjà commencée dans la Norvège méridionale, tandis que celui de l'hiver régne dans le Nord. Un minimum de pression commence à se développer dans l'intérieur de l'Ostland, sous l'influence de la température plus élevée, qui, réduite au niveau de la mer, montre un maximum dans la partie méridionale de l'intérieur de la Norvège et autour duquel soufflent des vents du sud et du SW à Christiania et dans le Skagerack, des vents du NW et N sur la côte ouest, au sud du cap Stad. Dans l'intérieur du nord de la Norvège et de la Suède il existe encore un maximum de pression. En dehors de la côte, près de 70° de latitude se trouve le minimum de pression de la mer de Norvège. L'intérieur y a encore la température assez basse, tandis que celle de la côte est plus haute. — Les orages deviennent les plus nombreux à l'intérieur de l'Ostland (Akershus 0.90 par station), et leur nombre diminue le long de la côte, vers l'ouest jusqu'à Lindesnes et vers le nord le long de la côte d'ouest, où le nombre auprès de Bergen est de 0.25 par station, et sur la côte de Romsdal de 0.09 par station. La Norvège septentrionale n'a point d'orages, à l'exception de l'intérieur du Finmark, qui, avec une température un peu plus élevée que celle de la côte, a 0.04 orages par station.

En *Juin* il y a un minimum de pression à l'intérieur de l'Ostland. Le long de la côte d'ouest et un peu au large, s'étend une bande de pression plus élevée, et dans la mer de Norvège se trouve un minimum de pression. La partie est de l'Ostland a des vents régnants du sud; la côte du Skagerack des vents du SW, la côte ouest des vents du nord ou de l'ouest, le Finmark des vents du NW. L'Ostland a un maximum de température, ramenée au niveau de la mer, de même que l'intérieur du Finmark. Dans l'Ostland la tension de la vapeur d'eau est presque

aussi grande que sur la côte ouest. Elle est la plus grande sur la côte du Skagerack. — La partie est de l'intérieur de l'Ostland a le plus grand nombre d'orages (Akershus 2.18 et le Hedemarken 2.00 par station); ensuite viennent les gouvernements de Buskerud et de Christian, l'intérieur des gouvernements de Trondhjem, la côte du Skagerack, la côte ouest, au sud du Sognefjord, l'intérieur du Finmark. Le plus petit nombre d'orages, nous l'avons à la côte près du cap Stad et depuis le Nordland jusqu'au Varangerfjord (0.13 par station).

En *Juillet*, les éléments climatologiques sont répartis à peu près comme en Juin. Le minimum de pression de l'Ostland, son maximum de température et sa richesse en vapeur sont encore plus marqués (carte 27). La fréquence des orages est plus grande qu'en Juin, mais répartie de la même manière (carte 28). Partout l'intérieur a plus d'orages que le littoral. La partie est de l'intérieur de l'Ostland a plus de 3 orages par station, la côte au nord du cap Stad 0.5, et l'intérieur du Finmark, qui a un maximum de température, 1.33 par station.

En *Août*, nous avons une répartition de la pression barométrique très semblable à celle de Juillet, ainsi que celle de la température, de la vapeur d'eau et des vents. Cependant, la température est un peu plus basse, notamment dans l'intérieur. Le plus grand nombre d'orages se trouve (plus de 2 par station) dans les gouvernements de Hedemarken et d'Akershus ainsi que sur la côte du Skagerack. L'intérieur de la Norvège méridionale a moins d'orages que la côte; dans le nord c'est vice-versa. La côte depuis cap Stad jusqu'au Varangerfjord a le plus petit nombre d'orages: la côte de Romsdal n'ayant que 0.28 et celle du Finmarken 0.21 par station.

En *Septembre* commence la transition au type de l'hiver. Il y a alors un reste du minimum de pression de l'Ostland, mais d'ailleurs nous avons un maximum dans l'intérieur du pays. Dans l'Ostland les vents du sud et du SW règnent encore, mais sur la côte ouest les vents soufflent déjà du sud ou de l'est. Dans le Finmark règnent des vents de l'ouest. La température de même que la tension de la vapeur d'eau sont les plus élevées auprès de Lindesnes. Les orages sont les plus fréquents dans la partie la plus méridionale du pays (côte de Lister et Mandal 1.14 par station). La côte ouest jusqu'au cap Stad a plus d'orages que l'Ostland. L'intérieur a moins d'orages que la côte. Les deux gouvernements de Tromsö et du Finmark sont sans orages.

En *Octobre*, le type d'hiver a repris toute sa prépondérance. L'Ostland a très peu d'orages, l'intérieur en a aussi en général très peu, et les deux gouvernements septentrionaux aucun, excepté l'intérieur du

Finmark (0.02 par station). Les orages sont les plus fréquents sur la côte d'ouest au sud du cap Stad, où la côte de Nordre-Bergenhus a 0.9 par station. Le minimum de pression de la Mer de Norvège se trouve entre l'Islande et le Helgeland (Nordland).

En *Novembre* la distribution hivernale des éléments se continue. Il n'y a presque point d'orages dans l'intérieur du pays. Le plus grand nombre éclate sur la côte de Nordre-Bergenhus (0.6 par station).

En *Décembre* situation semblable à celle de Novembre et de Janvier. L'Ostland est très pauvre en orages; tandis que la côte d'ouest en a quelques-uns, (Nordre-Bergenhus 0.45, Nordre-Trondhjem 0.38 par station).

Les nombres du Tab. IX, indiquent aussi que la fréquence des orages a une période annuelle bien accentuée. Partout elle est la plus grande dans les mois d'été, en Juillet ou en Août. La côte a le plus grand nombre d'orages en Août, mais presque autant en Juillet. L'intérieur au contraire présente distinctement la plus grande fréquence en Juillet. Ceci correspond au fait que la plus haute température s'observe dans l'intérieur plutôt que sur la côte. Le plus grand nombre d'orages, nous l'avons dans l'Ostland; et les minima de pression de cette région, accompagnés de la température élevée des mois d'été, deviennent ainsi les agents les plus puissants pour produire des orages en Norvège. Il est aussi intéressant de voir que les gouvernements d'Akershus et de Hedemarken, qui se trouvent à l'est du minimum de pression en été et où par conséquent les vents chauds du sud sont fréquents, sont aussi les gouvernements qui ont le plus grand nombre d'orages, savoir plus de 8 par station dans l'année, sauf la côte du gouvernement de Nedenes qui en a 8.85 et qui réunit une haute chaleur d'été à des vents de mer frais du SW. Les gouvernements de Christian et de Buskerud, qui se trouvent à l'ouest du minimum de pression d'été, atteignent à peine un peu plus de 6 orages par station par an, et dans le mois le plus riche en orages, en Juillet, ils restent en arrière des gouvernements situés plus à l'est.

Dans toutes les parties du pays la fréquence des orages est la plus grande dans les mois d'été; dans la plupart des gouvernements cette fréquence de l'été est tout à fait prédominante sur celle des autres saisons. Les seules où ceci ne soit pas le cas sont la côte de Nordre-Bergenhus et celle de Romsdal et en partie aussi la côte de Söndre-Trondhjem. En effet, dans ces régions la fréquence des orages en Janvier atteint presqu'au même nombre que dans les mois les plus chauds. C'est la région préférée des orages d'hiver.

Outre ce maximum de fréquence en Janvier, qui sera examiné plus loin avec plus de détail, notre tableau montre quelques maxima secondaires, dans les mois d'automne. Il n'y en a point dans l'Ostland. Après la diminution rapide de la fréquence des orages d'Août à Septembre, les conditions climatologiques passant au type d'hiver, elle va ici en diminuant continuellement presque jusqu'à zéro pendant les mois d'hiver et de printemps. Dans le Vestland au contraire il apparaît dans la plupart des gouvernements, aussi bien sur la côte qu'à l'intérieur, un petit maximum, ou tout au moins une tendance à un tel, en Octobre. Si nous jetons un coup d'oeil sur la répartition de la pression atmosphérique dans la mer de Norvège nous verrons que pendant ce mois le minimum barométrique est situé plus vers le sud entre l'Islande et le Helgeland à la latitude du cercle polaire, tandis qu'il se trouve en Septembre aussi bien qu'en Novembre dans les parages du cap Nord tous près de la côte norvégienne.

Au nord du cap Stad jusqu'au gouvernement de Tromsö il existe un maximum secondaire de fréquence en Novembre, par conséquent correspondant au déplacement du minimum de pression de la mer de Norvège vers le Nord pendant ce mois.

Le plus remarquable des maxima secondaires de la fréquence des orages, est celui qui se montre en Janvier (dans quelques parties en Décembre ou en Février). On en aperçoit déjà les traces dans l'Ostland, mais il apparaît surtout dans la partie du pays qui regarde la mer de Norvège depuis Lindesnes jusqu'au Finmark. C'est en premier lieu cette partie qui a de fréquents orages en Janvier; mais aussi dans l'Intérieur ce maximum se fait sentir. C'est la côte du gouvernement de Nordre-Bergenhus qui a la fréquence la plus grande. La fréquence relative est près ou plus des 10 % du nombre total de l'année; sur les côtes de Nordre-Bergenhus (11.9 proc.), de Romsdal (15.2), de Söndre-Throndhjem (15.3), de Nordre-Throndhjem (5.2), de Nordland (10.5) et dans l'intérieur du gouvernement de Tromsö (10 % en Décembre).

Le minimum de pression de la mer de Norvège est situé en Janvier à l'est de l'Islande et il présente en ce mois sa plus grande profondeur. Sur la côte ouest de la Norvège les gradients barométriques sont plus forts et les tempêtes sont plus fréquentes en Janvier que dans les autres mois d'hiver. Si nous calculons d'après la statistique des vents [1]), la force moyenne du vent sur la côte d'ouest pour les trois mois d'hiver, nous aurons le tableau suivant:

1) Oesterr. Zeitschr. f. Meteorologie XX, 1885. P. 485.

Tab. X. Force du vent.

Gouvernement	Déc.	Janv.	Févr.	Stations.
Lister et Mandal . . .	**2.65**	2.53	**2.65**	Oxö, Mandal, Lindesnes, Lister.
Stavanger	2.65	**2.70**	2.60	Skudesnes, Udsire.
Söndre-Bergenhus . . .	2.00	**2.25**	2.05	Bergen, Hellisö.
Nordre-Bergenhus . .	1.97	**2.20**	2.00	Florö.
Romsdal	2.40	2.40	**2.43**	Aalesund, Ona, Christianssund.
Nordre-Trondhjem . . .	2.30	**2.55**	2.45	Villa, Prestö.
Nordland	2.12	**2.37**	2.20	Brönö, Bodö, Lödingen, Andenes.
Tromsö	1.70	**2.00**	2.00	Tromsö.
Finmarken	2.50	**2.80**	2.65	Gjesvär, Vardö.
Moyenne	2.25	**2.42**	2.34	

Or, la plus grande force du vent a lieu en Janvier. Quant à la fréquence des jours de tempête, la statistique montre le résultat suivant, calculé pour les mêmes stations que la force du vent.

Tab. XI.

Gouvernement	Déc.	Janv.	Févr.
Lister et Mandal . . .	**4.3**	3.3	3.8
Stavanger	**4.8**	4.3	3.5
Söndre-Bergenhus . . .	5.5	**6.7**	4.9
Nordre-Bergenhus . . .	2.7	**3.2**	2.7
Romsdal	5.5	**5.9**	5.2
Nordre-Trondhjem . . .	4.2	**6.2**	5.2
Nordland	3.5	**4.6**	3.6
Tromsö	1.8	**3.1**	2.5
Finmarken	4.3	**6.2**	5.4
Moyenne	4.1	**4.8**	4.1

Or, le mois avec le plus grand nombre de jours avec tempête est le mois de Janvier. Il est reconnu que les orages d'hiver éclatent, avec décharges sporadiques de nuages relativement peu élevés, surtout pendant des tempêtes du SW et de l'W. Les orages d'hiver exigent, outre un mouvement plus rapide de l'air, aussi bien en sens horisontal (tempête) qu'en sens vertical (fortes dépressions), encore une température relativement élevée. Celle-ci existe aussi en Janvier aux époques, où éclatent les orages. Il est frappant, combien de fois la température moyenne de Janvier est plus haute que celle de Décembre et de Février. Ce n'est que dans les moyennes normales des séries de vingtaines d'années, que cette anomalie s'élimine. Et pour nos stations sur le littoral entre le cap Stad et le cap Nord, la marche annuelle de la température pendant les mois d'hiver, réduite á une très longue série d'années, présente à

peine une très faible diminution de Décembre à Janvier mais au contraire une baisse comparativement rapide de Janvier à Février. Il semble, qu'en mer au large de la Norvège une onde chaude s'avance au mois de Janvier vers le nord, qui s'oppose à la baisse de la température. La température de l'Atlantique nord est le plus élevée en Août, et par conséquent cette onde chaude n'atteindrait nos côtes qu'en Janvier.

Un examen plus approfondi montre, que ce n'est pas dans tous les mois de Janvier, qui ont eu une température moyenne plus élevée que la température normale, qu'on a observé des orages. D'un autre côté, tous les mois de Janvier, dont la température moyenne a été au-dessous de la normale n'ont pas été sans orages. Dans le premier cas, il est possible que le mouvement de l'air n'ait pas atteint la force nécessaire, ou qu'un orage ait échappé à l'observation. Dans le second cas, il faut remarquer, qu'une période de froid se termine facilement par une tempête plus ou moins forte. *En moyenne,* le nombre des orages de Janvier est cependant d'autant plus grand, que la température moyenne du mois est plus au-dessus de la température normale. Pour prouver cela, j'ai comparé le nombre des orages de Janvier dans chaque gouvernement sur la côte, à l'anomalie thermique aux stations correspondantes.

Tab. XII. Janvier. a: Gouvernement, nombre d'orage par station.
b: Anomalie thermique à la station correspondante.

Année	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	1881	1882	1883
a. Smaalenene . . .	—	—	—	—	—	—	—	0 50	—	—	—	—	—	—	—	—	—
b. Sandösund	—	—	—	—	—	—	—	5°.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a. Jarlsberg-Laurvig	—	—	—	—	—	0.50	—	0.33	—	—	—	—	—	—	—	—	—
b. Sandösund	—	—	—	—	—	3°.3	—	5°.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a. Lister et Mandal	—	—	—	—	0.14	1.14	—	0.80	—	—	—	—	—	—	—	—	—
b. Mandal	—	—	—	—	-2°.0	2°.8	—	4°.1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a. Stavanger	—	—	—	—	—	0 80	0.50	0.88	—	—	0.14	—	—	—	—	0.40	0.80
b. Skudesnes	—	—	—	—	—	2°.3	2°.4	2°.8	—	—	-0°.3	—	—	—	—	3°.1	0°.4
a. Söndre-Bergenhus	—	0.44	1.20	—	—	1.43	0.17	1.14	—	0.33	0.67	0.25	—	—	—	0.50	0.50
b. Bergen	—	-0°.8	3°.9	—	—	4°.4	3°.9	3°.9	—	2°.2	-0°.2	-0°.8	—	—	—	4°.2	-1°.0
a. Nordre-Bergenhus	—	—	—	—	1.50	2.50	0.50	4.20	—	0.67	—	1.00	—	—	—	0.50	·
b. Florö	—	—	—	—	-1°.0	2°.8	2°.5	2°.2	—	1°.8	—	-0°.3	—	—	—	2°.9	—
a. Romsdal	—	0.15	—	—	—	0.43	0.50	2.75	—	0.50	—	—	—	0.20	—	1.50	—
b. Aalesund	—	0°.0	—	—	—	2°.9	2°.6	1°.5	—	2°.0	—	—	—	1°.4	—	3°.2	—
a. Söndre-Trondhjem	—	0.50	—	—	—	—	—	2.00	0.25	1 75	0.25	1.00	—	—	—	—	—
b. Christianssund. .	—	0°.3	—	—	—	—	—	2°.1	-2°.3	1°.4	-1°.0	0°.2	—	—	—	—	—
a. Nordre-Trondhjem	—	0.50	—	—	—	—	—	0.50	—	1.00	—	—	—	0.50	—	1.50	—
b. Villa	—	1°.3	—	—	—	—	—	1°.6	—	2°.0	—	—	—	-4°.6	—	2°.2	—
a. Nordland	—	—	0.29	—	0.46	—	—	1.29	0.14	0.44	—	0 25	—	0.40	1.20	0.40	—
b. Bodö	—	—	4°.0	—	0°.4	—	—	2°.4	-3°.9	2°.6	—	1°.4	—	2°.6	-4°.0	2°.1	—
a. Tromsö	—	—	—	—	—	—	—	0.60	—	—	—	—	—	—	—	—	—
b. Tromsö	—	—	—	—	—	—	—	2°.3	—	—	—	—	—	—	—	—	—
a. Finmarken	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.33	—	—	—	—	—	—	—
b. Fruholm	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2°.2	—	—	—	—	—	—	—

De ce tableau j'ai tiré les résultats moyens suivants. Pour la Norvège au sud du Dovrefjeld, l'Ostland et le Vestland, des 22 cas, où l'on a une anomalie positive, on obtient 0.91 orages par station pour une anomalie positive de + 3°02, et de 7 cas, 0.64 d'orages par station pour une anomalie négative de -0°91. En moyenne de 29 cas, 0.84 orages par station pour une anomalie de + 2°07. — Pour la Norvège septentrionale, au nord du cap Stad et du Dovrefjeld, on obtient de 24 cas, 0.80 orages par station pour une anomalie positive de + 1°86, et de 5 cas, 0.27 orages par station pour une anomalie négative de — 3°76. Par conséquent, en moyenne on a de 29 cas, 0.71 orages par station pour une anomalie de + 1°00.

Pour le littoral de tout le pays, on obtient de 46 cas, 0.85 orages par station, pour une anomalie positive de 2°42, et de 12 cas, 0.48 orages par station pour une anomalie négative de — 1°85. En moyenne par conséquent de 58 cas 0.72 orages par station pour une anomalie de + 1°53.

Les mois, dans lesquels les orages sont les plus rares, sont en moyenne Mars et Avril. Le littoral, avec son minimum annuel de température retardée, a en moyenne le minimum en Avril, l'intérieur en Mars. Le minimum de fréquence de la côte ne descend pas si bas que celui de l'intérieur. En Avril la température est plus élevée, et la quantité de vapeur d'eau plus considérable qu'en Mars, mais la carte de la pression de l'air montre en Avril, lorsque la pression la plus basse se trouve en dehors de la côte du Finmark, où la température est encore basse, de très faibles gradients en dehors de la côte d'ouest, vis-à-vis Mars qui a des gradients plus forts et un reste du minimum islandais, sans compter un minimum comparativement bas au dehors de Tromsö. Sur la côte des gouvernements de Nordland et de Tromsö, le minimum de fréquence arrive en Mai, le mois qui a là haut de faibles gradients, tandis que ce mois dans le sud de la Norvège a déjà acquis le type climatologique de l'été.

Statistique de la grêle.

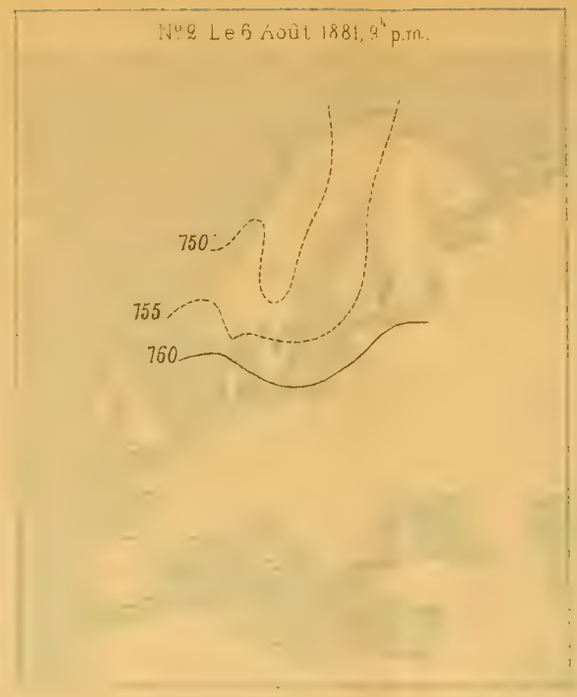
Tab. XIII. Nombre des observations faites dans chaque gouvernement sur la grêle pendant les orages.

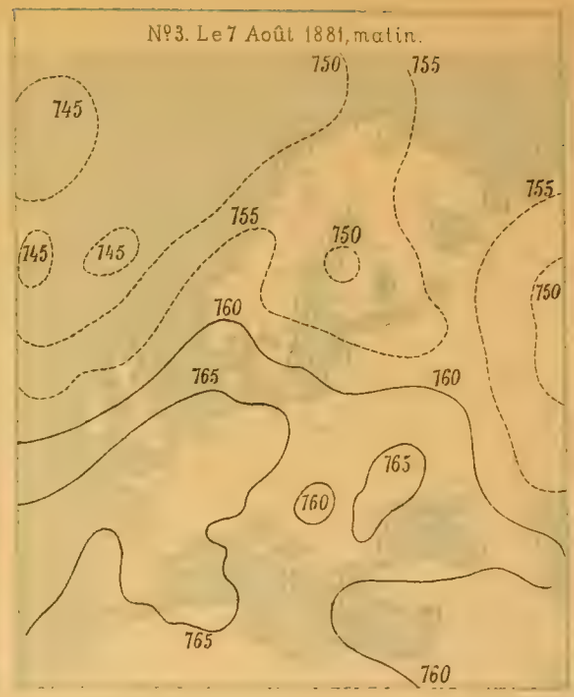
Gouvernement	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879	1880	Totaux
1) *Suède*											
Norrbotten	4	5	8	2	4	1	3	1	1	5	34
Vesterbotten	4	9	14	4	5	1	1	0	2	2	42
Vesternorrland	0	1	8	4	3	0	5	3	1	5	30
Östersund	4	8	4	4	2	2	1	0	2	2	29
Gefleborg	5	10	7	1	3	4	4	5	3	4	46
Falu	1	9	3	7	3	1	1	1	3	1	30
Stockholm	4	20	3	4	2	1	1	4	5	3	47
Nyköping	1	16	7	1	4	9	10	8	8	8	72
Upsala	3	34	1	2	5	9	3	16	5	3	81
Vesterås	(3)	13	14	3	5	5	8	8	9	7	75
Örebro	2	9	11	8	6	5	18	11	14	8	92
Vermland	1	14	8	1	17	3	11	5	5	10	75
Skaraborg	0	28	19	7	8	4	1	8	4	2	81
Linköping	2	8	2	1	5	6	6	9	10	16	65
Gothland	1	10	4	3	2	0	3	7	5	7	42
Elfsborg	8	19	8	3	6	0	7	6	9	2	68
Bohus et Halland	5	55	27	5	10	4	5	7	5	5	**128**
Kronoberg	8	20	20	5	1	3	6	0	6	10	79
Jönköping	13	17	13	2	2	5	7	0	2	3	64
Kalmar	9	5	5	4	2	3	7	3	5	7	50
Skåne et Blekinge	12	8	24	4	6	5	8	10	2	16	95
Suède: Totaux	**90**	**318**	**210**	**75**	**101**	**71**	**116**	**112**	**106**	**126**	**1325**

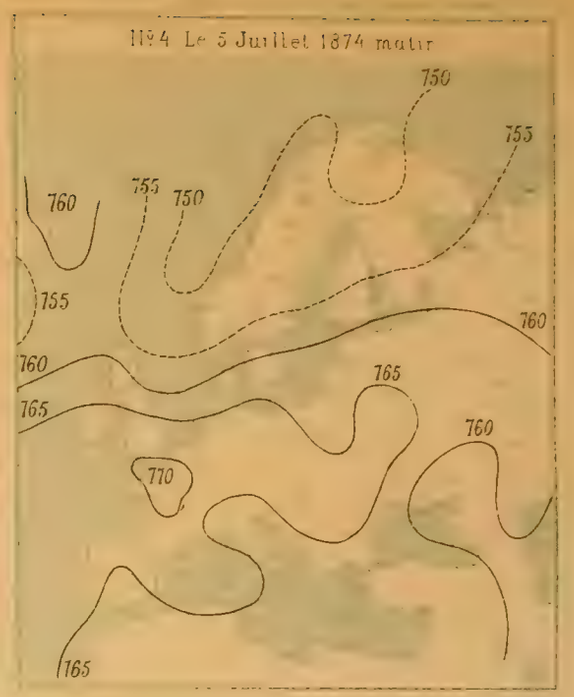
Gouvernement	1867	1868	1869	1870	1871	1872	1873	Totaux
2) *Norvège*								
Smaalenene	0	8	0	3	1	6	1	19
Akershus	1	2	8	4	3	9	0	27
Hedemarken	2	5	2	18	4	17	8	56
Christian	0	3	0	2	2	2	5	14
Buskerud	0	0	2	6	3	1	3	15
Jarlsberg	0	2	1	1	0	12	1	17
Bratsberg	0	1	0	4	0	4	0	9
Nedenes	0	2	0	5	2	12	0	21
Lister et Mandal	1	17	5	6	5	27	3	64
Stavanger	4	27	8	4	12	17	11	**83**
Söndre-Bergenhus	3	15	3	1	4	8	3	37
Nordre-Bergenhus	0	2	0	0	5	2	14	23
Romsdal	6	14	1	3	8	3	8	43
Söndre-Trondhjem	0	6	0	7	2	3	2	20
Nordre-Trondhjem	1	4	0	1	7	0	3	16
Nordland	2	13	3	2	20	0	8	48
Tromsö	0	1	0	0	0	0	3	4
Finmarken	0	0	0	0	0	0	0	0
Norvège: Totaux	**20**	**122**	**33**	**67**	**78**	**123**	**73**	**516**

Le tableau XIII montre qu'en Norvège, la fréquence de la grêle pendant les orages suit la fréquence de ces derniers. En moyenne c'est à peine un orage sur 9 (0.52 : 4.8), qui en Norvège est accompagné de grêle. Les dégats occasionnés par la grêle sont très rares en Norvège. — En Suède les grêles ne sont guère plus fréquentes. Sur 14745 orages 1325 ont été suivis de grèle, ou à peu près un sur onze. Leur fréquence correspond d'ailleurs en général à celle des orages. Les grêles sont les plus nombreuses dans les parties ouest et sudouest du pays, et dans les gouvernements situés autour des grands lacs, le Venern, le Vettern, le Hjelmaren et le Mälaren. En Norrland et sur le Gothland les grêles sont rares et leurs dégats peu importants. Dans le Svealand et le Götaland des pertes ont parfois lieu, bien que beaucoup plus rarement que dans les pays plus méridionaux. Suivant les comptes des compagnies d'assurance, les pertes des récoltes par an en Suède, ne dépassent pas en moyenne 6 centimes par 100 francs, tandis qu'à Berlin on perd 63 centimes et à Magdebourg 90 c. par 100 francs. Si parfois des pertes considérables se font sentir, les orages accompagnés de grêle sont pourtant comparativement inoffensifs, dans la presqu'île scandinave.

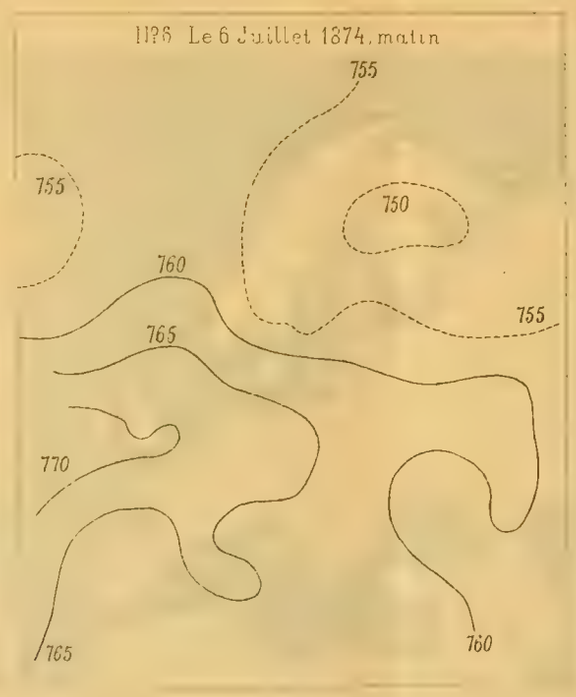
Nº 1. Le 6 Août 1881, matin.
750
755
745
740
760
750
765
760


Nº 2. Le 6 Août 1881, 9h p.m.
750
755
760

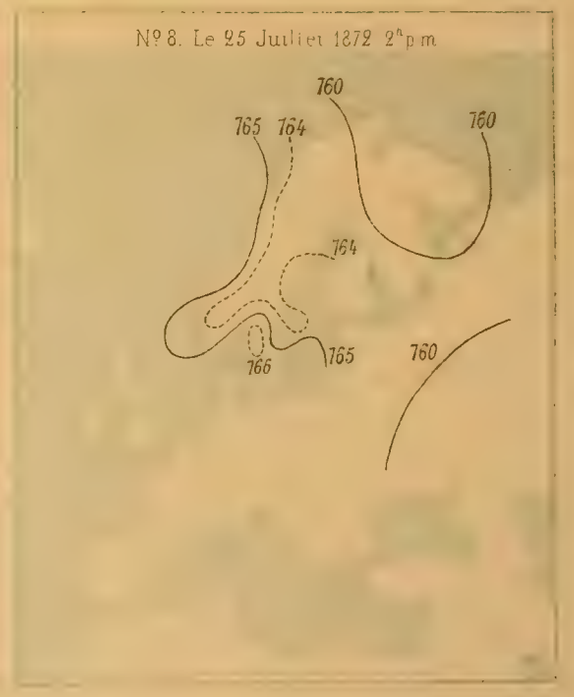

Nº 3. Le 7 Août 1881, matin.
750
755
745
755
745
750
760
765
760
765
760
760

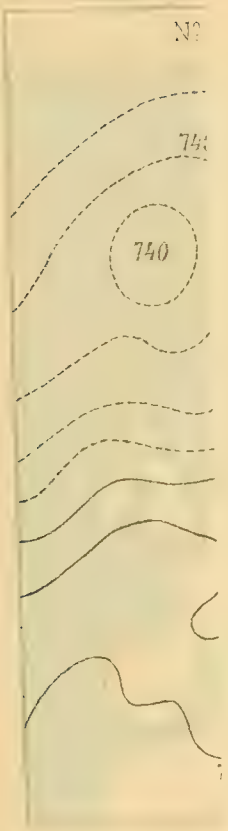

Nº 4. Le 5 Juillet 1874 matin
750
755
760
755
750
760
755
760
765
765
760
770
765

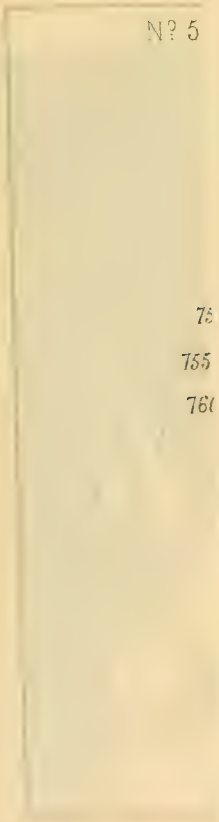
Nº 5. Le 5 Juillet 1874 9h p.m.
750
752,5
755
760

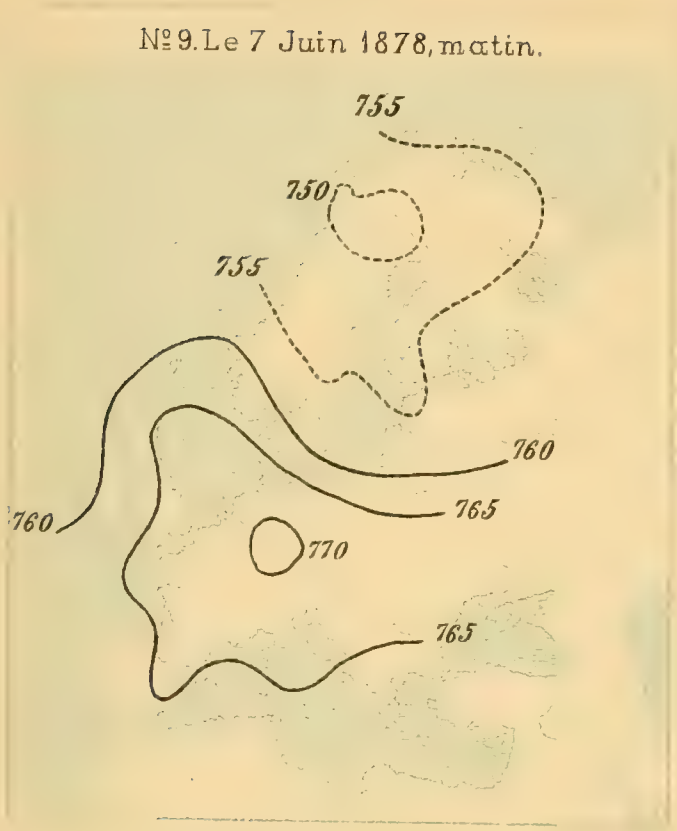

Nº 6. Le 6 Juillet 1874, matin
755
755
750
760
755
765
770
765
760

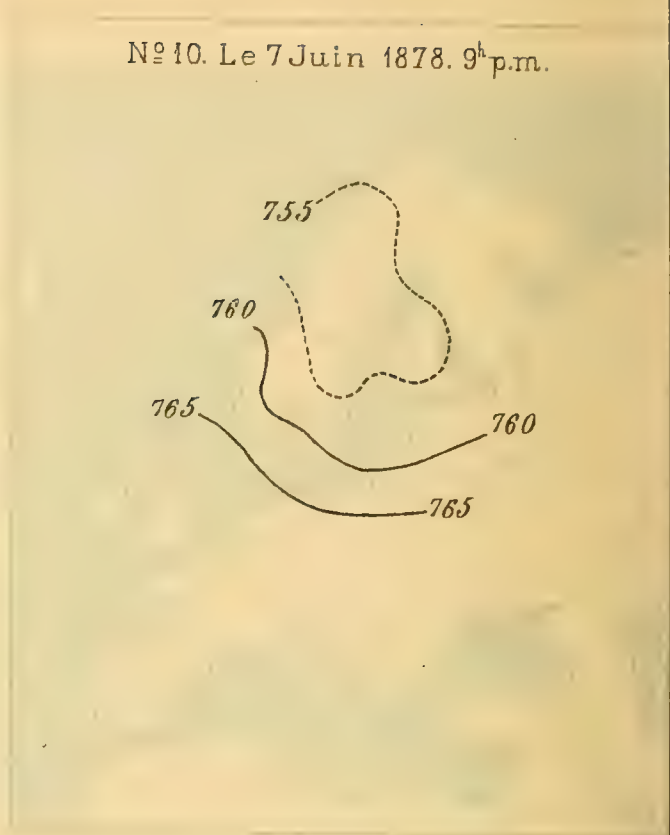
Nº 7. Le 25 Juillet 1872, matin.
760
765
765
760
765
760

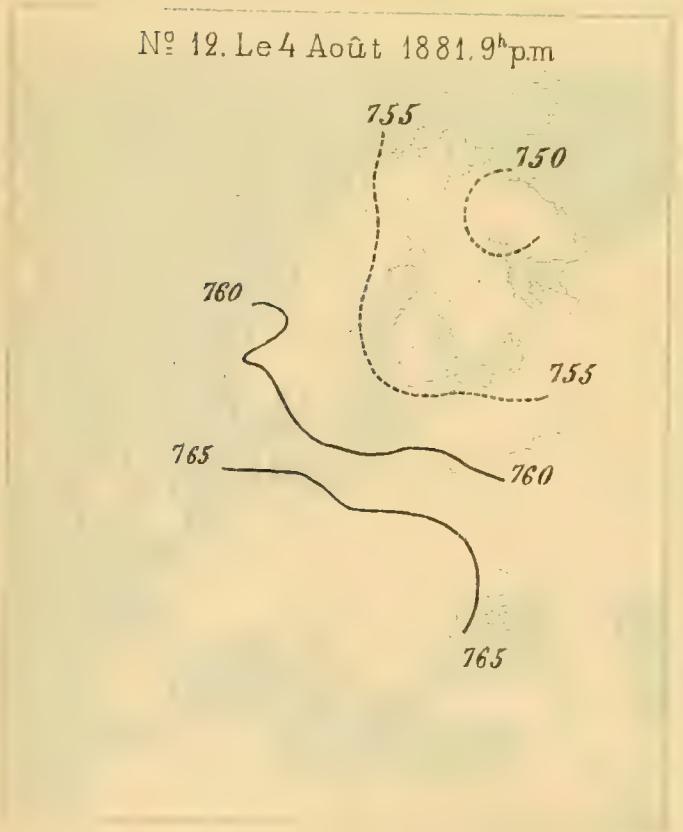

Nº 8. Le 25 Juillet 1872 2h p.m.
760
765
764
760
764
766
765
760

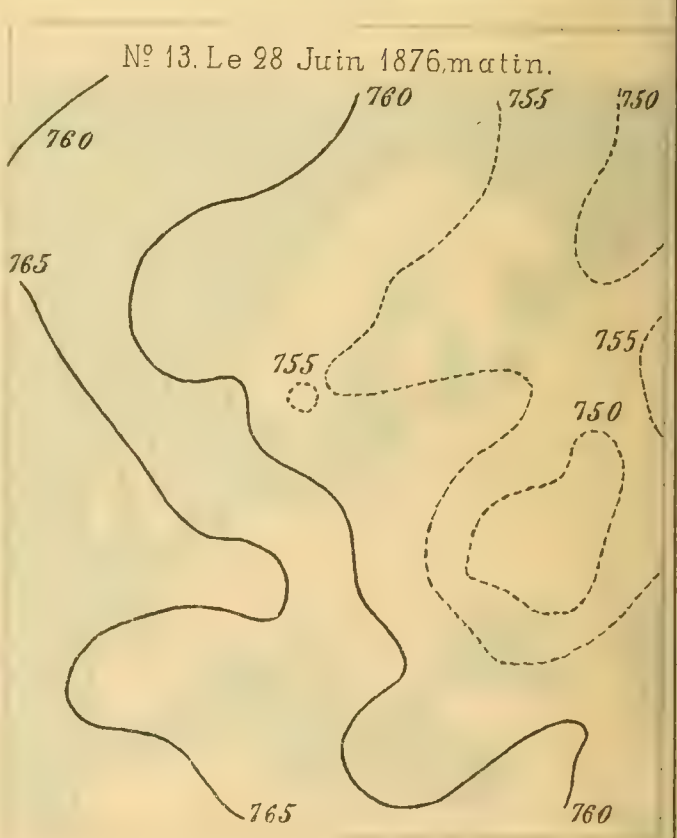

N?
740

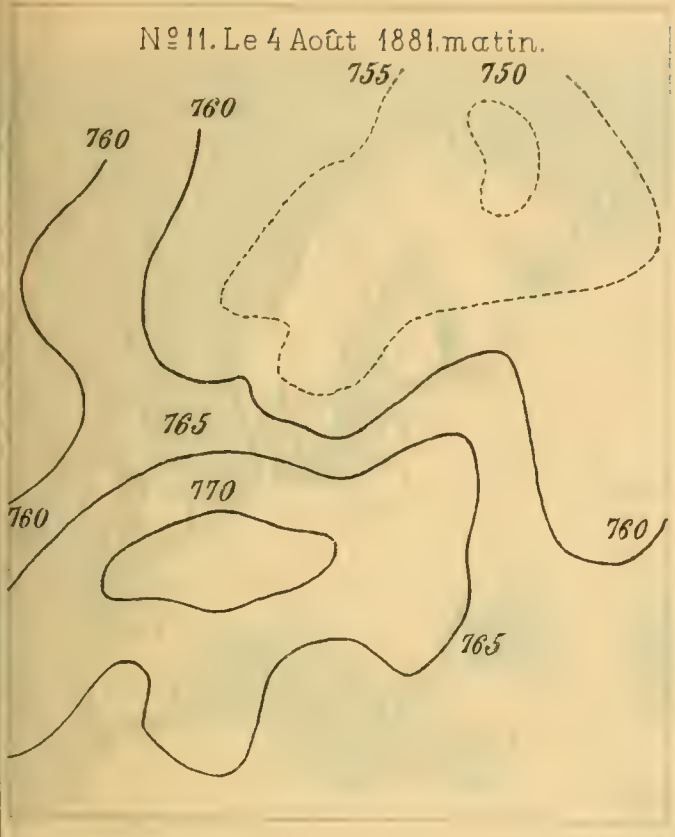

N? 5

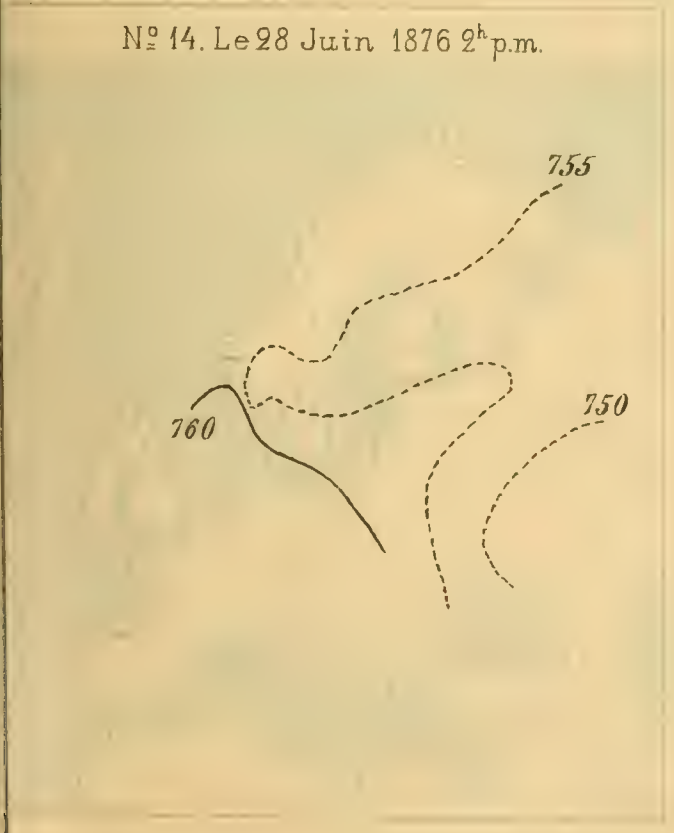

№ 9. Le 7 Juin 1878, matin.
755
750
755
760
765
760
770
765

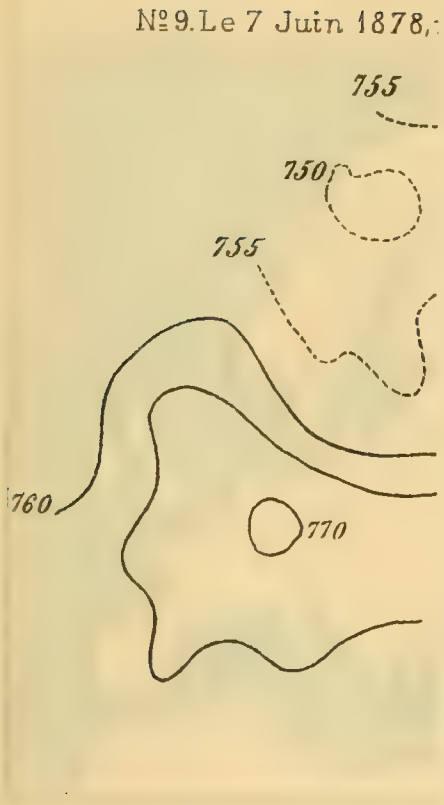

№ 10. Le 7 Juin 1878. 9h p.m.
755
760
765
760
765

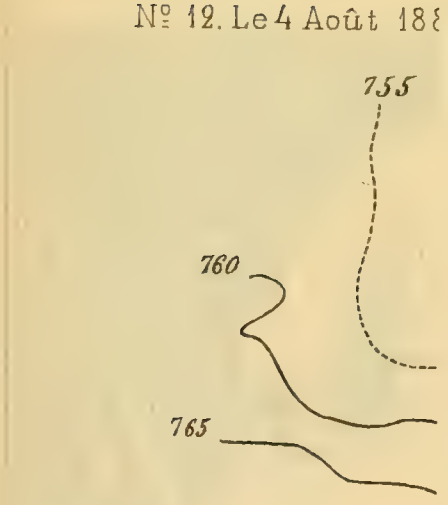

№ 12. Le 4 Août 1881. 9h p.m
755
750
760
755
765
760
765


№ 13. Le 28 Juin 1876, matin.
760
760
755
750
765
755
755
750
765
760


N° 11. Le 4 Août 1881. matin.
755
750
760
760
765
770
760
760
765


N° 14. Le 28 Juin 1876 2h p.m.
755
760
750

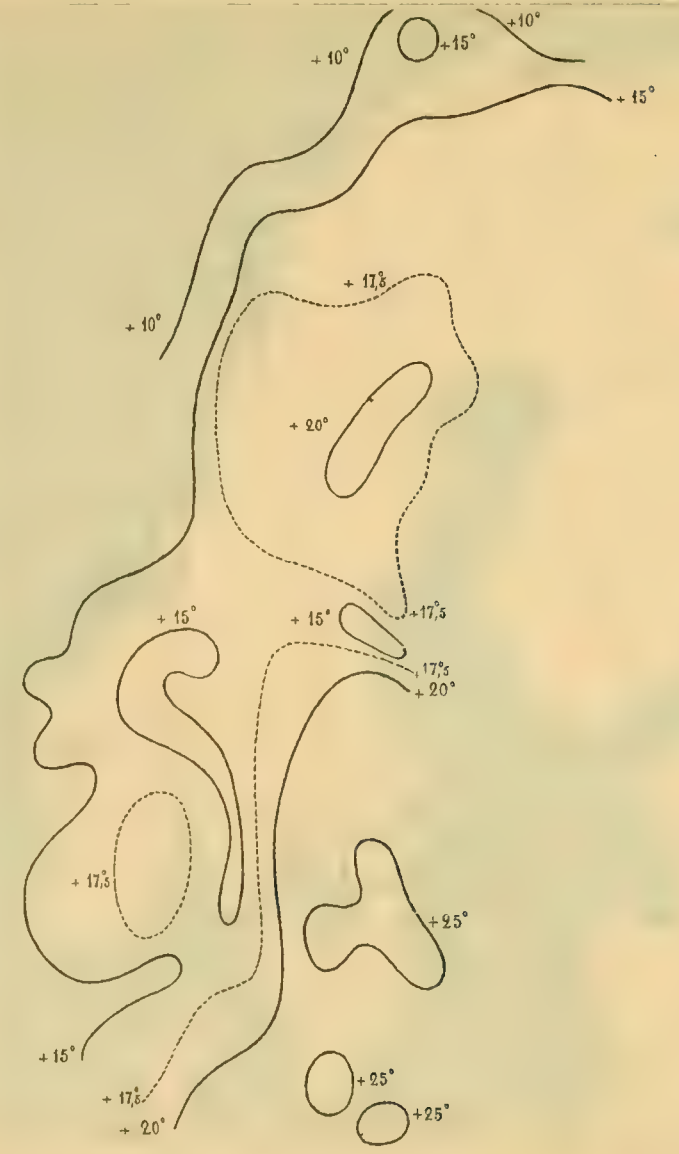

Nº 9. Le 7 Juin 1878,
755
750
755
760
770


Nº 12. Le 4 Août 18
755
760
765

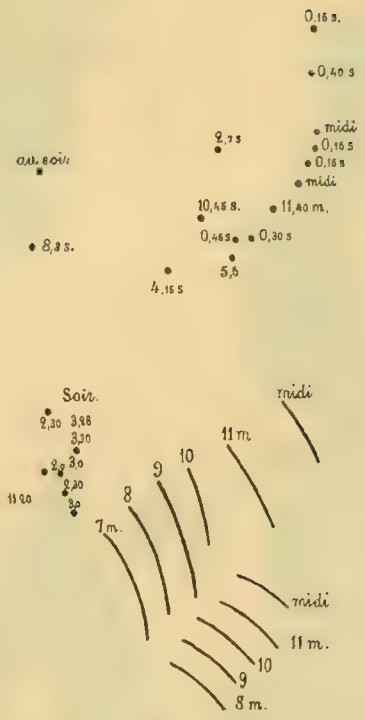
N° 15 1881 6 Août. Isobrontes.

N° 16 1881. 6 Août. Heure moyenne de l'orage.

N°17. 1881. 6 Août. Lignes isothermes. 2h p.m.

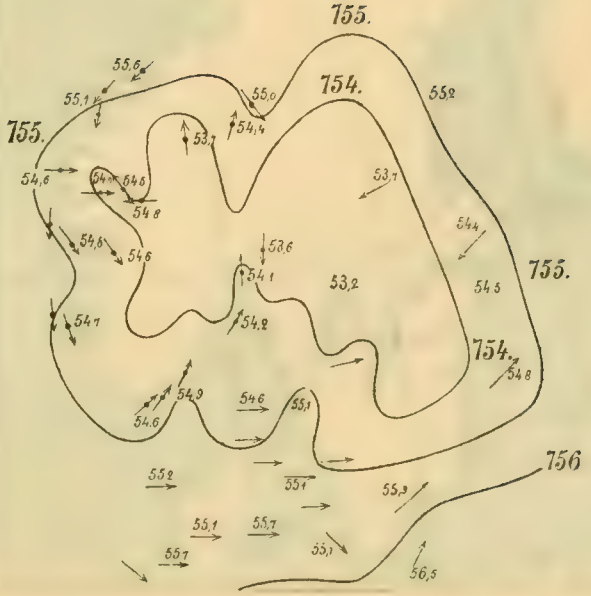


N°18. Orages le 5 Juillet 1874. Heures moyennes.

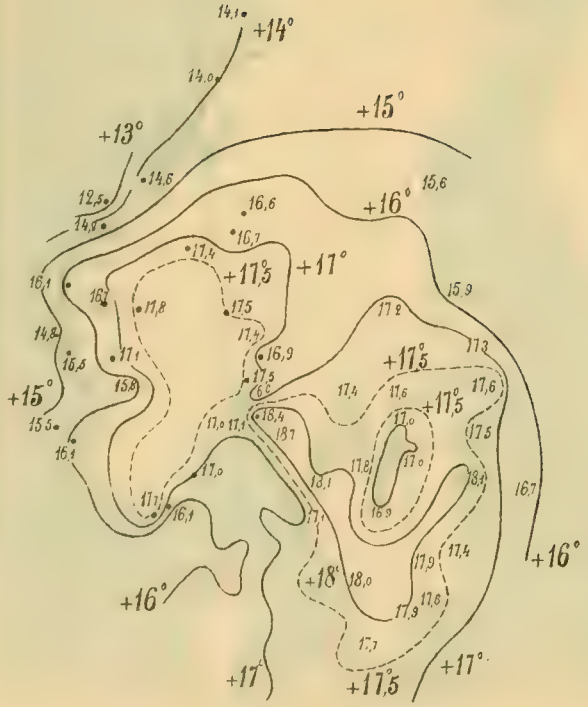


Nº19 Orages du 25 Juillet 1872, au soir.

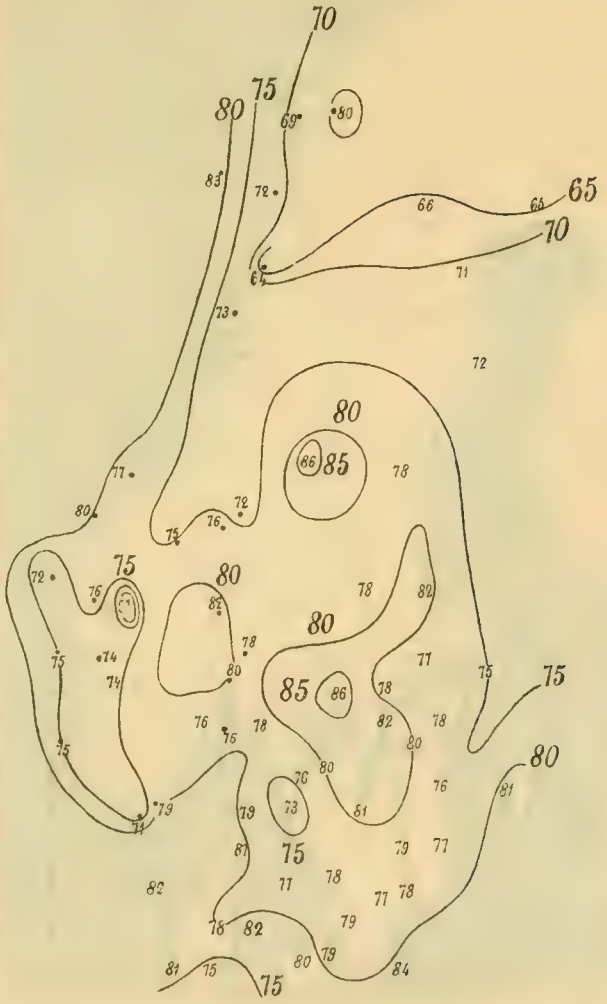
Nº 20. Juillet 1883. Isobares et vents dominants



Nº 21. Juillet 1883 Températures réd. au niveau de la mer.

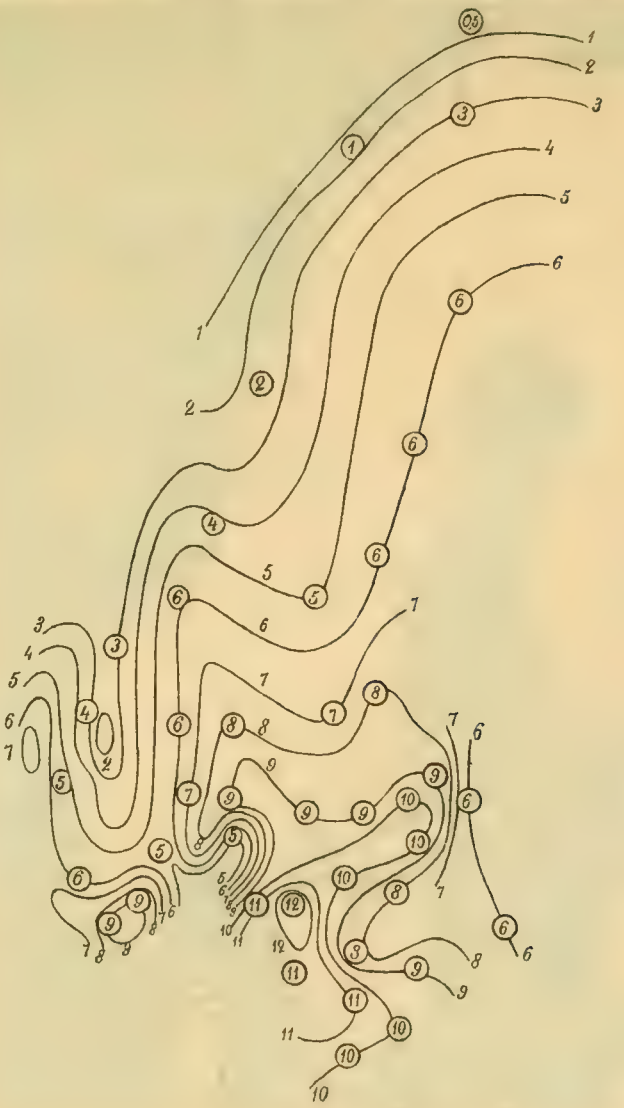


Nº 22. Juillet 1883. Humidité relative.

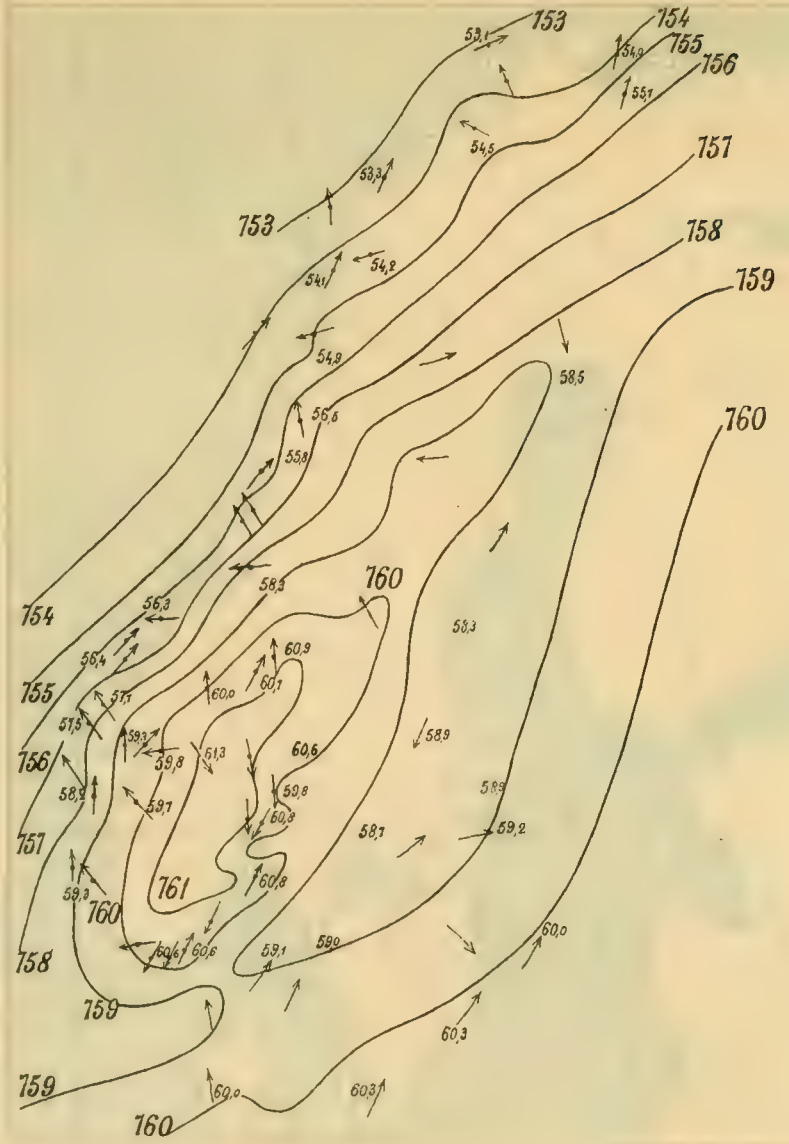


Nº 23. Juillet 1883. Nombre des jours d'orages.

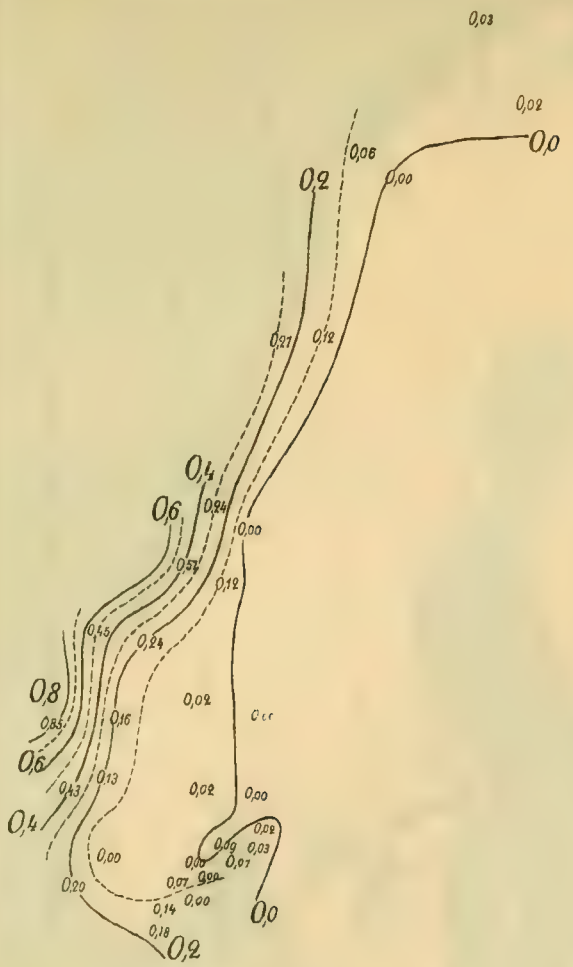
Nº 24. Nombre des orages par an dans chaque gouvernement.
Les chiffres indiquent le nombre moy. par station.



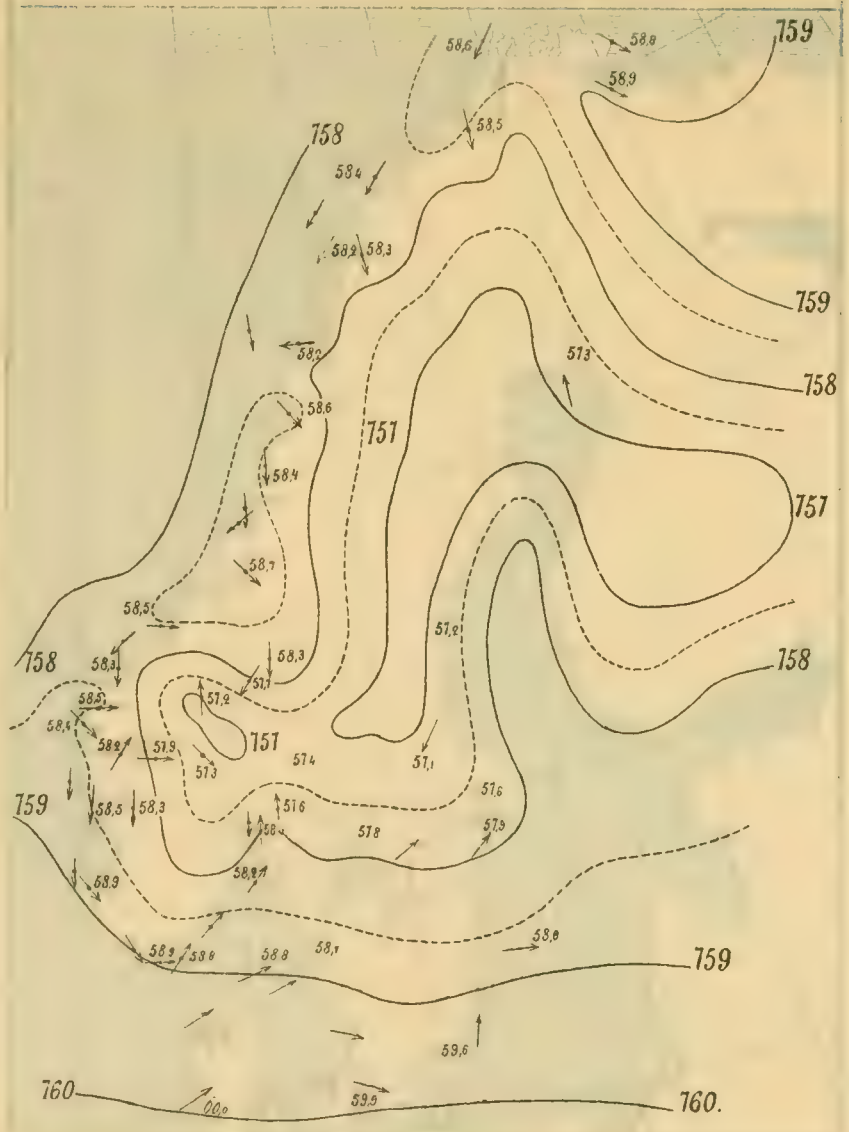
N° 25. Janvier. Pression et vents dominants.



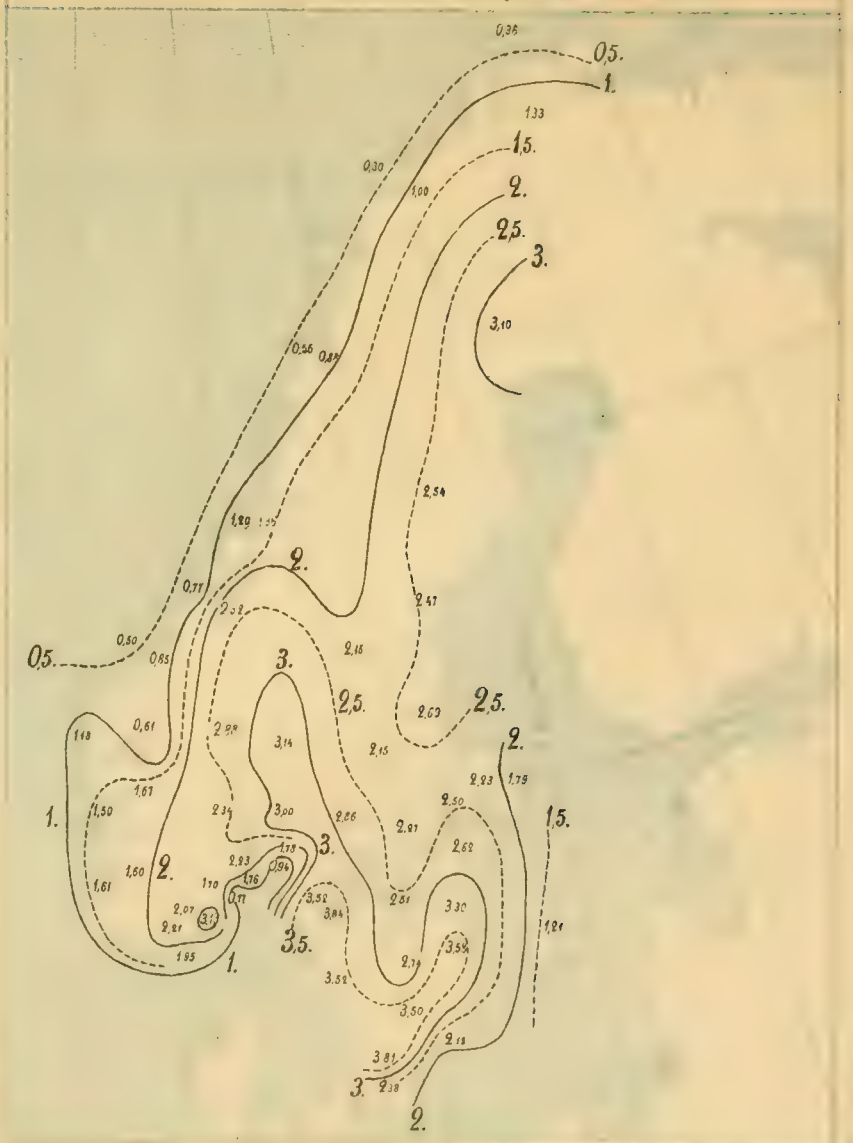
N° 26. Janvier. Nombre d'orages par station.



Nº 27 Juillet. Pression et vents dominants.



Nº 28. Juillet. Nombre d'orages par station.



Nº 29. Divisions du pays.

Norvège.

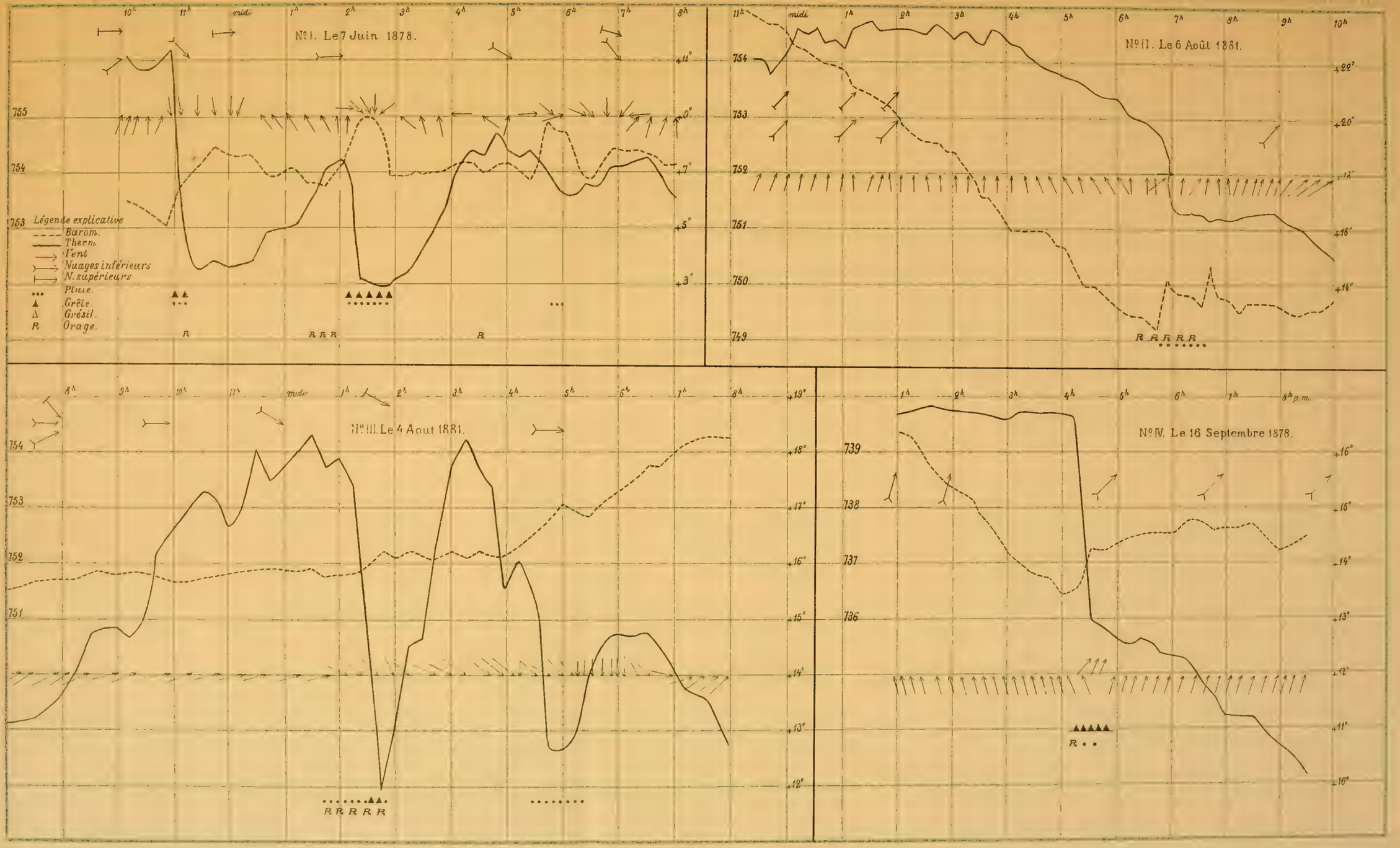
1. Smaalenene
2. Akershus
3. Hedemarken
4. Christian
5. Buskerud
6. Jarlsberg et Laurvik
7. Bratsberg
8. Nedenes
9. Lister et Mandal
10. Stavanger
11. Søndre Bergenhus
12. Nordre »
13. Romsdal
14. Søndre Throndhjem
15. Nordre »
16. Nordland
17. Tromsö
18. Finmarken

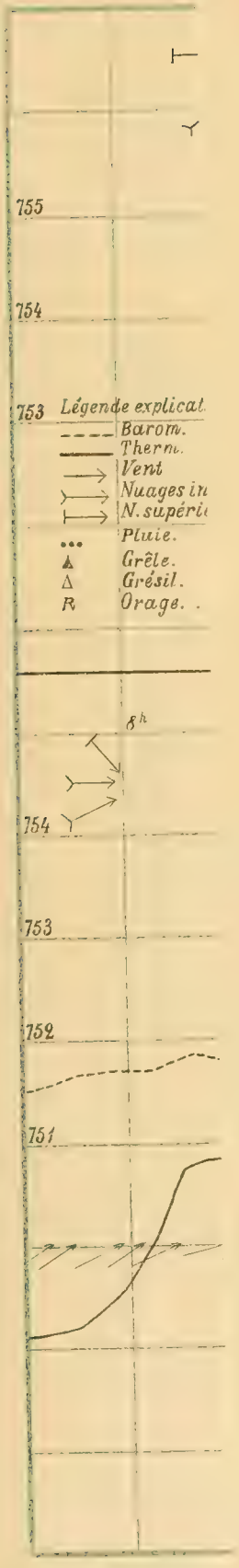
1—8. *Östland*
9—12. *Vestland*
13—15. *Romsdal-Throndhjem*
16—17. *Nordland-Tromsö*
18. *Finmark*

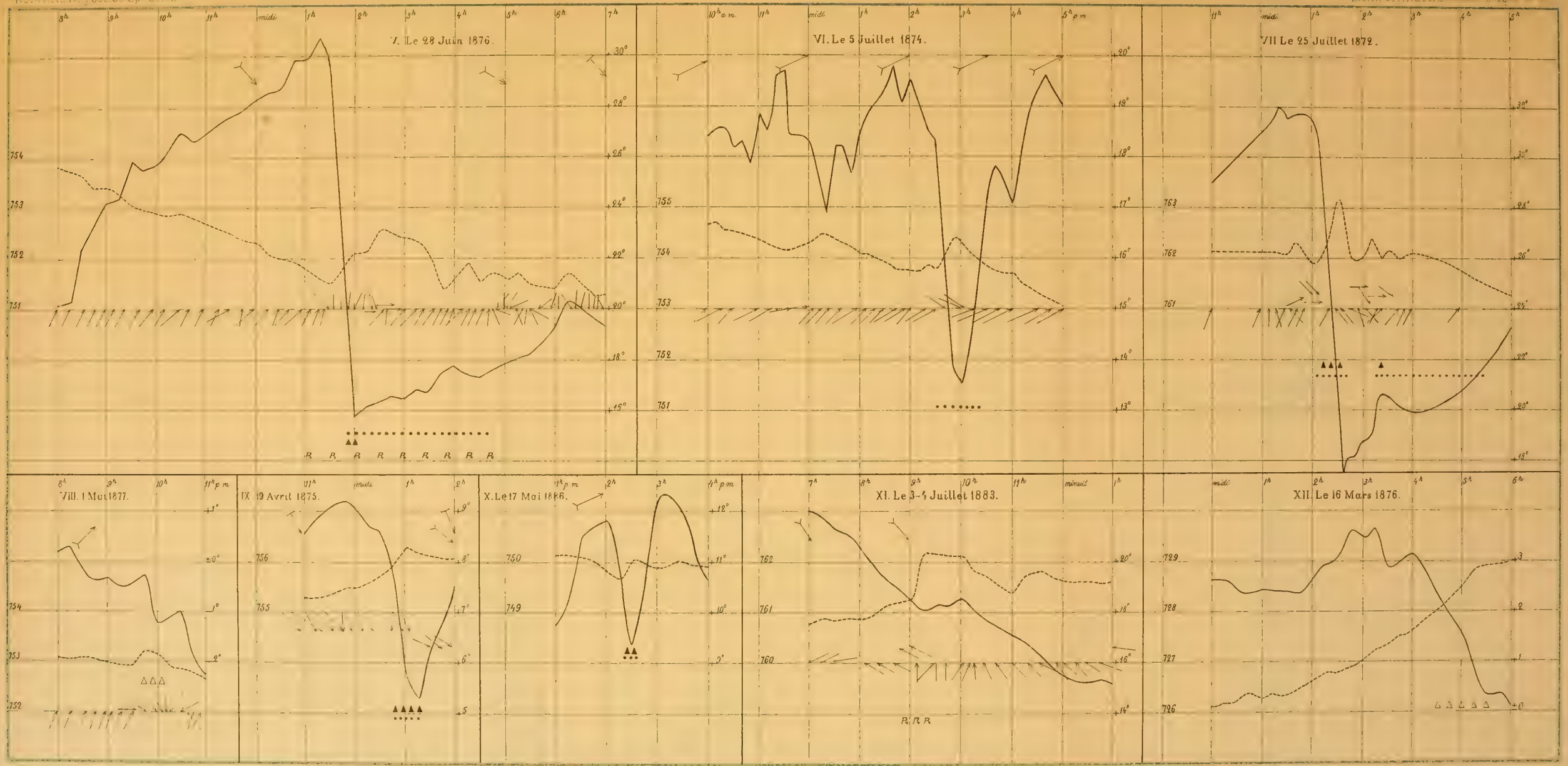
Suède.

1. Norrbotten
2. Vesterbotten
3. Vesternorrland
4. Östersund
5. Gefleborg
6. Falun (Dalécarlie)
7. Upsala
8. Vesterås
9. Stockholm
10. Nyköping
11. Örebro
12. Vermland
13. Skaraborg
14. Elfsborg
15. Bohuslän
16. Halland
17. Linköping
18. Jönköping
19. Kronoberg
20. Kalmar
21. Blekinge
22. Christianstad } Scanie
23. Malmöhus }
24. Gotland

1—5. *Norrland*
6—12. *Svéaland*
13—24. *Götaland*


Nº I. Le 7 Juin 1878.
Nº II. Le 6 Août 1881.
Nº III. Le 4 Aout 1881.
Nº IV. Le 16 Septembre 1878.
Légende explicative
Barom.
Therm.
Vent
Nuages inférieurs
N. supérieurs
Pluie.
Grêle.
Grésil.
Orage.
midi
p.m.


755
754
753
Légende explicat
Barom.
Therm.
Vent
Pluie.
Grêle.
Grésil.
Orage.
8h
754
753
752
751


V. Le 28 Juin 1876.
VI. Le 5 Juillet 1874.
VII Le 25 Juillet 1872.
VIII. 1 Mai 1877.
IX. 19 Avril 1875.
X. Le 17 Mai 1886.
XI. Le 3-4 Juillet 1883.
XII. Le 16 Mars 1876.

754
753
752
751
754
753
752

THE OXYCEPHALIDS

BY

CARL BOVALLIUS.

WITH EIGHTY-SEVEN ILLUSTRATIONS IN THE TEXT
AND
SEVEN PLATES.

(PRESENTED TO THE ROYAL SOCIETY OF SCIENCES OF UPSALA THE 27th OF APRIL, 1889.)

UPSALA.
PRINTED BY EDV. BERLING.
1890.

CONTENTS.

Introduction . . . . . p. 1.

I. Historical notes on the Oxycephalids.

Bibliography . . . . . » 2.

II. The systematical position of the Oxycephalids.

Characteristics for the distinction of the *subtribes* of the Amphipoda Hyperiidea . . . . . 14.

Characteristics for the distinction of the *families* of the Hyperiidea curvicornia . . . . . 15.

Characteristics for the distinction of the *genera* and *species* among the Oxycephalids . . . . . » 16.

Synoptical table of the families of the Amphipoda Hyperiidea . » 17.

III. Morphological notes on the Oxycephalids.

1. The shape of the body . . . . . » 20.
2. The integument . . . . . » 21.
3. The head . . . . . » 22.
4. The eyes . . . . . » 23.
5. The first pair of antennæ . . . . . » 24.
6. The second pair of antennæ . . . . . » 26.
7. The mouth-organs . . . . . » 28.
8. The peræon and its appendages . . . . . » 30.
9. The pleon and its appendages . . . . . » 36.
10. The urus and its appendages . . . . . » 37.
11. The nervous system . . . . . » 41.
12. The glands . . . . . » 41.
13. The young . . . . . » 43.

IV. The Oxycephalidean genera and species.

The family Oxycephalidæ . . . . . » 45.

Synoptical table of the genera . . . . . » 46.

1. Simorhynchotus . . . . . 47.
   - S. antennarius . . . . . » 49.
   - S. Stebbingi . . . . . » 50.
   - S. Lilljeborgi . . . . . » 52.
2. Oxycephalus . . . . . 54.
   - O. piscator . . . . . » 56.
   - O. Clausi . . . . . » 60.

O. tuberculatus . . . . . p. 62.
O. pectinatus . . . . . » 64.
O. latirostris . . . . . » 66.
3. Tullbergella . . . . . » 68.
T. cuspidata . . . . . » 69.
4. Calamorhynchus . . . . . » 72.
C. pellucidus . . . . . » 73.
C. rigidus . . . . . » 74.
5. Doryccphalus . . . . . » 75.
D. Lindstroemi . . . . . » 76.
D. ambobus . . . . . » 79.
6. Streetsia . . . . . » 80.
S. Challengeri . . . . . » 82.
S. porcellus . . . . . » 83.
S. pronoïdes . . . . . » 84.
S. carinata . . . . . » 87.
S. Steenstrupi . . . . . » 89.
S. longiceps . . . . . » 92.
S. (?) mindanaonis . . . . . » 93.
7. Cranocephalus . . . . . » 94.
C. Goësi . . . . . » 95.
8. Stebbingella . . . . . » 97.
S. sclerotica . . . . . » 98.
S. typhoïdes . . . . . » 100.
S. Théeli . . . . . » 101.
9. Glossocephalus . . . . . » 105.
G. Milne-Edwardsi . . . . . » 106.
G. spiniger . . . . . » 108.
10. Leptocotis . . . . . » 110.
L. spinifera . . . . . » 111.
L. tenuirostris . . . . . » 113.
The family Xiphocephalidæ . . . . . » 114.
Xiphocephalus . . . . . » 116.
X. armatus . . . . . » 119.
X. Whitei . . . . . » 125.
X. Lilljeborgi . . . . . » 131.
X. brevicaudatus . . . . . » 133.
Alphabetical Index . . . . . » 135.
List of illustrations in the text . . . . . » 138.
Plates.

THE OXYCEPHALIDS.

The Oxycephalids are perhaps the most interesting of all the Amphipoda Hyperiidea on account of their strange external forms as well as the curious transformations which several of their internal and external organs are subjected to. However, it is not only because they present such remarkable features as these that I have been induced to take them up now. The many intricate questions connected with the synonymy of the genera and species have to-day acquired an immediate interest through the publication of two great works both of the highest importance for our knowledge of the Amphipods, »Die Platysceliden» by C. Claus in 1887, and »Report on the Amphipoda collected by H. M. S. Challenger during the years 1873—1876», by the Rev. Thomas R. R. Stebbing in 1888. As my own opinions with regard to the synonymy and relationship of many of the Oxycephalidean species, briefly stated in a preliminary paper »Systematical list of the Amphipoda Hyperiidea», differ on several points from those of the eminent carcinologists just mentioned, I have felt in duty bound to state more fully the reasons on which my systematical arrangement of this abnormal group of animals is founded. Besides, I wish to make use of this opportunity for communicating some new results arrived at by the examination of fresh material recently obtained.

As an introduction I am going to give some historical and morphological notes on the Hyperids in question.

I. HISTORICAL NOTES ON THE OXYCEPHALIDS.

The Oxycephalids seem to have been comparatively late attended to by the zoologists, the first who described such an animal was H. MILNE EDWARDS, **1**, the great reformer of the carcinological system, giving in **1830** the diagnosis of the genus Oxycephalus. He placed the new genus among the »Hypérines anormales», but said »Ces amphipodes s'éloignent de la plupart des Hypérines par la forme grêle et allongée, par leur tête aplatie et lanceolée, etc.» The species he named *Oxycephalus piscatoris*.

Two years later ANASTASIO COCCO, **2** and **2 a**, established the new genus *Orio*, which partly is synonymous with *Oxycephalus*, his species *Orio Ornithoramphus*, however, is very difficult to identify, owing to the incomplete diagnosis; a facsimile of his drawing is given by STEBBING l. c. p. 145; as far as I know it is the first drawing of an Oxycephalid, met with in the literature. NICOLO PRESTANDREA, **3**, described in **1833** a new species of the just mentioned genus, *Orio oxyahingus;* it is very unclear where this species might be placed, in the systematical arrangement below it is omitted as being deficiently described; STEBBING l. c. p. 152 assumes that Oxy*a*hingus must be a misprint for Oxy*r*hingus, and this probably a malformation for Oxyrhynchus. In **1836** F. E. GUÉRIN, **4**, instituted the

---

BIBLIOGRAPHY.

1. H. MILNE EDWARDS »Extrait de Recherches pour servir à l'Historie naturelle des Crustacés amphipodes». Annales des Sciences naturelles. Tome 20^{me}, p. 396. Paris, 1830.

2. ANASTASIO COCCO. »Su di alcuni nuovi crustacei de' mari di Messina Lettera del dott. A. C. al celebre dott. WILLIAM ELFORD LEACH, etc.» Effemeridi scientifiche e letterarie per la Sicilia. Tomo 2do, Palermo, 1832. **2 a** see p. 10.

3. NICOLO PRESTANDREA. »Su di alcuni nuovi crustacei dei mari di Messina.» Effemeridi scientifiche e letterarie per la Sicilia. Tomo 6to, Palermo, 1833.

4. F. E. GUÉRIN. »Description de quelques genres nouveaux de Crustacés appartenant à la famille des Hypérines.» Magasin de Zoologie; 6^{me} Année. 1836. Classe VII, p. 10, pl. 18, fig. 2. Paris, 1836.

new species *Oxycephalus oceanicus*, which he himself later, 8, declared to be synonymous with the typical species of H. Milne Edwards. In 1839, 6, he gave a new drawing of it.

In 1838 H. Milne Edwards, 5, quoted the two species *Oxycephalus »piscatorius»* and *O. oceanicus;* and in 1840, 7, he gave a drawing and a fuller description of the type species, changing the name into Oxycephalus piscator; at the same time he gave a diagnosis of a new species. *O. armatus*, which is the first representative for the genus *Rhabdosoma* or Xiphocephalus

In the same year, or in 1841, Eydoux and Souleyet, 8, gave a long description of *Oxycephalus armatus*, H. Milne Edwards, accompanied by excellent drawings; it is, however, not the true *O. armatus*, but identical with *Rhabdosoma Whitei*, established in 1862 by Spence Bate, as will be proved below under this species. After the description of the animal they say l. c. p. 271 that F. E. Guérin, who had aided them with the examination, regarded the species generically distinct from *Oxycephalus*, and established the genus *Xyphocephalus* for its reception. Thus *Xyphocephalus* or Xiphocephalus is the eldest name for the genus and must be accepted instead of the later names.

In 1848 Arthur Adams and Adam White, 9, instituted the genus *Rhabdosoma* for the same *Oxycephalus armatus*, not knowing the just mentioned work; they gave a short generic diagnosis and said that *Rhabdosoma armatum* »forms a singularly interesting link between the Amphipoda and the Læmodipoda, uniting, as it were, the two». They gave also a tolerably

---

5. J. B. P. A. de Lamarck. Historie naturelle des Animaux sans vertèbres. 2me édition par G. P. Deshayes et H. Milne Edwards. Tome 5me, p. 308. Paris, 1838.
6. F. E. Guérin. »Typhis». Dictionnaire pittoresque d'Historie naturelle et des phénomènes de la nature. Sous la direction de F. E. Guérin. Tome 9me, p. 498, pl. 708, fig. 4 and 4 a. Paris, 1839.
7. H. Milne Edwards. Historie naturelle des Crustacés. Tome 3me, p. 99—102, pl. 30, fig. 10—12. Paris, 1840.
8. Eydoux et Souleyet (and F. E. Guérin). Voyage autour du monde éxécuté pendant les années 1836 et 1837 sur la corvette la Bonite. Zoologie. Tome 1er, p. 267—271, pl. 4 fig. 13—32. Paris, (1841?).
9. Arthur Adams and Adam White. »Crustacea». The Zoology of the voyage af H. M. S. Samarang, under the command of Captain Sir Edward Belcher, p. 63, pl. 13, fig. 7. London, 1848.

good drawing, which clearly shows that the specimen described by these naturalists is identical with the type species of H. MILNE EDWARDS.

In 1849 HERCULE NICOLET, **10**, mentioned *Oxycephalus oceanicus* from the seas of Chile, and H. LUCAS, **11**, the genus Oxycephalus among the »Hypérines anormales».

In 1850 GUISEPPE NATALE, **12**, promoted the specific name *Ornithoramphus*, given by COCCO, see above p. 2, to a generic name, and called the species *O. Coccoi.* He described this species at length but without good characteristics; if it is identical with COCCO's species or not, is very difficult to settle. STEBBING l. c. p. 241 suggests, that it possibly may have some relation to *Oxycephalus typhoides*, CLAUS; according to my opinion it is rather near to Oxycephalus latirostris, CLAUS, howbeit, the genus is most likely a synonym for Oxycephalus, H. MILNE EDWARDS. NATALE was doubtful if *Ornithoramphus* might be rather an Isopod, allied to *Sphæromidæ*, than an Amphipod. In the same year the same author, **13**, published in an other paper one more new generic name, *Erpetoramphus*, also probably synonymous with Oxycephalus. Owing to the vague description it is impossible to identify the species which he named *E. Costæ.*

In 1851 H. LUCAS, **14**, mentioned and figured *Oxycephalus oceanicus*, GUÉRIN, not adding any new characteristics.

In the same year Fr. GUGL. HOPE, **15**, issued a catalogue of the crustaceans of the Mediterranean, he enumerates without any charcteristics, under Amphipoda, the following, above mentioned Oxycephalids viz; *Orio oxyrhynchus*, PRESTANDREA, *O. ornithoramphus*, COCCO, *Ornithoramphus Coccoi*, NATALE, and *Erpetoramphus Costæ*, NATALE.

---

10. HERCULE NICOLET. Historia fisica y politica de Chile . . . por CLAUDIO GAY. Zoologia. Tomo 3ro, p. 249. Paris, 1849.

11. H. LUCAS. »Hypérines». Dictionnaire universel d'Historie naturelle . . . . dirigé par CHARLES D'ORBIGNY. Tome 6me p. 782. Paris, 1849.

12. GUISEPPE NATALE. Descrizione zoologica d'una nuova specie di plojaria e di alcuni crostacei del porto di Messina, etc. p. Messina, 1850.

13. » Su pochi Crostacei del porto di Messina. Lettera del Dottor G. de N. . . al Sg. ACHILLE COSTA, con una tavola in rame. Napoli, 1850 (teste STEBBING, l. c. p. 1621—1624).

14. H. LUCAS. Historie naturelle des Crustacés, des Arachnides et des Myriapodes, p. 240, pl. 18, fig. 9. Paris, 1851.

15. Fr. GUGL. HOPE. Catalogo dei Crostacei Italiani e di molti altri del Mediterraneo, p. 21 and 22. Napoli, 1851.

J. D. Dana, **16—17**, in **1852** placed the Oxycephalids as a subfamily *Oxycephalinæ* in the family *Typhidæ*.

In **1858** C. Spence Bate, **18**, described the new genus *Macrocephalus*, with *M. longirostris*, *n. sp.*, later, **20**, he himself dropped both names, finding them synonymous with *Rhabdosoma*, Adams and White, and *Rh. armatum*, H. Milne Edwards; here below it is quoted as synonym for Xiphocephalus armatus, H. Milne Edwards.

In **1861** the same author, **19**, gave some interesting notes on the young of some Hyperids allied to *Oxycephalus;* the following year he, **20**, established, in his catalogue of the Amphipoda in the British Museum, the family Oxycephalidæ, with two subfamilies, *Synopinæ* and *Oxycephalinæ*; he described there Oxycephalus piscator, H. Milne Edwards, *O. oceanicus*, F. E. Guérin, and O. tuberculatus, n. sp. this latter was described from a mutilated specimen but with characteristics sufficient to show that it is a species of its own, not synonymous with any one of the previously known species; further *Rhabdosoma armatum*, H. Milne Edwards, and *Rh. Whitei*, n. sp. of the former species he gave a new, enlarged description, adding some good characteristics to those mentioned by H. Milne Edwards; of the latter species he gave a detailed description showing beyond doubt that it was a separate species. Unfortunately he did not know both sexes of the two species, but only the female of the former and the male of the latter. C. Claus was probably misled by this fact to interprete *Rh. Whitei*, Spence Bate, as the male form of *Rh. armatum*, H. Milne Edwards. Spence Bate gave also drawings of all these species.

---

16. J. D. Dana. »On the Classification of the Crustacea Choristopoda or Tetradecapoda». The American Journal of Science and Arts. 2d Series. Vol. 14, p. 316. New Haven, 1852.

17. » United States Exploring Expedition during the years 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, under the command of Charles Wilkes. U. S. N.; Crustacea. Vol. 2, p. 1009 and 1443. Philadelphia, 1852.

18. C. Spence Bate. »On some new Genera and Species of Crustacea amphipoda». Ann. and Mag. of Nat. Hist. 3d Ser. Vol. 1, p. 361. London, 1858.

19. » »On the Morphology of some Amphipoda of the Division Hyperina». Ann. and Mag. of Nat. Hist. 3d Ser. Vol. 8, p. 1—15. London, 1861.

20. » Catalogue of the specimens of Amphipodous Crustacea in the collection of the British Museum, p. 341 — 346. London, 1862.

In 1864 ACHILLE COSTA, 21, without referring to the genus Oxycephalus or to the family Oxycephalidæ, instituted a kind of subfamily, *Ornithoramphini*, for the reception of the genus *Ornithoramphus*, NATALE, and the two new genera *Natalius* and *Carcinornis*. On the synonymy of the first genus see above p. 3, the genus *Natalius* is probably synonymous with Oxycephalus, and the new species *N. candidissimus*, possibly is O. piscator, H. MILNE EDWARDS; the genus *Carcinornis* is difficult to identify, it comes perhaps near to Streetsia, STEBBING, or Leptocotis, STREETS, because the form of the first two pairs of peræopoda alluded to in the diagnosis is most similar to the form of those pairs in the two mentioned genera; of this latter genus *Carcinornis* he established two new species *C. acutirostris*, and *C. inflaticeps;* the suggestion of STEBBING l. c. p. 347 that the latter may prove to be synonymous to *Oxycephalus typhoides*, CLAUS, is, according to my opinion, not supported by the few characteristics given by COSTA; see below under »Streetsia».

In 1867 COSTA, 22, mentioned *Ornithoramphus Coccoi*, NATALE, among a collection of Mediterranean crustaceans sent to the exhibition in Paris that year.

In 1871 C. CLAUS, 23, gave some short notices on the anatomy of the Oxycephalids, mentioning a vesicular organ in the hind part of the head; this vesicle he regarded as an auditory organ; he described further the structure of the eyes, the nervous system, and the organs of circulation. At the same time he gave a new diagnosis of the genus *Oxycephalus*, and described as *O. piscator*, H. MILNE EDWARDS, the animal which here below is named O. Clausi, he argued further that *O. oceanicus*, GUÉRIN, is synonymous with O. piscator, H. MILNE EDWARDS, a fact which GUÉRIN-MÉNEVILLE already in 1841, himself had proved, 8, and that

---

21. ACHILLE COSTA. »Di alcuni crostacei degli acalefi, e di un distomideo parasitto». Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche. Anno 3ro. Fas° 4to, p. 86—89. Napoli, 1864.

22. ACHILLE COSTA. »Saggio della collezione de' Crostacei del Mediterraneo Del Museo Zoologico della Università di Napoli spedito alla Esposizione di Parigi del 1867». Annuario del Museo Zoologico della R. Università di Napoli. Anno 4to, p. 44. Napoli, 1867.

23. C. CLAUS. »Untersuchungen über den Bau und die Verwandschaft der Hyperiden». Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahre 1871, p. 149—157. Göttingen, 1871.

Rhabsosoma Whitei, Spence, Bate, is not a species by itself but only the male form of *Rh. armatum*, H. Milne Edwards, a mistake, which will be duly cleared up under »Xiphocephalus» below. He established also the new genus *Simorhynchus*, with the new species *S. antennarius*, and a new species of *Oxycephalus*, *O. tenuirostris*, mentioned below as Leptocotis tenuirostris. In the same paper he said, »Die Gattung *Synopia*, Dana, die Dana and Spence Bate irrthümlich mit den Oxycephaliden vereinigt haben, gehört zu den Gammariden». Among the Oxycephalidæ he mentioned then *Snehagenia*, n. g. later transferred to the Lycæids.

In 1877 Thomas H. Streets, **24**, described under the name Oxycephalus tuberculatus, Spence Bate an animal which I really think may prove to be identical with Spence Bate's species; he further instituted the new genus Leptocotis with the new species L. spinifera.

In 1878 Claus, **25**, gave some interesting notices about the heart and vessels of Oxycephalidæ and other Hyperids.

In the same year Thomas H. Streets, **26**, described from the Pacific the following Oxycephalids viz; *Oxycephalus tuberculatus*, Spence Bate, which, however, is not identical with Spence Bate's species but with O. Clausi, C. Bovallius; *O. bulbosus*, n. sp., *O. scleroticus*, n. sp. Leptocotis spinifera, Streets, Calamorhynchus, n. g. with C. pellucidus, n. sp., *Rhabdosoma Whitei*, Spence Bate, *Rh. armatum*, H. Milne Edwards, and *Rh. longirostris*, Spence Bate, the latter synonymous with Xiphocephalus armatus, H. Milne Edwards. It is noticeable that he did not himself find the specific difference between the Oxycephalus tuberculatus, described by him in 1877 and the *O. tuberculatus*, mentioned in this his latter paper. The descriptions are accompanied with drawings which are not very good, being executed in a small scale.

---

24. Thomas H. Streets. »Contributions to the Natural History of the Hawaiian and Fanning Islands and Lower California». Bulletin of the United States National Museum, 1877. N° 7, p. 136—138. Washington, 1877.

25. C. Claus. »Über Herz und Gefäss-system der Hyperiden». Zoologischer Anzeiger, herausgegeben von J. V. Carus. 1ster Jahrgang, 1878, p. 269—271. Leipzig, 1878.

26. Thomas H. Streets. »Pelagic Amphipoda». Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia. 1878, p. 276—290, pl. 2. Philadelphia, 1878.

In 1879 CLAUS, 27, made a revision of the known Platyscelids, and quoted among them the following genera and species as belonging to the family Oxycephalidæ. *Oxycephalus piscator*, H. MILNE EDWARDS, as observed above, p. 6, identical with O. Clausi, C. BOVALLIUS, *O. similis*, in my opinion probably a synonym for O. piscator, H. MILNE EDWARDS, O. latirostris, n. sp., *O. tenuirostris*, CLAUS, quoted as Leptocotis tenuirostris below, *O. porcellus*, n. sp., = Streetsia porcellus, *O. longiceps* n. sp. = Streetsia longiceps, *O. typhoides* n. sp. = Stebbingella typhoides. He adhered to his former statement that *Rhabdosoma Whitei*, SPENCE BATE, was synonymous with *Rh. armatum*, H. MILNE EDWARDS. He transferred the genus *Simorhynchus* to the family »*Lycœidæ*».

In 1880 CLAUS, 28, placed *Oxycephalinæ* as the fifth subfamily of the fourth Hyperiidean family *Platyscelidæ*, quoting the same genera as in the just cited work.

In the same year OTMAR NEBESKI, 29, added important facts to our knowledge of the anatomy of the Amphipods; he did not investigate any one of the Oxycephalids but many of his statements throw light upon analogue peculiarities in this family. Just the same ought to be said about YVES DELAGE, 30, and his admirable treatise on the organs of circulation of the marine Edriophthalmata.

In 1884 GEO. M. THOMSON, 31, described a new species of Oxycephalus, *O. Edwardsii*, which, however, probably is synonymous with O. piscator, H. MILNE EDWARDS, see below under this species.

---

27. C. CLAUS. Die Gattungen und Arten der Platysceliden in systematischer Übersicht». Arbeiten aus dem Zoologischen Institute der Universität Wien und der Zoologischen Station in Triest. Herausgegeben von Dr C. CLAUS. Tom. 2, p. 188—198. Wien, 1879.

28. » Grundzüge der Zoologie. 4te Auflage. Vol. 1, p. 588. Marburg, 1880.

29. OTMAR NEBSEKI. »Beiträge zur Kentniss der Amphipoden von Adria.» Arb. Zool. Inst. der Universität Wien etc. Tom. 3, p. 111—162. With 4 plates. Wien, 1880.

30. YVES DELAGE. »Contribution à l'étude de l'appareil circulatoire des crustacés édriophthalmes marins». Archives de la Zoologie Experimentale et Générale. Vol. 9, p. 1—172, pl. 1—2. Paris, 1881.

31. GEO. M. THOMSON. »Descriptions of new Crustaceans». Transactions and Proceedings of the New Zealand Institute, 1883. Vol. 16, p. 237—240, pl. 12, fig. 14—21, pl. 13, fig. 1. Wellington, 1884.

In the same year J. S. Kingley, **32**, gave a drawing of *Rhabdosoma Batei*, n. sp., which name however is only a synonym for Xiphocephalus armatus, H. Milne Edwards.

In **1885** J. V. Carus, **33**, recorded the Oxycephalids hitherto mentioned from the Mediterranean viz; *Oxycephalus similis*, Claus, doubtfully referring to *Natalius candidissimus*, Costa, as synonymous with it; he further mentioned *O. typhoides*, Claus; and enumerated also among the Oxycephalidæ, but with a sign of interrogation, *Carcinornis acutirostris*, Costa, *C. inflaticeps*, Costa, *Orio Zancleus*, Cocco, *Chiropristis messanensis*, Cocco, and *Ornithoramphus Coccoi*, Natale. Of these animals *Orio Zancleus* is an *Eupronoë*, Claus, and *Chiropristis* an *Anchylomera*, H. Milne Edwards; for the probable synonymy of the remaining ones see, above p. 4 and 6.

In **1886** A. Gerstaecker, **34**, gave Oxycephalidæ as the fifth family of the *Hyperina anormalia*, including the two genera Oxycephalus and *Rhabdosoma* and supported the view of Claus, that *Rh. armatum* and *Rh. Whitei* were the same species. He gave also a copy of Guérin's drawing of *Oxycephalus oceanicus*.

In **1887** the author of this treatise, **35**, published a preliminary paper on the systematical arrangement of the Amphipoda Hyperiidea, enumerating and describing briefly the following Oxycephalids, Glossocephalus, n. g. with the species G. Milne Edwardsi, n. sp., and G. spiniger, n. sp.; Oxycephalus piscator, H. Milne Edwards, O. Clausi, n. sp. O. tuberculatus, Spence Bate, O. pectinatus, n. sp., O. latirostris, Claus, *O. porcellus*, Claus, *O. pronoides*, n. sp., *O. Steenstrupi*, n. sp., and *O. longiceps*, Claus, the last four species being recorded in the

---

32. John Sterling Kingsley. The Standard Natural History. Vol. 2; Crustacea and Insects. Boston, 1884.

33. Julius Victor Carus. Prodromus Faunæ Mediterraneæ sive Descriptio Animalium Mediterranei incolarum, quam comparata silva rerum quatenus innotuit, adiectis locis et nominibus vulgaribus eorumque auctoribus in commodum Zoologorum congessit J. V. C. Vol. 1, p. 427—428. Stuttgart, 1885.

34. A. Gerstaecker. Dr H. G. Bronn's Klassen und Ordnungen des Thier-Reichs, wissenschaftlich dargestellt in Wort und Bild. 5ter Band. 2te Abtheilung. Gliederfüssler, Arthropoda, p. 486—487, pl. 25, fig. 6 and 6 a. Heidelberg, 1884—1886.

35. C. Bovallius. »Systematical list of the Amphipoda Hyperiidea». Bihang till Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 11. N° 16, p. 34—40. Stockholm, 1887.

present treatise as belonging to the genus Streetsia, STEBBING; *Oxycephalus typhoides*, CLAUS, and *O. scleroticus*, STREETS, both here transferred to the genus Stebbingella, n. g.; *Leptocotis Lindströmi*, n. sp., here named Dorycephalus Lindströmi; Leptocotis tenuirostris, CLAUS; Tullbergella, n. g., with the new species T. cuspidata; Calamorhynchus pellucidus, STREETS; *Rhabdonectes*, n. n. instead of *Rhabdosoma*, which name the writer supposed to be preoccupied, but wrongly, as STEBBING (l. c. p. 1606) has clearly proved. Diagnoses were also given of *Rh. armatus*, H. MILNE EDWARDS, and *Rh. Whitei*, SPENCE BATE.

In **1887** the important work of CLAUS, **36**, »Die Platysceliden» was issued. He gave there good drawings of all the species described in his previous paper of 1879 (see p. 8). He maintained his opinions about *Oxycephalus piscator*, H. MILNE EDWARDS, and *Rhabdosoma armatum*, H. MILNE EDWARDS, spoken of above (p. 7 and 8). The descriptive part is a reprint of his paper of 1879, with some few additions.

In the same year G. M. GILES, **37**, described a new species of *Rhabdosoma*, *Rh. investigatoris*, which is however undoubtedly synonymous with Xiphocephalus Whitei, SPENCE BATE; GILES expressed the opinion that CLAUS was quite right in considering *Rhabdosoma Whitei*, SPENCE BATE, as the male of *Rh. armatum*, H. MILNE EDWARDS.

In December **1887** I gave, **38**, a diagram of the systematical relations of the Hyperiidean families, in which the Oxycephalidæ are recorded as the thirteenth family and placed between the *Tryphœnidæ* and the *Pronoidæ*.

---

36. C. CLAUS. Die Platysceliden, p. 67—75, pl. 22—26. Wien, 1887. Fol.

37. G. M. GILES. »On six new Amphipods from the Bay of Bengal». Journal of the Asiatic Society of Bengal. Vol. 56, p. 219. Calcutta, 1887.

38. C. BOVALLIUS. »Contributions to a Monograph of the Amphipoda Hyperiidea». Part I. 1. Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Band 21. N° 5, p. 3. Stockholm, 1887.

39. Th. R. R. STEBBING. »On the Amphipoda collected by H. M. S. Challenger during the Years 1873—1876» Report on the scientific results of the Voyage of H. M. S. Challenger during the years 1873—1876 . . . . Zoology. Vol. 29.

---

2 a. ANASTASIO COCCO. »Descrizione di alcuni Crustacei di Messina». Giornale di Scienze, Lettere e Arte per la Sicilia. Tomo 44^to^. Anno XI. Palermo 1833.

Lastly I have to mention the splendid work of the Rev. Thomas R. R. Stebbing, **39**, on the »Challenger» Amphipoda, published at the end of last year, in the bibliographical part of which the accomplished author gives us many valuable hints concerning the synonymy of the Oxycephalidean genera and species, and in the second half of the descriptive part of wich he most accurately sets forth the characteristics of the species obtained during the celebrated »Challenger» Expedition. The descriptions are accompanied by magnificent plates. He describes the following genera and species, Oxycephalus Clausi, C. Bovallius, *Oxycephalus porcellus*, Claus, *O. longiceps*, Claus, the last two below being named Streetsia porcellus, Claus, and S. longiceps, Claus; *Leptocotis ambobus*, n. sp., synonymous with Dorycephalus Lindströmi, C. Bovallius, as will be proved below; Leptocotis mindanaonis, n. sp.; Calamorhynchus rigidus, n. sp.; Streetsia n. g., with the new species S. challengeri; *Rhabdosoma armatum*, H. Milne Edwards, of which he with some doubt quotes *Rh. Whitei* as a synonym, and lastly the new species *Rh. brevicaudatum*. The name *Simorhynchus*, Claus, is changed into Simorhynchotus, n. n., and he places this genus in the family *Lycœidæ*.

In this treatise I propose to distinguish the Oxycephalidæ, Spence Bate and the Xiphocephalidæ as two separate families, and my reasons for doing so will be given below; I further think it necessary to transfer the genus Simorhynchotus, Stebbing, from the *Tryphœnidæ* to the Oxycephalidæ, in order to get uniformity in the generic characters; in this latter family I remove *Oxycephalus porcellus*, Claus, *O. pronoides*, C. Bovallius, *O. longiceps*, Claus, and *O. Steentrupi*, C. Bovallius, from the genus Oxycephalus, sensu stricto, to Stebbing's new genus Streetsia; for the reception of *O. typhoides*, Claus, *O. sclero-ticus*, Streets, and a new species with the specific name Théeli, I propose the new genus Stebbingella. For *Leptocotis Lindströmi* the new genus Dorycephalus is instituted. A hitherto undescribed Oxycephalid is the type for the new genus Cranocephalus, with the specific name C. Goësi. The names *Rhabdosoma*, Adams and White, and *Rhabdonectes*, C. Bovallius, are dropped in favour of the generic name Xiphocephalus, proposed by Guérin as early as in 1841 to this genus a new species X. Lilljeborgi is added.

II. THE SYSTEMATICAL POSITION OF THE OXYCEPHALIDS.

H. MILNE EDWARDS was the first who arranged the Hyperiidean genera, into subdivisions, establishing in 1840 the following three »tribus».

1. »*Hypérines gammaroïdes*», 2. »*Hypérines ordinaires*» and 3. »*Hypérines anormales*». The characteristics used by him for distinguishing these subdivisions were: —

1. The size of the head, »Tête petite» and »Tête très grosse».
2. The width of the body, »Corps comprimé» and »Corps renflé».
3. Maxillipeds with palps, — or wanting a palp.
4. The second pair of antennæ straight, or zigzag-folded, — »Antennes de la seconde paire styliformes», and »Antennes de la seconde pair se reployant sur elles mêmes, etc.»

Of these characteristics the *third* one, depending on a wrong observation, may be dropped without further discussion; the *second* characteristic varies, according to our present knowledge of the Hyperiidean species, so very much, not only among closely allied genera and species, but also in the case of the sexes of the same species, that it has no value whatever. The *first* characteristic varies in the case of two so nearly related families as *Vibilidæ* and *Cyllopodidæ* and may thus be assigned the value of a family-characteristic, but not that of a subtribal one. The *fourth* may be considered as a good characteristic; with regard to the first subtribe, it may be observed however that the form of the second pair of antennæ of the first five families in the following synoptical diagram show some tendency to the »folding type», so strongly developed in the *Oxycephalidæ* and their allies.

J. D. DANA, the next systematizer of the group, placed the Hyperids in three families, 1. *Hyperidæ*, 2. *Phronimidæ*, and 3. *Typhidæ*. The principal characteristics were: —

1. The second pair of antennæ extant, — or able to be hidden under the head or the body.

2. The hind part of the body able to be inflected or doubled up under the body, — or not possessing this faculty.

3. The fifth and sixth pairs of legs mediocre, simple, — or thick, elongated, often prehensile.

The *first* is essentially the same as Milne Edwards' fourth characteristic but is more vaguely expressed. The *second* has, in my opinion, no value, because almost all the Hyperids I have studied have the power of doubling up the urus under the body, though this power is not equally developed in the different genera. The *third* characteristic is utterly artificial, and the use of it would lead to the separation of closely related genera, and would place them in different families as for instance *Euthemisto* among the *Phronimidæ* instead of close to *Hyperia.*

Spence Bate in 1862 followed Dana as to the distinction of *Hyperidæ* and *Phronimidæ* from the other Hyperids, but for the division of these latter into three families *Platyscelidæ*, *Phorcidæ* and *Oxycephalidæ*, he used the following characteristics.

1. The head rounded, — or long, anteriorly produced.
2. The eyes occupying the whole head — or only a part of it.
3. The fifth pair of peræopoda with the femur largely developed, — or imperfectly developed.

The *first* and *second* characteristics are not valuable for distinguishing subtribes and scarcely constant as family-characteristics, while the *third* is a purely generic characteristic.

C. Claus in 1879 included under the name »*Platysceliden*» the following five families 1. *Typhidæ*, 2. *Scelidæ*, 3. *Pronoidæ*, 4. *Lycœidæ*, and 5. *Oxcyephalidæ*, and used the following *family*-characteristics.

1. The body broad and short, — or more or less compressed, elongated.
2. The urus able to be doubled up, — or without this power.
3. The femora of the fifth and sixth pairs of peræopoda largely developed, forming covers for the underside of body, — or the femora elongated and narrowed.
4. The urus very short, — or elongated.
5. The mouth-organs broad and short, — or elongated and narrow.

The *first* characteristic I have already said is too vague and, in my opinion, only of a specific value, for if you compare for instance the female of *Hyperia Latreillei* with the female of *Eutyphis ovoides*, we find the breadth of the body to be almost the same, and the body often not more depressed in *Eutyphis* than in *Hyperia.* Also among the *Lycœidæ* there are species almost fully as broad as a *Dithyrus* or an *Amphithyrus.* The *second* is, as I have already observed when discussing the family-

characteristics used by DANA, only a relative quantity though it is true that it is carried to the extreme point in the *Eutyphidæ*. The *third* is a good characteristic for distinguishing the *Eutyphidæ* and the *Scelidæ* from the *Oxycephalidæ* and the *Phorcidæ*, but unhappily the *Pronoidæ*, and some forms of the *Lycæidæ* are intermediate. The *fourth* is, in my opinion, very uncertain and liable to sexual variation. The *fifth* is a valuable characteristic for distinguishing the family *Eutyphidæ* from the family *Scelidæ*, but it is difficult to use it in external examination.

After a long study of the different forms of the Amphipoda Hyperiidea I have arrived at the conviction that there are a number of characteristics, little or not at all appreciated by previous authors, but useful for the distinction of subtribes, families and genera within the tribe Amphipoda Hyperiidea, of them I quote the most important here.

A. Characteristics for the distinction of the ***Subtribes*** of the AMPHIPODA HYPERIIDEA.

1. *The point of fixation of the first pair of antennæ.*
2. *The shape of the same pair of antennæ.*
3. *The number of joints of the flagellum of the same pair of antennæ in the male.*

According to these characteristics I propose to divide the Hyperids into three subtribes: —

I. **Hyperiidea recticornia.**
Diagn. The first pair of antennæ are fixed at the anterior part of the head, they are straight, the first joint of the flagellum is large, the following few in number and terminal.

II. **Hyperiidea filicornia.**
Diagn. The first pair of antennæ are fixed at the anterior part of the head, they are straight, the first joint of the flagellum is large, the following many in number (♂), filiform and terminal.

III. **Hyperiidea curvicornia.**
Diagn. The first pair of antennæ are fixed at the inferior part of the head, they are curved (♂), the first joint of the flagellum is very large, the following few in number and subterminal (♂).

These three subtribes correspond exactly with the three subdivisions **A**, **B**, and **C** in the synoptical diagram given in my »Contributions to a Monograph of the Amphipoda Hyperiidea», (p. 3) issued in 1887. The first two subtribes have not the same limits as the first two subdivisions proposed by Milne Edwards and Dana, but the third has almost the same limitation as the »Hypérines anormales» of Milne Edwards, the family *Typhidæ* of Dana, or the families *Platyscelidæ*, *Phorcidæ* and *Oxycephalidæ* together, of Spence Bate, and lastly the same limitation as the »*Platysceliden*» of Claus.

B. Characteristics for the distinction of the ***Families*** in the subtribe HYPERIIDEA CURVICORNIA.

1. *The form of the femur of the sixth pair of peræopoda.*
2. *The form of the seventh pair of peræopoda.*
3. *The telson coalesced with the last ural segment, — or free.*
4. *The development of the mouth-organs.*
5. *The second pair of peræopoda transformed, — or not transformed.*

The *first* characteristic distinguishes the *Parascelidæ* and *Euhyphidæ* from the remaining families. The *second* distinguishes the *Phorcoraphidæ*, the *Lycæidæ*, and the *Oxycephalidæ* from the *Pronoidæ*, *Eutyphidæ*, and *Xiphocephalidæ*, this last family being instituted here by me for the reception of the genus Xiphocephalus. The *third* characteristic separates the families *Phorcoraphidæ*, *Pronoidæ*, *Euthamneidæ*, and *Xiphocephalidæ* from the families *Lycæidæ*, *Oxycephalidæ*, *Parascelidæ*, and *Eutyphidæ*. The *fourth* characteristic distinguishes the *Lycæidæ*[1]) from the *Oxycephalidæ* and the *Xiphocephalidæ*, and the *Parascelidæ* from the *Eutyphidæ*. The *fifth* distinguishes the *Phorcoraphidæ* from all the other families.

Within the subtribe I place the family *Phorcorhaphidæ* first because it comes nearest to the Hyperiidea filicornia owing to the situation of the first pair of antennæ; last in the whole tribe I place the family *Eutyphidæ*, because it seems to show the most affinity of any of the Hyperiidean families with the Isopods, especially with the Sphæromids, owing to the form of the body and the very intimate coalition between

1) As this characteristic is of no use in an external examination another but less good characteristic is used in the synoptical table p. 18.

the telson and the last ural segment. The likeness between the *Xiphocephalidæ* and the *Caprellids*, suggested by previous authors, is very superficial and is no reasn for placing the *Xiphocephalidæ* last in the tribe[1]).

C. Characteristics for the distinction of the *Genera* among the OXYCEPHALIDS.

1. *The general form of the head and the rostrum.*
2. *The first pair of peræopoda being simple, — subcheliform, — or cheliform.*
3. *The second pair of peræopoda being subcheliform, — or cheliform.*
4. *The inner rami of the second and third pairs of uropoda coalesced with the corresponding peduncles, — or free.*
5. *The relation between the length of the ural segments.*

These five characteristics are sufficient for the distinction of the genera given here below as constituting the family *Oxycephalidæ*.

D. Characteristics for the distinction of the *Species* of the OXYCEPHALIDEAN GENERA.

These characteristics vary of course much in the different genera, but a few which are very useful and of common occurence may be pointed out here.

1. *The armature of the first two pairs of peræopoda.*
2. *The seventh pair of peræopoda.*
3. *The relation between the outer and inner rami of the uropoda.*
4. *The relation between the telson and the last ural segment.*

Within the genus Xiphocephalus particularly the following good specific characteristics may be indicated:

1. *The form of the epimeral of the first pair of peræopoda.*
2. *The form of the lateral parts of the seventh peræonal segment.*
3. *The relation between the length of the first two pairs of uropoda.*
4. *The relation between the last pair of uropoda and the telson.*

1) For further information on these points see my forthcoming paper »Remarks on the system and synonymy of the Amphipoda Hyperiidea».

To illustrate the systematical position of the Oxycephalids the following schematic table is given:

A. HYPERIIDEA RECTICORNIA.

The first pair of antennæ are fixed to the anterior part of the head, they are straight, the first joint of the flagellum is large, the following few in number and terminal. The second pair are not similar to the first, slender, often angulate.

a 1. The head is small, not tumid.	
aa 1. The first joint of the flagellum of the first pair of antennæ is styliform, not tumid.	1. Scinidæ.
aa 2. The first joint of the flagellum of the first pair of antennæ is lanceolate, tumid.	
aaa 1. The seventh pair of peræopoda are not transformed.	2. Lanceolidæ.
aaa 2. The seventh pair of peræopoda are transformed.	3. Vibilidæ.
a 2. The head is large, tumid.	
aa 3. The first joint of the flagellum of the first pair of antennæ is tumid.	
aaa 3. The seventh pair of peræopoda are transformed.	4. Cyllopodidæ.
aaa 4. The seventh pair of peræopoda are not transformed.	5. Paraphronimidæ.
aa 4. The first joint of the flagellum of the first pair of antennæ is styliform, not tumid,	6. Thaumatopsidæ.
a 3. The head with the peræon is transformed into a balloon-like bladder.	7. Mimonectidæ.

B. HYPERIIDEA FILICORNIA.

The first pair of antennæ are fixed to the anterior part of the head, they are straight, the first joint of the flagellum is large, the following many in number filiform (♂), terminal. The second pair are subsimilar to the first, not angulate.

b 1. The uropoda with distinct rami.	
bb 1. The mandibles with palp.	8. Hyperiidæ.
bb 2. The mandibles without palp.	9. Phronimidæ.
b 2. The uropoda transformed, without rami.	10. Anchylomeridæ.

C. HYPERIIDEA CURVICORNIA.

The first pair of antennæ are fixed to the inferior side of the head, they are curved (♂), the first joint of the flagellum is very large, the following few in number and subterminal (♂). The second pair are folded (♂), or wanting (♀).

c 1. The femur of the sixth pair of peræopoda is not operculiform.

cc 1. The second pair of peræopoda are transformed. The seventh pair of peræopoda are not transformed; the telson is free. 11. PHORCORAPHIDÆ.

cc 2. The second pair of peræopoda are not transformed.

ccc 1. The head is scarcely produced, not forming a rostrum. The maxillæ consist of two laminæ.

cccc 1. The seventh pair of peræopoda are reduced to two or three joints. 12. PRONOIDÆ.

cccc 2. The seventh pair of peræopoda are complete, not transformed.

ccccc 1. The telson is free, not coalesced with the last ural segment. 13. EUTHAMNEIDÆ.

ccccc 2. The telson is coalesced with the last ural segment. 14. LYCÆIDÆ[1]).

1) In my preliminary paper »Systematical list of the Amphipoda Hyperiidea,» I thought it convenient to place the genus *Tryphæna*, A. BOECK, in the same family as *Lycæa*, DANA, and to apply to the family, containing these two genera and the allies of *Lycæa*, the name *Tryphænidæ*, which preceded by nine years the family-name *Lycæidæ*, proposed by CLAUS in 1879 in his systematical arrangement of the Platyscelids. Further study of these interesting Hyperids has however convinced me that *Tryphæna* is more closely allied to the genera *Phorcoraphis*, STEBBING, and *Lycæopsis*, CLAUS, than to *Lycæa* and the other genera placed there by CLAUS. It is principally the peculiar transformation of the second pair of peræopoda that makes it desirable to place *Tryphæna* close to the other members of the old family *Phorcidæ*, beacuse it would be very strange to suppose such a homologous development of the same organ in genera not closely allied. To this characteristic come others which also, but not so thoroughly, point to a closer relation between the three genera, *Phorcoraphis*, *Lycæopsis*, and *Tryphæna*, as for instance the form of the sixth pair of peræopoda, the form of the urus and its appendages, and in some way the shape of the first pair of antennæ. From the point of view of priority the family-

ccc 2. The head is more or less produced forming a rostrum. The maxillæ are rudimentary.

cccc 3. The telson is coalesced with the last ural segment. The seventh pair of peræopoda are complete, not transformed. 15. OXYCEPHALIDÆ.

cccc 4. The telson is free[1]), not coalesced with the last ural segment. The seventh pair of peræopoda are transformed. 16. XIPHOCEPHALIDÆ.

c 2. The femur of the sixth pair of peræopoda is more or less operculiform.

cc 3. The seventh pair of peræopoda are complete, not transformed. The mouth-organs are narrow, protruding. 17. PARASCELIDÆ.

cc 4. The seventh pair of peræopoda are reduced. The mouth-organs are short and broad. 18. EUTYPHIDÆ.

name *Tryphænidæ* ought to be applied to the family thus composed, but as it has been used as a synonym for *Lycæidæ* by myself and by STEBBING it would make confusion in the synonymy. I therefore prefer to use a family-name derived from the new form given by STEBBING to the old generic name *Phorcus*, which was found to be preoccupied. To maintain, as does STEBBING, the family-name *Phorcidæ*, when the generic name *Phorcus* is rejected, is not convenient as the family-name must refer to a generic name in use within the family.

I have also divided the old family *Tryphænidæ* into two, *Euthamneidæ* — comprising the two genera *Thamyris*, SPENCE BATE, (or *Brachyscelus*, according to STEBBING) and *Euthamneus*, (the former name *Thamneus* being thus modified to avoid confusion) — and *Lycæidæ*, CLAUS, — restricting it to the two genera *Lycæa*, DANA, and *Pseudolycæa*, CLAUS. Of the old members of the family *Tryphænidæ*, as it was composed in my paper, which I have just referred to, I have thus placed *Tryphæna* in the family *Phorcoraphidæ; Paralycæa* in the *Pronoidæ*, (this transposition was really done in 1887 but owing to a typographical error it stands into »Systematical list» with its number from *Pronoidæ* among the *Tryphænidæ*); *Thamyris* and *Euthamneus* in the new family *Euthamneidæ*; *Lycæa* and *Pseudolycæa* in the *Lycæidæ*; and lastly *Simorhynchotus* in the *Oxycephalidæ*.

1) A very puzzling exception to this rule is *Rhabdosoma brevicaudatum*, described by STEBBING (l. c. p 1612, pl. 208). He says namely that the telson is *coalesced* with the last ural segment and much shorter than this segment, broadly rounded and pectinate at the apex, but all these statements are strikingly opposed to my experience which is founded upon the examination of many specimens of the two old species, Xiphocephalus armatus and X. Whitei. I for my part am much inclined to believe that the single specimen which was the type for the new species proposed by STEBBING, may have been abnormal, perhaps injured.

III. MORPHOLOGICAL NOTES ON THE OXYCEPHALIDS.

1. The shape of the body.

The genus Xiphocephalus is certainly the most extreme of all the Hyperiidean forms with regard to its development in length and narrowness, but this extravagant, rod-like form of body is however very naturally connected with the other Hyperids by intermediate links. Thus, if examining the genera of the Oxycephalids, we find first in the series the thick and stout Tullbergella, (fig. 1) in shape of peræon very similar to a true *Hyperia*, and then Oxycephalus, with the body somewhat more compressed, and next Stebbingella, both of them with the head and the hind part of the body tolerably elongated, from them is an easy transition to the slender Streetsia. This slender form of body is more pronounced in Leptocotis and Dorycephalus, which, on the other hand, are readily found to be connected with Xiphocephalus (fig. 2)

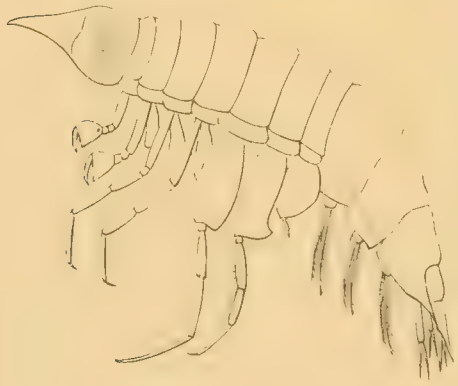


Fig. 1. Tullbergella cuspidata.

Fig. 2. Xiphocephalus armtaus. ♂.

by the rod-like form of body of Calamorhynchus. The body of the females is usually somewhat broader than that of the males, except in Xiphocephalus, where such a sexual difference is not present.

2. The integument.

In Tullbergella (fig. 27) and Stebbingella (fig. 3) the integument is very thick and hard, and calcareous; in the latter it shows many tubercles, fine notches, scrolls and grooves; in Oxycephalus (fig. 4) the integument is thinner, sometimes forming longer or shorter longitudinal and transversel keels or folds, but these keels are only angulated elevations of the integument, not formed by calcareous deposits as in the two above mentioned genera. In Cranocephalus, (fig. 5) Dorycephalus,

Fig. 3. Stebbingella Théeli. ♀.

Fig. 4. Oxycephalus Clausi. ♀.

Fig. 5. Cranocephalus Goësi. ♂.

Leptocotis and Xiphocephalus, the integument is still thinner and not at all calcareous, showing in some species small epidermal grooves which will be spoken of under the head »*glands*» below. The hypodermis seems to be either composed of hexagonal cells, or hexagonally reticulated but this reticulation is seldom to be seen distinctly; at the head, the epimerals, and parts of the ural appendages it is most distinct.

The colour is very variable, red, yellow, green, and white; many species are entirely hyaline. Only in Tullbergella cuspidata, and in Xiphocephalus Whitei, have I observed larger pigment-cells, or chromatophors of some kind, of more or less regular star-like form. There are also to be seen separate calcareous (?) concrements in the shape of small, irregularly ovate discs or buttons in the thin integument of some species of Oxycephalus; in the thick, calcareous integument of Tullbergella they are very numerous.

3. *The head.*

The shape of the head of the Oxycephalids shows forms gradually developing almost from the normal type in *Lycæidæ* to the strange-looking, extremely elongated form in Xiphocephalidæ. The genus Glossocephalus has a distinct, but thick and obtuse, tongue-shaped rostrum (fig. 6 and 6 a), Oxycephalus (fig. 7 and 8), Stebbingella (fig. 3), and Streetsia (fiig. 9) offer different steps of development of a more and more elongated and sharp rostrum, open at the under-side; in Dorycephalus and Leptocotis (fig. 10) it has reached the form of a needle, which form is so enormously developed in Xiphocephalus, that it may be properly called filiform (fig. 2).

An aberrant development of the rostral or anterior part of the head occurs in Calamorhynchus where the dilation of the basal portion of the rostrum, which is indicated already in Tullbergella (fig. 12), is exaggerated into the large wing-like projections shown in fig. 11.

Fig. 6.

Fig. 6 a. Glossocephalus Milne Edwardsi.

Fig 7. Oxycephalus Clausi. ♂.

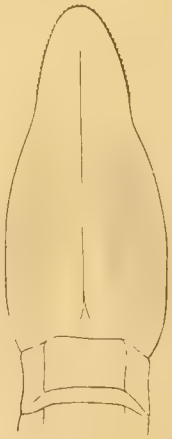


Fig. 8. Oxycephalus Clausi. ♀.

But also the hind part of the head shows a gradual development from being in Streetsia not constricted, in Oxycephalus, Cranocephalus, Tullbergella, and Stebbingella, feebly constricted and scarcely forming a distinct neck, to Dorycephalus, Leptocotis and Calamorhynchus, where the hind part of the head is strongly constricted, forming a distinct, but short neck, and lastly to Xiphocephalus, which has a long and narrow neck, longer than the central part of the head (fig. 2).

The highest part of the head, which may be situated close to the anterior margin of the first peræonal segment, as in Simorhynchotus

and Streetsia, or at a considerable distance therefrom as in Xiphocephalus, is occupied by the eyes. The under side of the head is excavated, forming a groove or channel from the base of the head to the anterior end of the eyes, where the channel is enlarged into a vaulted chamber, at the upper anterior wall of which the first pair of antennæ are fixed. In this channel the second pair of antennæ are received when folded, extending into the lower part of the chamber below the

Fig. 9. Streetsia pronoïdes. ♀.

Fig. 10. Leptocotis spinigera. Facsimile from Streets, Pel. Amph., pl. 1.

Fig. 11. Calamorhynchus pellucidus. Facsimile from Streets, Pel. Amph., pl. 1.

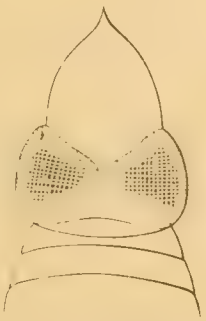


Fig. 12 Tullbergella cuspidata.

first pair. Immediately in front of the bases of the first pair of antennæ the rostrum commences, its underside being open in Oxycephalus, Streetsia, Glossocephalus, Cranocephalus, Tullbergella, and Calamorhynchus, and more or less closed in Stebbingella, Dorycephalus, Leptocotis, and Xiphocephalus. The under margins of the rostral walls are often sharply serrated.

4. *The eyes.*

As in most of the Hyperiidean families they eyes are also strongly developed in the Oxycephalids, and consist of a great number of ocelli. These ocelli are not separated into an upper-eye, (Scheitel-Auge, Claus), and two lateral portions on each side as in *Thyropus* and other genera, but in all the genera of the family Oxycephalidæ, with the exception of Streetsia and Calamorhynchus, the ocelli are distributed into two lateral portions separated from one another at the crown of the head by a more or less narrow space. In Streetsia and Calamorhynchus on the other hand all the the ocelli are fused together into one mass, occupying the whole of the central part of the head. The ocelli consist

each of a double crystalline cone, very long, evenly increasing in thickness from the narrowly pointed base to the apex where the Semperian nucleus is distinct; the basal part being surrounded by the ocular pigment. The two halves of the cone are often separated from one another for a considerable part of their length. The cuticular cornea is distinctly facetted;

Fig. 13. *Fig. 14.*

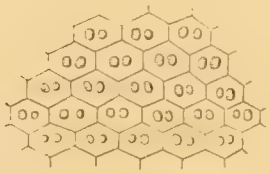


Fig. 15.

Xiphocephalus Whitei.

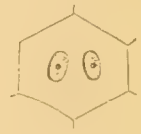


Fig. 16.

Fig. 17.

these facets being, in my opinion, nothing else but an enlarged hexagonal reticulation such as that which I have mentioned above as occurring in the integument of the body. The number of ocelli and their size vary much from one species to another, and will be recorded below in the specific descriptions.

5. *The first pair of antennæ.*

In the male the shape of the first pair of antennæ essentially agrees with that in the other families belonging to the subtribe *Hyperiidea curvicornia*. The peduncle is three-jointed, but very often the second or third joint is indistinct. The first joint of the flagellum, regarded as the third joint of the peduncle by some authors, is enormously developed, much longer and stouter than the peduncle, curved, and bent downwards almost rectangular to the peduncle (fig. 18); the hind convex side is thickly covered with long cylindrical, olfactory hairs, set in regular, transversal rows, each hair being fixed on a small button-like elevation. The under side of the first joint is truncated and long, the lower anterior corner often being produced into a thick, obtuse process. The sides of this enlarged first joint of the flagellum often show numerous soft tubercles and small grooves, probably containing cutaneous glands (fig. 19).

The following joints of the flagellum are three in number in all the species of the family Oxycephalidæ that I have examined, but vary in length from one species to another (fig. 19 and 20). In the young male the first flagellar joint is scarcely curved, but resembles that joint in the female, and the second flagellar joint is not separated from the first (fig. 21 and 22). In the Xiphocephalidæ on the other hand the

Fig. 18. Tullbergella cuspidata. ♂.

Fig. 19. Oxycephalus pectinatus. ♂.

number of these joints is not the same in the different species, there being three flagellar joints following the first large one in Xiphocephalus armatus, H. Milne Edwards, but only one in X. Whitei, Spence

Fig. 20. Streetsia Steenstrupi. ♂.

Fig. 21. Oxycephalus pectinatus. Young ♂.

Fig. 22. Oxycephalus Clausi. Young ♂.

Fig. 23 Tullbergella cuspidata. ♀.

Bate. The second flagellar joint is fixed subterminally to the under margin of the first one; the second and following flagellar joints are also provided with long, slender hairs (fig. 19 and 20).

The first pair of antennæ in the female are very different in appearance to those in the male, and differ also in the number of joints. The second joint of the peduncle is usually coalesced with the first,

which is very stout, while the third is distinct; the first joint of the flagellum is not curved, but in a straight line with the peduncle, and much longer than it, though not thicker. In the family Oxycephalidæ, the first flagellar joint is followed by a second and third, the last longer

Fig. 24. Xiphocephalus Whitei ♀.

Fig. 25. Simorhynchotus Lilljeborgi. ♀.

Fig. 26. Glossocephalus spiniger ♀

and more slender than the second. In the family Xiphocephalidæ the flagellum consists of only one joint, much longer than the peduncle, bulbous or tumid at the lower end, and carrying some long olfactory hairs.

6. *The second pair of antennæ.*

They consist in the male of five joints in all the genera except Glossocephalus, where they are composed of six. The first four joints are elongated, articulating with each others in such a way as to allow of being folded up like a carpenter's rule. The last or the last two joints in Glossocephalus are minute, and the articulation allows of but little movement. The first joint of the second pair of antennæ varies in length, according to the length of the head, being shorter than half the second joint in the genera Simorhynchotus, Tullbergella and Cranocephalus (fig. 27 and 28). With this shortness of the first joint is connected a very important difference in the manner of hiding the antennæ when folded. In the three just mentioned genera the folded antennæ are concealed for more than half their length under

Fig. 27. Tullbergella cuspidata ♂

the peræon between the peræopoda, as in the immediately preceding families of the *Amphipoda curvicornia*, but the anterior part of the folded antennæ, concealed under the head, is comparatively longer than in those families. This feature is very interesting as showing the close relation between the Oxycephalidæ and the *Lycœidæ*. In the other genera the first joint is only a little shorter than the second, and the second pair of antennæ are, when folded, concealed for their whole length under the head within the above mentioned hollow channel, and within the lower part of the spacious chamber, in which the first pair of antennæ are fixed. The length of the antennæ in these latter genera depends naturally

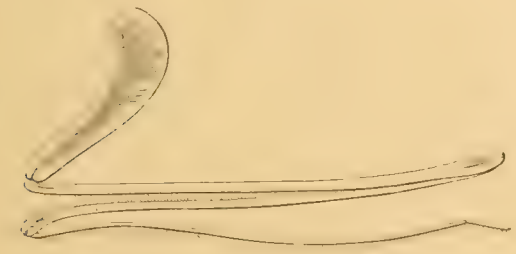


Fig. 28. Simorhynchotus Lilljeborgi.

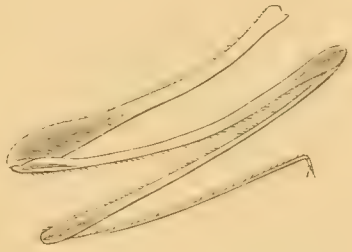


Fig. 29. Oxycephalus pectinatus ♂.

upon the length of the head, so that they are comparatively short and stout in the genera Glossocephalus and Stebbingella (fig. 30), tolerably long in Oxycephalus (fig. 29) and Streetsia, and very long and slender in Dorycephalus (fig. 31) Leptocotis[1]), and Xiphocepha-

Fig. 30. Stebbingella typhoides. Facsimile from Claus Platysceliden, pl.

Fig. 31. Dorycephalus Lindstroemi.

lus (fig. 2). In the three genera, Simorhynchotus, Tullbergella, and Cranocephalus the second joint is more than twice as long as the first, while in all the other the second it is equal to or only a little longer than the first. In all the genera the third and fourth joints are about

1) The male of Calamorhynchus is hitherto not known.

the same length as the second. The extremities of the first four joints are dilated, showing powerful muscles plumosely arranged. In Stebbingella the antennal joints are much bent (fig. 30) but in the other genera they are more or less straight. The fifth joint, or in Glossocephalus the fifth and sixth joints are very short (fig. 31). The margins of all the joints are fringed with minute hairs.

7. *The mouth-organs.*

These organs are less developed in the Oxycephalids than in most of the other Hyperids. In the genus Xiphocephalus (fig. 32) the *epistoma* forms a rounded, shield-like plate, with a strongly protruding,

Fig 32. Xiphocephalus Whitei.

Fig. 33. Oxycephalus piscator.

Fig. 34. Simorhynchotus Lilljeborgi.

central, spine-like process. In the true Oxycephalidæ it consists of a tuberculous prominence in front of the mouth-organs.

The *labrum* (fig. 33) is more or less distinctly bilobed, the hind margin feebly curved, and almost entirely smooth.

The *mandibles* (fig. 34—39) are best developed in the genera Tullbergella and Glossocephalus, and most simple in the genus

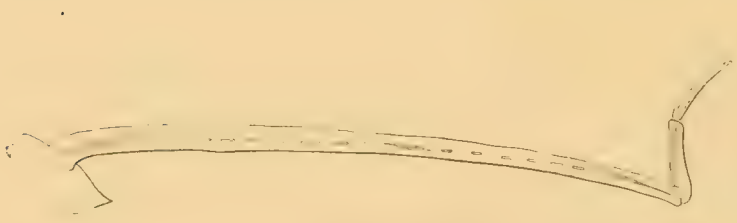


Fig. 35. Oxycephalus piscator. ♂.

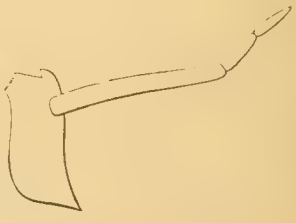


Fig. 36. Oxycephalus piscator. Young ♂.

Xiphocephalus. In the first genus the right mandible has a large, straight, cutting or incisive process with a broad neck springing out from the somewhat elongated stem of the mandible; on the left mandible there is also an accessory process not half as wide as the principal. In Xiphocephalus the mandibles are less elongated than in the Oxyce-

phalidæ and the cutting edge is not at all separated from the stem by a distinct neck. A molar tubercle is wanting in all the representatives of the two families. The palp is strongly developed in the males; among the Oxycephalidæ the first joint is more or less elongated according

Fig 37. Oxycephalus piscator. ♀.

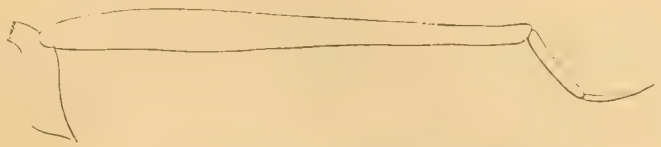


Fig. 38. Streetsia Steenstrupi. ♂.

to the varying length of the head, and always nearly as long as the first joint of the second pair of antennæ; the last two joints are short, subequal in length, and slender. I the Xiphocephalidæ the first joint is enormously elongated, being many times longer than the two terminal joints together.

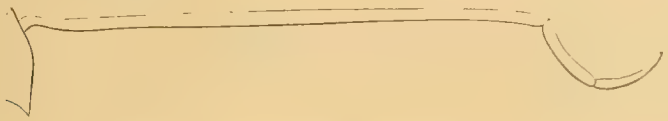


Fig. 39. Dorycephalus Lindstroemi. ♂.

Fig. 40. Tullbergella cuspidata.

The *labium* (fig. 40) is soft, the lateral parts being rounded. Both the pairs of *maxillæ* are very rudimentary being possibly represented by two minute soft laminæ at the base of the mandibles.

Fig. 41. Oxycephalus piscator.

Fig. 42.

Fig. 43. Glossocephalus spiniger.

Fig. 44. Dorycephalus Lindstroemi.

Fig. 45. Xiphocephalus Whitei.

The *maxillipeds* (fig. 41—45) consist of a two-jointed, much bent stem; at the distal or lower margin of the second joint rise laterally two more or less spoon-shaped laminæ, the homologues of the palps in the Gammarids. In the middle between these laminæ there extends a small, sometimes tongue-like process, sometimes more or less cylindrical or tube-

like, bent inwards against the tip of the mandibles. The margins of the lateral laminæ are often tuberculated and serrated or sparingly set with short bristles or fine hairs.

8. *The perœon and its appendages.*

According to the varying form of body in the different genera the peræon is short and stout, as in Tullbergella (fig. 1), or long and almost rod-like, as in Xiphocephalus (fig. 2), but it may be observed that in the enormous elongation which occurs for instance in Xiphocephalus, has the peræon comparatively less share than the head, the urus, and the pleon.

Fig. 46. The first and second peræonal segments of *Xiphocephalus Whitei*. ♂.

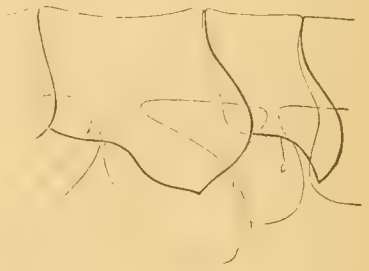


Fig. 47. The sixth and seventh peræonal segments of *Xiphocephalus Whitei*. ♂.

The *epimerals* are distinct in all the genera of the Oxycephalidæ (fig. 1, 3, 4, 5 and 27), but in the Xiphocephalidæ only the epimeral of the first pair of peræopoda is distinct, the others being coalesced with the corresponding segments (fig. 46 and 47).

The *branchial vesicles* are attached to the second and four following pairs of peræopoda in all species of both families. Those in the Oxycephalidæ are comparatively small, while those in the Xiphocephalidæ are very large (fig. 46 and 47).

The *ovitectrices* vary in form in the different genera of the Oxycephalidæ; in Tullbergella, Simorhynchotus, and Stebbingella they are broadly ovate, in Dorycephalus, Streetsia, Oxycephalus, and Leptocotis they are more elongated, the margins being smooth without hairs, and in Glossocephalus they are more irregular in form, the lower end being produced into a sharp angle.

In the Xiphocephalidæ on the other hand there exist no ovitectrices, but the eggs on leaving the oviduct are fixed on the under side of the body, probably by means of some kind of cement, which is possibly secreted from some of the strongly developed glands in the joints of the peræopoda. In any case the manner of carrying the eggs and embryos is very remarkable, and, as far as I know, has not been previously observed (fig. 47). A different number of eggs are fixed under the different segments: under the first I have never observed a single

Fig. 48. The fourth peræonal segment of *Xiphocephalus Whitei*. ♀.

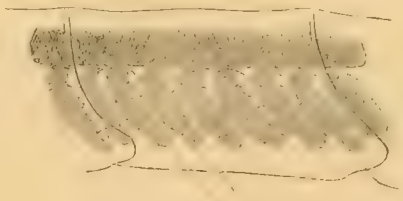


Fig. 49. The sixth peræonal segment of *Xiphocephalus Whitei*. ♀.

egg, under the second three or four pairs are fixed at equal intervals, under each of the third and fourth four or five, under the fifth seven or eight, under the sixth five or six pairs and none under the seventh, one female thus carrying in all from forty to fifty eggs or embryos. I have observed very young eggs thus placed, they being in fact in the third or fourth stage of division, and quite globular (fig. 48), as well as embryos just on the point of breaking the egg membrane (fig. 49), the form of the egg in this case being elongate-ovate, and the young being provided with six pairs of peræonal legs, distinctly developed and armed with strong claws.

The first and second pairs of *peræopoda* are developed into strong grasping or prehensile organs, and show in the different genera almost all the modifications of such organs which are to be observed among the other Hyperids.

We meet with the less complicated form in the first pair of peræopoda of Simorhynchotus (fig. 50), that is to say:

1. **The folding hand** (fig. 50), in which the carpus is only a little dilated, and has a more or less rounded hind margin, so that the metacarpus can be doubled up along it so as to impinge against its *hind* margin, the dactylus thus coming in contact with the tibia.

Fig. 50. The first pair of *Simorchynchotus Liljeborgi.*

This is the same form of prehensile organ which exists in the third and fourth and also in the fifth pair of peræopoda in *Euthemisto* and *Parathemisto.* Moreover the folding hand is common in the *Amphipoda Gammaridea*, in the first three pairs of peræopoda in some families of *Isopoda,* and is probably most strongly developed in the first pair of *Squilla* and other Stomatopods.

The next step in the development of these organs is represented in many genera, as for instance in the second pair in Simorhynchotus, the first pair in Streetsia (fig. 52), the first pair in Dorycephalus, the first and second pairs in Tullbergella (fig. 51), and in others, that is to say:

2. **The subcheliform hand,** (fig. 51—53) in which the carpus is broadly dilated backwards, but not produced downwards, or only very little produced, so that the metacarpus impinges against the *under* margin of the carpus, the dactylus here coming in contact with the hind margin of the carpus. When the hind margin of the metacarpus is in contact with the under margin of the carpus, the metacarpus is at a right angle with the axis of the leg, the leg being supposed to hang straight down.

Fig. 51. The first pair of *Tullbergella cuspidata.*

Fig. 52. The first pair of *Streetsia Steentrupi.*

Fig. 53. The first pair of *Cranocephalus Goesi.*

The next form, the most developed prehensile organ, is best represented in the second pair of peræopoda in the genus Oxycephalus (fig. 54), but is also met with in the first pair in the same genus, in the second pair in Streetsia (fig. 55), and in others; that is to say:

3. **The cheliform hand,** in which the carpus is not only dilated backwards, but also produced downwards into a longer or shorter *carpal process*, so that the metacarpus impinges against the *front* margin of the carpal process and the dactylus comes into no contact whatever with the carpus itself. When the hind margin of the metacarpus is in contact with the front margin of the carpal process, the metacarpus is at an angle of from 45° to almost 0° with the axis of the leg.

Fig. 54. The second pair of *Oxycephalus Clausi.*

Naturally there are many transitions between the three kinds of prehensile

Fig. 55. The second pair of *Streetsia Steenstrupi.*

Fig. 56. The first pair of *Dorycephalus Lindstroemi.*

hands, but for practical reasons I think it best to keep these three terms, at least as far as regards the tribe Amphipoda Hyperiidea.

When the lower end of the *metacarpus* is dilated so that this joint shows an *under* margin, straight or excavated, and when the hinder corner of this under margin is produced so that the dactylus, or a portion of the dactylus, impinges against the *under* margin of the metacarpus, I call the double prehensile organ thus formed:

4. **A complexely subcheliform hand,** (fig. 56), or

5. **A complexely cheliform hand,** (fig. 57) as the *carpus* is not or is produced, thus disregarding the fact whether the lower hinder corner of the metacarpus is or is not produced.

None of the following pairs of legs are prehensile in any of the adult forms of the genera dealt with in this treatise. The seventh pair are complete in all the genera of the Oxycephalidæ (fig. 58) with the exception of Tullbergella (fig. 59), in which the carpus and metacarpus are fused together, a feature closely resembling that which occurs in the families *Vibilidæ* and *Cyllopodidæ* among the *Hyperiidea recticornia*, and a feature also suggesting the relation of the Oxycephalidæ with the *Pronoidæ*. In Xiphocephalidæ the seventh pair are transformed (fig. 47).

Fig. 57. The first pair of *Xiphocephalus armatus.*

Fig. 58. Streetsia carinata.

Fig. 59. Tullbergella cuspidata.

The *femur*. In none of the Oxycephalids is the femur of the first four pairs of peræopoda much dilated; it is broadest in the first and second pairs in Oxycephalus but scarcely half as broad as long. The femur is narrowest, almost linear, in all the legs in the Xiphocephalidæ. In the Oxycephalidæ the femur of the third and fourth pairs is usually narrow, and linear, while that of the last three pairs is on the other hand more or less dilated; in Glossocephalus it is comparatively narrowest; then come, with the femur increasing in breadth, Dorycephalus, Leptocotis, Calamorhynchus, Streetsia, Tullbergella, Cranocephalus, Oxycephalus and Stebbingella, in which last the femur is much dilated, somewhat tending to the form adopted by the *Parascelidæ*. In Stebbingella we have also the peculiarity, that the external surface of the joint shows some pits or holes which are probably for cutaneous glands (fig. 60). In all the genera except Stebbingella the femur of the sixth pair is broader than, or at least as broad as, the femur of the fifth pair. In Stebbingella the femur of the fifth pair is broadest. In Tullbergella the femur of the sixth pair (fig. 61) is produced at the lower hind corner into a long sharp process. In Streetsia the lower hind apex of the femur of the sixth pair (fig. 62) is produced downwards, so that the genu articulates sub-apically with the femur, a feature which shows some connection with that which occurs in the *Pronoidæ*. The form of the femur of the seventh pair is

more or less ovate except in Stebbingella (fig. 60), where it has a trapezoid form.

The *genu* is always short and not dilated.

The *tibia* is tolerably long, except in the first two pairs of peræopoda; in the third and fourth pairs in Glossocephalus, and in the third and three following in Xiphocephalus it is much elongated. In the female of this last genus it is sometimes, and I think periodically, enormously inflated owing to the strong development of the glands within it. In the former genus it is much dilated, resembling that joint in *Phorcorhaphis* and *Lycæopsis*. The tibia is often provided with hairs or

Fig. 60. Stebbingella Théeli.

Fig. 61. Tullbergella cuspidata.

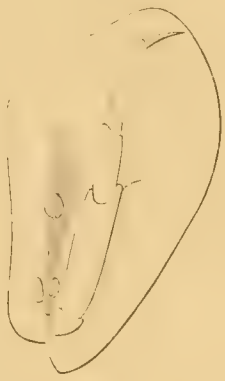


Fig. 62. Streetsia carinata.

spines along the hind margin — in the third and and fourth pairs — or on the front margin — in the fifth and sixth.

The *carpus*. The development of the carpus in the first and second pairs has been spoken of above (p. 31—33). In the third and fourth pairs the carpus is never dilated, as it is for instance in the genera *Parathemisto* and *Euthemisto;* it is often spiniferous or serrated, and in Xiphocephalus sometimes inflated, but not in the same degree as the tibia. In Glossocephalus it is dilated as well as the tibia. The carpus of the fifth and sixth pairs is usually serrated or set with spines; in Xiphocephalus it carries a series of ovate discs or plates armed

Fig. 63. Fig. 64. Xiphocephalus Whitei.

with a row of four or five stout spines, which are probably sensitive organs of some kind (fig. 63).

The *metacarpus* is usually narrow and linear; the hind margin of the third and fourth pairs, and the front margin of the fifth, sixth, and sometimes of the seventh is serrated or pectinated. In Xiphocephalus the metacarpus of the fifth and sixth pairs shows sensitive organs like those of the carpus mentioned just above (fig. 64).

Fig. 65. Oxycephalus Clausi.

The *dactylus* of the first and second pairs as well as that of some or of all the other pairs has often a circular or ovate hole at the base of the hind margin, in the case of the first four pairs, and of the front margin in the case of the others. This hole is an outlet for the secretion of the glands which are present in many of the joints of the peræopoda. Sometimes the hind margin is chanelled, and in some few cases the apex of the dactylus is open (fig. 65). The dactylus has often a tooth-like prominence in the middle of the hind margin.

9. The pleon and its appendages.

The pleon differs less in form from that in the other Hyperids than any of the other portions of the body. In Xiphocephalus it is much elongated, longer than the peræon (fig. 2); in Tullbergella it is very broad and stout, the lower hind corners of the last segment projecting into long sharp processes (fig. 74). In Stebbingella it is hard and tuberculous with grooves and ridges on the external surface, in Dorycephalus the integument is thin and marked with peculiar pits and excavations. The pleopoda are normal; the peduncles are globular, egg-shaped or almost cylindrical. On the inner side of the apex of the peduncle are to be seen those peculiar organs first mentioned by G. O. SARS in his admirable work on the fresh-water Crustacea of Norway[1]) under the name »épines particuliers» and termed »coup-

Fig. 66. Oxycephalus piscator.

Fig. 67. Simorhynchotus Lilljeborgi.

1) G. O. SARS. Crustacés d'eau douce de la Norvège. I p. 5 and 133 pl. 5, fig. 8' and 8". Christiania 1869.

ling spines» by Stebbing in 1888, (l. c. p. XIV). They have usually the form of a club or a mushroom, the head armed with short, strong, retroverted teeth, their purpose being to hold the two pleopods together (fig. 66—69). The rami of the pleopoda are also very similar

Fig. 68. *Oxycephalus piscator.* *Fig. 69.* *Fig. 70.* *Simorhynchotus Liljeborgi.*

to those in the other Hyperids as well as in the *Amphipoda Gammaridea*. The first large joint of the inner ramus carries a »cleft bristle» (fig. 68—70), also first noticed by G. O. Sars and minutely described by Stebbing from many different forms of the »Challenger» Amphipoda. The following joints are provided each with one pair of feathered bristles.

10. The urus and its appendages.

The first segment of the urus is usually short, much shorter than the last pleonal segment, except in Xiphocephalus in which it is much elongated, rod-like, and longer than the last pleonal segment. The second and third segments are coalesced into one, and usually longer than the first segment, the only exception being Xiphocephalus armatus, in which the coalesced last ural segment is shorter than the first. The last coalesced segment is comparatively broad in Simorhynchotus (fig. 76), Tullbergella (fig. 74), Glossocephalus (fig. 71), and Stebbingella, more elongated in Cranocephalus (fig. 72), Oxycephalus (fig. 75), Streetsia, Dorycephalus (fig. 73) Leptocotis, and Calamorhynchus, and lastly very narrow and rod-like in Xiphocephalus.

The *telson* is invariably coalesced with the last ural segment in all the genera of the Oxycephalidæ, and this character not only suggests the relation of the Oxycephalidæ with the *Lycœidæ*, the *Para-*

scelidæ, and the *Eutyphidæ*, but is also a feature of the *Isopoda*. In the Oxycephalidæ the telson is more or less broad, varying from the broadest form in Simorhynchotus (fig. 76) and Tullbergella (fig. 74) to the narrowly elongated form in Leptocotis and Dorycephalus (fig.

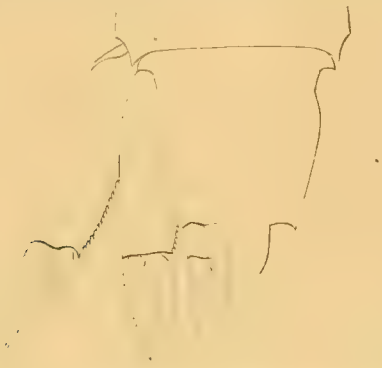


Fig. 71. Glossocephalus Milne Edwardsi.

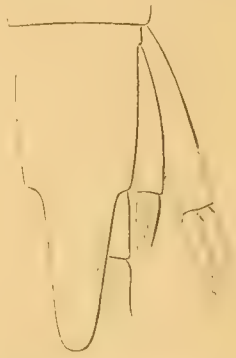


Fig. 72. Cranocephalus Goësi.

73). It is usually sharp-pointed at the apex, but in Cranocephalus and Glossocephalus the apex is broadly rounded (fig 71 and 72). In the Xiphocephalidæ on the other hand the telson is free from,

Fig. 73. Dorycephalus Lindstroemi.

Fig. 74. Tullbergella cuspidata.

and articulating with, the last ural segment; but the new species X. brevicaudatus, described in 1888 by STEBBING (l. c. p. 1612) shows a very remarkable exception to this rule. The case he reports of the telson being coalesced with the last ural segment may possibly be an indi-

vidual abnormity in the only specimen examined owing to some lesion, or if not, I am quite unable to see how such a contradiction is to be explained. In Xiphocephalus the telson is usually much longer than the rest of the urus.

The *uropoda* show naturally the same gradation as the urus from stout, broad, laminar peduncles with broadly lanceolate rami, to extremely elongated, rod-like peduncles with more or less needle-shaped rami. In Glossocephalus (fig. 71) they are very broad and short

Fig. 75. Oxycephalus piscator.

Fig. 76. Simorhynchotus Lilljeborgi.

like those in the genus *Hyperia;* in Simorhynchotus (fig. 76), Oxycephalus, Cranocephalus, Tullbergella and Stebbingella, they are comparatively short; in Dorycephalus (fig. 73), Leptocotis and Calamorhynchus they grow gradationally longer and narrower, the peduncle of the first pair even in Leptocotis being 8 or 10 times longer than broad. In Xiphocephalus the elongation is carried to its extreme limit, the length of the rod-like peduncles being 30—50 times greater than their breadth.

Fig. 77. Dorycephalus Lindstroemi.

In some of the genera, — see the diagram p. 46 — all the rami are free, articulating with the peduncles (fig. 71 and 72), in others viz: Dorycephalus and Tullbergella (fig. 73 and 74) the inner ramus of the last pair is coalesced with the peduncle while all the other rami are free; and lastly in Oxycephalus (fig. 75 and 76) and others the inner rami of the last two pairs are coalesced with the corresponding peduncles, the other rami being free; and in Xiphocephalus also the inner rami of the last two pairs are coalesced with the corresponding peduncles (fig. 78—80).

The outer and the inner ramus are usually both well developed, and more or less equal in length. Exceptions from this are Dorycephalus Lindstroemi (fig. 77), Xiphocephalus armatus (fig. 80) and X. brevicaudatus. In the first of which the outer rami of the first and third pairs and in the two latter those of all the three pairs are very reduced in size, diminutive.

Usually we have well developed *glands* in the peduncles and rami; their outlets are usually situated at the upper end of the rami, where the rami are in contact with one another. In Xiphocephalus

Fig. 78. The second pair of *Xiphocephalus Whitei.*

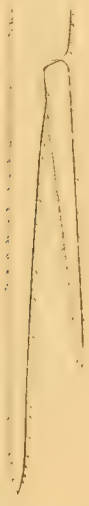


Fig. 79. The third pair of *Xiphocephalus Whitei.*

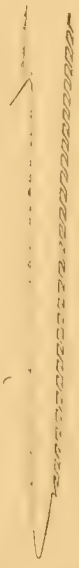


Fig. 80. Xiphocephalus armatus.

Fig. 81. The inner ramus of the third pair of *Xiphocephalus Whitei.*

Fig. 82. Telson of *Xiphocephalus Whitei.*

the glands are highly developed, filling not only the uropoda but also the telson; at the apex of the telson a small circular outlet is to be observed; at the end of some of the rami there are also similar outlets to be seen (fig. 81 and 82).[1])

1) In the following parts of the Morphological Notes I give a few preliminary notices on the nervous system, glands, etc., reserving a fuller account of the different organs of the Oxycephalids for the third volume of my »Contributions to a Monograph of the Amphipoda Hyperiidea».

11. The nervous system.

The ganglionic chain shows a strongly developed supra-oesophagial, or cephalic ganglion; from its anterior corners extend the very stout and thick optical nerves, dilating apically into an ovate or bean-shaped disc, which is more or less closely pressed against the layer formed by the retina. Between the optical nerves rise two stout nerves from the front margin of the cephalic ganglion, and run to the first pair of antennæ; at the base of these antennal nerves are situated the two vesicles which have been interpreted by Claus [1]) as auditory organs. These vesicles are small in the Oxycephalidæ but very largely developed in the Xiphocephalidæ. The commissural cords connecting the cephalic ganglion with the infra-oesophagial ganglion are thick and stout, much thicker than for instance in *Lanceolidæ*. Close upon the infra-oesophagial ganglion follow the first two pairs of peræonal ganglia; they are not coalesced with the infra-oesophagial ganglion but in the Oxycephalidæ they are so closely pressed against it that the commissural cords between them are scarcely perceptible. The following four pairs of peræonal ganglia are equidistant, situated each in the middle of the corresponding segments, the third, fourth, fifth, and sixth. The pair of ganglia supplying the seventh peræonal segment and its appendages with nerves are situated just at the limit between the sixth and seventh segments, close to the preceding pair of ganglia but not coalesced with it. In the hind portion of the body the ganglionic chain shows three pairs of ganglia, one pair situated in the middle of each of the pleonal segments, and the last consisting of two or three pairs, fused together and so supplying the whole urus with nerves. The ganglionic chain is thus composed of twelve pairs of ganglia, some pairs being placed closely together. The commissural cords run close to one another, but are not coalesced. In the Xiphocephalidæ the first two pairs of peræonal ganglia are more separated from one another and from the infra-oesophagial ganglion, so that the commissural cords are distinct, but not longer than the ganglia themselves.

12. The glands.

Glands are present in most of the joints of the peræopoda and uropoda of all the species of both the families. They are either simple,

1) C. Claus, **23**, p. 150; **36**, p. 15.

consisting of only one cell, with a short, narrow duct opening into a small circular hole in the surface of the integument (fig. 83), which hole is usually guarded by one or more small simple hairs; or they are composed of many cells, and packed into thick masses round a central lumen from which a common duct runs to the outlet. The outlet is often placed, as mentioned above, at the base of the dactylus (fig. 84), more seldom at its apex (fig. 65), often in semicircu lar incisions at the upper end of the rami of the uropoda, or — as in Xiphocephalus — at the apex of the telson and of the rami of the uropoda (fig. 81 and 82). Usually the glands of the legs are concentrated in the femur, and only a few and scattered glandular cells are to be seen within the following joints, often lying round or close to the duct which runs from the chief mass of glands in the femur to the base of the dactylus (fig. 84); but in the females of the three species of *Xiphocephalus* which I have examined, the tibia and carpus of the third and fourth pairs of peræopoda, as well as the same joints of the fifth and sixth pairs are sometimes inflated, and almost egg-shaped, owing to a strongly developed glandular mass surrounding the axis of the joint for the whole of its length (fig. 85). The development of these powerful glands in the tibia and carpus of those pairs of peræopoda is, however, in my opinion periodical, and may be supposed to have some connection with the fixation of the eggs on the under-side of the body, so I venture the supposition that they are cement-glands. I believe this enormous development of the tibial and carpal glands to be periodical because I have seen fullgrown females of X. armatus and X. Whitei without the joints in question inflated at all; but I have never seen females of the same species with eggs or young ones, which had not at the same time those joints more or less inflated. Thus it seems probable that the development of these glands may be connected with the maternal functions

Fig. 83. Cutaneous gland in the margin of the first epimeral of *Xiphocephalus Whitei.*

Fig. 84. Oxycephalus latirostris.

Fig. 85. The tibia of the fourth pair of peræopoda of *Xiphocephalus Whitei.* ♀.

of the animal, and that we thus may find them increasing or decreasing in volume according to the stage of the development of the ovaria.

The other glands present within the joints of the legs have probably a different function, according to the place they occupy, and so I am inclined to think that the highly developed glands in the uropoda and telson of Xiphocephalus are poison-glands.

13. The young.

The eggs are in the family Oxycephalidæ packed in, and protected by a pouch formed of five pairs of ovitectrices, attached to the second and four following pairs of peræopoda. There the eggs rest until the time of hatching, when the young have a form very similar to that of a true *Hyperia*.

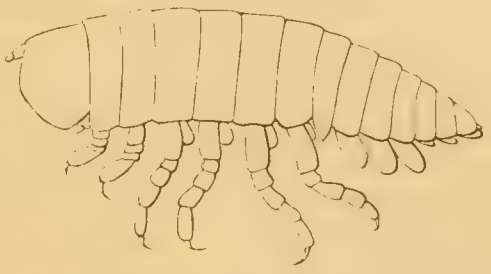


Fig. 86. A young, just hatched, of *Xiphocephalus Whitei*.

In the Xiphocephalidæ also the young remind one of the form occurring in *Hyperia*, *Vibilia*, and other genera of the first two subtribes. But the manner of bearing the eggs is a very peculiar feature. No ovitectrices exist but the eggs are placed under the peræonal segments, between the lower parts of the sides where they are fixed in two regular rows, as mentioned above (p. 31). When the young are ready to be hatched we find that each egg is cemented to the under surface of the peræon with the head-end, and that the young hang tail downwards (fig. 48 and 49).

The first pair of antennæ in the just hatched young one of Xiphocephalus consist of two small tubercles fixed at the *anterior* side of the head, and no trace of a rostrum is to be seen. The first and five following pairs of peræopoda are developed, all simple and subsimilar in form, and armed with strong claws, the first and second pairs subequal in length, and more than half as long as the following pairs. No trace of the seventh pair is to seen. The pleon and urus are comparatively short, much shorter together than the peræon. The pleopoda are represented by egg-shaped vesicles. The second and third ural segments are free, not coalesced, each carrying a pair of small vesicles, the uropods (fig. 86).

IV. THE OXYCEPHALIDEAN GENERA AND SPECIES.

As I have already said I think it convenient to divide the Oxycephalids into two families, instituting a new family Xiphocephalidæ for the genus Xiphocephalus. I separate this genus from the other Oxycephalids, because it is distinguished from the other genera by characteristics which in my opinion have a more than generic value. So for instance Xiphocephalus has the seventh pair of peræopoda rudimentary, and consisting of only the femur, while the other genera have the same pair complete[1]); Xiphocephalus normally has the telson free from, and articulating with, the last ural segment, while all the other genera have the telson fused with the last ural segment; and lastly the female of Xiphocephalus wants ovitectrices, and carries the eggs and young fixed under the peræonal segments in two regular rows, while the other genera have well developed ovitectrices. On the other hand the two families are connected by some common characteristics, as for instance the reduction of the mouth-organs, the maxillæ being rudimentary in both families, and the rostral elongation of the forepart of the head, and the more pronounced tendency to form an elongated body than is seen in any other family of the tribe. This tendency to elongation is besides expressed in the form of the femora of the fifth and sixth pairs of peræopoda in Xiphocephalidæ, but not met with in these parts in Oxycephalidæ, not even in the genera Leptocotis and Calamorhynchus, which show much elongated uropods.

Dana was the first (**17**, p. 1009, see above, p. 5) who took the Oxycephalids as a whole placing them as a subfamily, *Oxycephalinæ*, of the family *Typhidæ*, at the side of the subfamilies *Typhinæ* and *Pronoinæ*; he then gave the following diagnosis of the *Oxycephalinæ:*

»Abdomen in ventrem se non flectens. Caput oblongum, antennis 1mis superficiem capitis inferiorem insitis».

---

1) Except Tullbergella which has the femur and three following joints.

He distinguished the two genera *Oxycephalus* and *Rhabdosoma* from one another by the length of the rostrum and of the uropods.

In 1862 Spence Bate (**20**, p. 341) made the subfamily a family of its own, and in 1885 Carus (**33**, p. 427) considered it as a subfamily of the family *Platyscelidæ*.

The family **OXYCEPHALIDÆ**, Spence Bate, 1861.

Diagn. The *head* is more or less elongated and rostrate.

The *eyes* are large, but do not occupy the whole head.

The first pair of *antennæ* are curved (♂), and fixed on the under side of the head; the first joint of the flagellum is very large, and tumid; the following, joints are small, few in number, and subterminal (♂). The second pair are fixed on the under side of the head, are long, slender, and folded four times (♂), or are entirely wanting (♀).

The *mouth-organs* are reduced, the maxillæ being rudimentary; the mandibles are provided with an elongated palp (♂), or without a palp (♀).

The last five pairs of *peræopoda* are walking legs; the femur of the last three pairs is not transformed. The seventh pair are complete. The ovitectrices are well developed.

The *uropoda* are provided with rami.

The *telson* is coalesced with the last ural segment.

In 1887, in my preliminary »Systematical list» I enumerated five genera, in addition to *Rhabdosoma* or *Xiphocephalus*, as composing the family Oxycephalidæ, viz: Glossocephalus, Oxycephalus, Leptocotis, Tullbergella, and Calamorhynchus; a sixth genus Streetsia, was proposed in 1888 by Stebbing; and here I increase the number of genera to ten by transferring the genus Simorhynchotus from the *Lycœidæ* to this family, and by introducing three new genera, viz: Cranocephalus, Stebbingella, and Dorycephalus.

Of these genera Simorhynchotus shows some relation to *Lycœidæ*, Tullbergella to *Euthamneidæ*, Cranocephalus and Stebbingella to *Eutyphidæ*, Glossocephalus to *Phorcoraphidæ*, and Dorycephalus and Leptocotis to *Xiphocephalidæ*.

These ten genera may be distinguished by the characteristics shown in the following synoptical table:

A. The inner rami of the second and third pairs of uropoda are coalesced with the corresponding peduncles.

a 1. The first pair of peræopoda with a folding hand; the second pair with a subcheliform hand. The head is only a little produced, and the rostrum broadly obtuse. 1. **Simorhynchotus.**

a 2. The first and second pairs of peræopoda with a cheliform hand. The head is produced into a more or less sharp-pointed rostrum. 2. **Oxycephalus.**

B. The inner ramus of the third pair of uropoda is coalesced with the peduncle.

b 1. The last ural segment is not twice as long as the first. 3. **Tullbergella.**

b 2. The last ural segment is more than twice as long as the first.

bb 1. The anterior part of the head is dilated into wing-like projections. 4. **Calamorhynchus.**

bb 2. The anterior part of the head is not dilated. 5. **Dorycephalus.**

C. The inner rami of all the uropoda are free, not coalesced with the peduncles.

c 1. The last ural segment is not twice as long as the first.

cc 1. The hind part of the head is not constricted into a neck. The head is produced into a sharp rostrum. The first pair of peræopoda with a subcheliform hand, the second with a cheliform, the carpal process being more or less spine-like 6. **Streetsia.**

cc 2. The hind part of the head is constricted into a neck.

ccc 1. The first two pairs of peræopoda with a subcheliform hand. The head is produced into a sharp rostrum.

cccc 1. The second pair of antennæ in the male are hidden under the head and the peræon, when folded, the first joint not being half as long as the second. 7. **Cranocephalus.**

cccc 2. The second pair of antennæ in the male are hidden only under the head, when folded, the first joint being about as long as the second. 8. **Stebbingella.**

ccc 2. The first two pairs of peræopoda with a cheliform hand, the carpal process being spoon-shaped. The head is produced into an obtuse, rounded rostrum. 9. **Glossocephalus.**

c 2. The last ural segment is more than twice as long as the first. 10. **Leptocotis.**

Gen. 1. **Simorhynchotus,** Th. STEBBING, 1888.

Diagn. The *head* is short, not produced, or only a little produced, forming a thick, broad, obtuse snout. The hind part of the head is not constricted.

The second pair of *antennæ* in the male are concealed under the head and the peræon, when folded.

The first pair of *peræopoda* have a folding hand, the second pair a subcheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.

The last *ural* segment is about as long as the first, and is broader than long.

The inner rami of the last two pairs of *uropoda* are coalesced with the corresponding peduncles.

The *telson* is very broad, and triangular.

Syn.[1])	**1861. Simorhynchus.**	C. CLAUS.		**23**[2]), p. 156.
	»	»	1879.	**27**, p. 188 (42).
	»	»	1887.	**36**, p. 65.
	1888. Simorhynchotus.	TH. STEBBING.		**39**, p. 1572.

When CLAUS in 1861 instituted the genus *Simorhynchus* he placed it in the family Oxycephalidæ; in 1879 he removed it from this family and put it among the *Lycœidæ*. In my opinion however it must be regarded as an Oxycephalid, so I have placed it here as the first genus of the family Oxycephalidæ, chiefly for the reason that the mouth-organs agree with those in the Oxycephalidæ in the form of the mandibles and maxillipeds, and in the rudimentary state of the maxillæ. Also in the form of the last five pairs of peræopoda there is a great resemblance between this genus and the genus *Oxycephalus*. It is however a link between the Oxycephalidæ and the *Lycœidæ*, connecting these two families for which it is so hard to find good distinguishing characteristics, since the principal characteristic used by CLAUS, namely the elongation of the head, is so very gradual; the best characteristic is without doubt the presence of maxillæ in the *Lycœidæ*, but it is of no value for external examination.

CLAUS' name *Simorhynchus* was changed in 1888 to Simorhynchotus by STEBBING, because the former name was found to have been previously applied to a genus of birds.

The species established by CLAUS in 1861 was S. antennarius, the next new species was S. Lilljeborgi, proposed by me in 1887 (**35**, p. 34), and here I describe a new species S. Stebbingi.

The three species are easily distinguished, as is shown below.

A. The head is produced into a short, obtuse rostrum. The telson is acute at the apex.
- a 1. The outer ramus of the second pair of uropoda is about as long as the peduncle. 1. **S. antennarius.**
- a 2. The outer ramus of the second pair of uropoda is much shorter than the peduncle. 2. **S. Stebbingi.**

B. The head is rounded in front, not produced into a rostrum. The telson is rounded at the apex. 3. **S. Lilljeborgi.**

---

1) For a more complete synonymy of this and the following genera and species see: C. BOVALLIUS, Contributions to a Monograph of the Amphipoda Hyperiidea, I, 3.

2) This and the following similar figures in the lists of synonyms and in the text refer to the bibliographical list above, p. 2—10.

1. **Simorhynchotus antennarius,** C. CLAUS, 1861.

Diagn. The *head*, with the rostral prolongation, is about as long as the five first peræonal segments together. The rostral part is very broad, thick, and obtuse at the apex.

The lower anterior corner of the first flagellar joint of the first pair of *antennæ* in the male is produced into a process, which is more than half as long as the breadth of the joint.

The femur of the first and second pairs of *peræopoda* is much longer than all the following joints together. The femur of the seventh pair is scarcely more than half as long as that of the sixth, and much narrower than the femur of the fifth pair.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is as long as the inner ramus, and longer than the outer.

The *telson* is as long as broad, with the apex sharp-pointed.

Syn. **1861. Simorhynchus antennarius,** C. CLAUS. **23,** p. 156.
» » » **27,** p. 188 (42).
» » » **36,** p. 65, pl. 17, fig. 9—19.

All these three descriptions, just cited, are incomplete, and therefore the drawing given by CLAUS in 1887 was of much value for the identification of the species. In addition to the characteristics given in the diagnosis above the following may also be mentioned.

The *head* rises a little above the peræon, but does not form a distinct neck behind. Seen from below the under side of the rostral[1]) portion is flat, and broader than a third part of the head.

The lower hind corner of the first flagellar joint of the first pair of *antennæ* is produced downwards to the middle of the third joint. The second, third, and fourth flagellar joints are about equal in length.

The sixth *peræonal* segment is longer than the fifth, the seventh is more than half as long as the sixth.

The metacarpus of the first pair of *peræopoda* is shorter than the carpus; the dactylus is about half as long as the metacarpus. The

1) By the rostrum or the rostral portion of the head is here always meant the part situated between the point of fixation of the first pair of antennæ and the apex of the head.

carpus of the second pair is about twice as long as it is broad at the lower end; the free part of the under margin is quite half as long as the hind margin of the metacarpus; the lower hind corner is angular; the dactylus is about half as long as the metacarpus. The fifth pair are a little longer than the whole peræon; the femur is more than twice as long as broad, as long as the three following joints together, and about twice as long as the metacarpus. The femur of the sixth pair is ovate, nearly twice as long as broad, and about as long as the three following joints together; the carpus is more than half as long as the tibia, and only a little shorter than the metacarpus. The seventh pair reach to the under margin of the genu of the sixth pair.

The first two *pleonal* segments together are shorter than the last five peræonal segments together. The lateral parts of all the pleonal segments are rounded below and behind.

The first segment of the *urus* is shorter than the last coalesced, which is shorter than the telson.

The rami of the first and second pairs of *uropoda* are elongate-ovate; the inner ramus of the third pair is falci-form, and the outer narrowly elongate.

COLOUR. Faintly red, almost hyaline, with black or very deep red spots all over.

LENGTH. My largest specimen measured 7 mm, the smallest 5 mm, all were males; CLAUS gives 7 mm for his specimens.

HAB. CLAUS records the animal from Zanzibar, and from the Pacific; I have taken it in the Bay of Panamá in 1882.

2. **Simorhynchotus Stebbingi**, n. sp.

The name is given in honour of the Rev. THOMAS R. R. STEBBING.

Diagn. The *head*, with the rostral prolongation, is a little longer than the first five peræonal segments together. The rostral part is somewhat narrowed, and rounded at the apex.

The lower front corner of the first flagellar joint of the first pair of *antennæ* in the male is produced into a process, which is less than half as long as the breadth of the joint.

The *peræon* is scarcely longer than the first two pleonal segments together.

The femur of the first and second pairs of *peræopoda* is much longer than all the following joints together. The femur of the seventh pair is about as long as three-fourths of that of the sixth, and is as broad as the femur of the fifth pair.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is shorter than the inner ramus, but a little longer than the outer. The outer ramus of the second pair is much shorter than the peduncle. The outer ramus of the last pair is more than half as long as the inner, and styliform.

The *telson* is as long as broad, and acute at the apex.

Syn. **Simorhynchotus antennarius,** TH. STEBBING. **39,** p. 1572.

As *Simorhynchotus antennarius*, STEBBING, is, in my opinion, specifically distinct from *S. antennarius*, CLAUS, I have proposed here a new name for the former. I have done so without any hesitation because I have myself taken and examined specimens of both, and I have thus been able to complete in respect to some minor details the description given by STEBBING from a single and somewhat damaged specimen.

The upper surface of the *head* is somewhat deeper than the dorsal line of the peræon. Seen from below the under side of the rostral portion is strongly concave, and much narrower than a third of the head.

The lower hind corner of the first flagellar joint of the first pair of *antennæ* is produced downwards, but does not reach to the under margin of the second flagellar joint. The third flagellar joint is much shorter than the second; the fourth joint is fully as long as the two preceding together.

The fifth *peræonal* segment is longer than the sixth; the seventh is as long as the sixth.

The metacarpus of the first pair of *peræopoda* is shorter than the carpus; the dactylus is a third part as long as the metacarpus. The carpus of the second pair is not twice as long as it is broad at the lower end; the free part of the under margin is more than half as long as the hind margin of the metacarpus; the lower hind corner is angular; the dactylus is a third part as long as the metacarpus. The fifth pair are as long as the peræon and the first two pleonal segments together; the femur is twice as long as broad, much shorter than the three following joints together, and only a little longer than the metacarpus. The femur of the sixth pair is a third part longer than broad, irregularly pear-shaped,

and nearly as long as the three following joints together; the carpus is not half as long as the tibia, and much shorter than half the metacarpus. The seventh pair reach to the apex of the femur of the sixth pair.

The first two *pleonal* segments together are almost as long as the whole peræon. The lateral parts of all the segments are rounded below and obtuse behind.

The first segment of the *urus* is as long as the last coalesced, which is considerably shorter than the telson.

The outer ramus of the first pair is narrow, falci-form, the inner is elongate and sharp-pointed. The rami of the second pair are narrowly elongate and sharp-pointed, the inner ramus being more than twice as long and broad as the outer. The inner ramus of the third pair is constricted in the middle, the upper half is ovate, and the lower half narrow, linear, and truncated at the apex.

COLOUR. Greyish white, whitout spots, the eyes deep red.
LENGTH. 4—6 mm.
HAB. The »Challenger» specimen was taken in the Atlantic, off the coast of Africa, at Lat. 11° 5' N. and Long. 18° 15 W. (STEBBING). I have taken several specimens in the tropical region of the Atlantic, from Long. 20° to 65° W.

3. **Simorhynchotus Lilljeborgi,** C. BOVALLIUS, 1887.

Pl. I fig. 1—7; and p. 26, fig. **25**; p. 27, fig. **28**; p. 28, fig. **34**; p. 32, fig. **50**; p. 36, fig. **67**; p. 37, fig. **70**; and p. 39, p. **76**.

The name is given in honour of Prof. W. LILLJEBORG.

Digan. The *head* is scarcely produced, is rounded, and longer than the first three peræonal segments together.

The lower front corner of the first flagellar joint of the first pair of *antennæ* in the male is produced into a short process, which is less than half as long as the breadth of the joint.

The *peræon* is much longer than the pleon.

The femur of the first and second pairs of *peræopoda* is quite as long as all the following joints together. The femur of the seventh pair is nearly as long as that of the sixth, and is somewhat narrower than the femur of the fifth pair.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is much shorter than the inner ramus, and also shorter than the outer. The outer

ramus of the second pair is longer than the peduncle. The outer ramus of the last pair is fully three-fourths as long as the inner.

The *telson* is longer than broad, and rounded at the apex.

Syn. **1887. Simorhynchotus Lilljeborgi,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 34.

This species is remarkable for the globular, not produced head, and is besides easily distinguished from its congeners by the characteristics recorded above with respect to the uropoda and the telson.

The upper surface of the *head* rises a little above the dorsal line of the peræon.

The lower hind corner of the first flagellar joint of the first pair of *antennæ* is produced downwards, and reaches a little beyond the under margin of the second flagellar joint. The third flagellar joint is longer than the second; the fourth is still longer, but much shorter than the two preceding joints together.

The fifth *peræonal* segment is as long as the sixth; the seventh is as long as the sixth.

The metacarpus of the first pair of peræopoda (p. 32, fig. 50; Pl. I fig. 4—7) is as long as the carpus; the dactylus is nearly a third as long as the metacarpus. The carpus of the second pair is a third longer than it is broad at the lower end; the free part of the under margin is more than half as long as the hind margin of the metacarpus; the lower hind corner is obtusely rounded; the dactylus is about a third as long as the metacarpus. The fifth pair are as long as the peræon and the first pleonal segments together; the femur is about twice as long as broad, much shorter than the three following joints together, and almost as long as the metacarpus. The femur of the sixth pair is scarcely longer than broad, is almost circular, and much shorter than the three following joints together; the carpus is longer than two-thirds of the tibia, and more than half as long as the metacarpus. The seventh pair reach beyond the middle of the tibia of the sixth pair.

The first two *pleonal* segments together are shorter than the last four peræonal segments together. The lateral parts of all the segments are slightly rounded below, and that of the last is angular behind.

The first segment of the *urus* is somewhat longer than the last coalesced, which is about as long as the telson.

The rami of the first pair of *uropoda* (p. 39, fig. 76) are elongate-lanceolate. The outer ramus of the second pair is narrowly elongate; the inner is broadly lanceolate, and more than twice as broad as, but only a little longer than, the outer. The inner ramus of the third pair is falciform, sharp-pointed.

COLOUR. Light red, without spots.
LENGTH. 5—6 mm.
HAB. The tropical region of the Atlantic.

Gen. 2. Oxycephalus, H. MILNE EDWARDS, 1830.

Diagn. The *head* is elongated, and produced into a moderately long rostrum, which is more or less sharp-pointed, and is open on the under side. The hind part of the head is only feebly constricted.

The second pair of *antennæ* are, when folded, hidden under the head.

The first two pairs of *peræopoda* are cheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.

The last coalesced *ural* segment is about twice as long as the first, but is not twice as long as broad.

The inner rami of the last two pairs of *uropoda* are coalesced with the corresponding peduncles.

The *telson* is broad and triangular, with the sides more or less curved.

Syn.

1830. Oxycephalus,	H. MILNE EDWARDS.		**1,** p. 396.
»	»	H. MILNE EDWARDS.	1840. **7,** p. 99.
»	»	C. SPENCE BATE.	1862. **20,** p. 342.
»	»	C. CLAUS.	1879. **27,** p. 190 (44).
»	»	C. BOVALLIUS.	1887. **35,** p. 35.
»	»	C. CLAUS.	1887. **36,** p. 68.
»	»	TH. STEBBING.	1888. **39,** p. 1576.
1832. Orio,	A. COCCO.		**2,** p. 13.
1850. Ornithoramphus,	G. NATALE.		**12.** p. 87.
1864. Natalius,	A. COSTA.		**21,** p. 87.

Instead of tracing the history of the genus and the various species assigned to it, the most important facts of which are briefly given above in the historical introduction, I only give here a list of all the species adding to them the names which I believe to be their true names, that is to say those under which they are recorded in this treatise.

1830	*Oxycephalus piscatoris*, H. Milne Edwards,	= Oxycephalus piscator.
1836	*O. oceanicus*, F. G. Guérin-Méneville,	= Oxycephalus piscator.
1840	*O. armatus*, H. Milne Edwards,	= Xiphocephalus armatus.
»	*O. piscator*, »	= Oxycephalus piscator.
1862	*O. tuberculatus*, C. Spence Bate,	= Oxycephalus tuberculatus.
»	*O. oceanus*, (Guérin) C. Spence Bate,	= Oxycephalus piscator.
1871	*O. tenuirostris*, C. Claus,	= Leptocotis tenuirostris.
1878	*O. tuberculatus*, (Sp. Bate) Th. Streets,	= Oxycephalus Clausi.
»	*O. bulbosus*, Th. Streets,	= Oxycephalus piscator.
»	*O. sclerotieus*, »	= Stebbingella sclerotica.
1879	*O. piscator*, (M. Edw.) C. Claus,	= Oxycephalus Clausi.
»	*O. similis*, C. Claus,	= Oxycephalus piscator.
»	*O. latirostris*, »	= Oxycephalus latirostris.
»	*O. porcellus*, »	= Streetsia porcellus.
»	*O. longiceps*, »	= Streetsia longiceps.
»	*O. typhoides*, »	= Stebbingella typhoïdes.
1884	*O. Edwardsii*, Geo. Thomson,	= Oxycephalus piscator.
1887	*O. Clausi*, C. Bovallius,	= Oxycephalus Clausi.
»	*O. pectinatus*, »	= Oxycephalus pectinatus.
»	*O. pronoïdes*, »	= Streetsia pronoïdes.
»	*O. Steentrupi*, »	= Streetsia Steenstrupi.
1832	*Orio ornithoramphus*, A. Cocco,	= Oxycephalus latirostris?
1850	*Ornithoramphus Coccoi*, G. Natale,	= Oxycephalus latirostris?
1864	*Natalius candidissimus*, A. Costa,	= Oxycephalus piscator?

As I have said above I am not able to pronounce with certainty as to the identity of the three last forms owing to the bad, originally given, descriptions, but, judging from the form of the first two pairs of peræopoda and the urus, I feel pretty sure that they belong to the genus Oxycephalus. The only way to fix their identity would be to make a careful examination of the Mediterranean Oxycephali at the very places where they are to be found.

The limits which I have here assigned to the genus Oxycephalus thus include only five of the above enumerated species, which may be distinguished by the following synoptical table:

A. The hind margin of the metacarpus of the first and second pairs of peræopoda is strongly serrated.

a 1. The lateral parts of the pleonal segments are smooth on the under margin. The lower front corner of the carpus of the second pair of peræopoda is not protruding. 1. **O. piscator.**

a 2. The lateral parts of the pleonal segments are armed with a strongly projecting tooth on the under margin. The lower front corner of the carpus of the second pair of peræopoda is strongly protruding, forming a broad heel in front of the base of the metacarpus. 2. **O. Clausi.**

B. The hind margin of the metacarpus of the first and second pairs of peræopoda is smooth. 3. **O. tuberculatus.**

C. The hind margin of the metacarpus of the first and second pairs of peræopoda is pectinated.

c 1. The seventh pair of peræopoda are scarcely more than half as long as the sixth pair. The telson is more than half as long as the last ural segment, and is longer than the last pair of uropoda. 4. **O. pectinatus.**

c 2. The seventh pair of peræopoda are nearly as long as the sixth pair. The telson is half as long as the last ural segment, and is shorter than the last pair of uropoda. 5. **O. latirostris.**

1. **Oxycephalus piscator,** H. MILNE EDWARDS, 1830.

Pl. I, fig. 8—16; and p. 28, fig. 33, 35, and 36; p. 29, fig. 37, 41, and 42; p. 36, fig. 66; p. 37, fig. 68 and 69; p. 39, fig. 75.

Diagn. The *body* is compressed, and not tuberculate. The segments of the *peræon* are smooth, not angulated or tuberculated.

The *head* is shorter than the peræon, with a short rostrum which is abruptly narrowed near to the apex in the male, but evenly tapering in the female. The hind part of the head is about twice as long as the rostrum, and is somewhat depressed in the male, but inflated and globular in the female.

The front margin of the carpal process of the first and second pairs of *peræopoda* is longer than the hind margin of the metacarpus, which is serrated, and bordered with strong bristles; the lower front corner of the carpus is a little protruding in the first pair but not at all in the second. The fifth pair are much longer than the sixth. The femur of the sixth pair is irregularly pear-shaped, only a little broader than that of the fifth, and somewhat longer than that of the seventh pair which is shorter than all the following joints together.

The lateral parts of the *pleonl* segments are rounded in front and below, and the under margins are not produced into tooth-like projections; the hind corners are angulated, and sharp-pointed, but not produced.

The last coalesced *ural* segment is much longer than the telson, but not twice as long.

The peduncle of the first and second pairs of *uropoda* is longer than the inner ramus; the peduncle of the third pair is a little shorter than the inner ramus. The outer rami are somewhat shorter than the inner.

The *telson* is tongue-shaped, with the apex sharp-pointed and the margins serrated; it is somewhat shorter than the last pair of uropoda.

Syn.	**1830.**	**Oxycephalus piscatoris,**	H. MILNE EDWARDS.		**1,** p. 396.
	»	**piscator,**	»	1840.	**7,** p. 100, pl. 30, fig. 10.
	»	»	» SPENCE BATE.	1862.	**20,** p. 342, pl. 54, fig. 3.
	»	»	» C. BOVALLIUS.	1887.	**35,** p. 35.
	1836.	»	**oceanicus,** F. E. GUÉRIN-MÉNEVILLE.		**4,** p. 10, pl. 18, fig. 2.
	1878?	»	**bulbosus,** TH. STREETS.		**26,** p. 280, pl. 2, fig. 2.
	1879.	»	**similis,** C. CLAUS.		**27,** p. 193(47).
	»	»	»	1887.	**36,** p. 71, pl. 23, fig. 9.
	1884.	»	**Edwardsii,** G. W. THOMSON.		**31,** p. 238, pl. 12, fig. 14-21, and pl. 12, fig. 1.

The animal, described and figured below is, in my opinion, the true Oxycephalus piscator of H. MILNE EDWARDS; a comparison of the original diagnosis with the following description and drawings will show that all the characteristics given by H. MILNE EDWARDS agree with those of this animal. I am also pretty sure that the *Oxycephalus similis*, CLAUS, is identical with this species, the more so as I have examined many specimens taken at the very same locality, Messina, by my friends Professor HJALMAR THÉEL and D:r A. APPELÖF. And again I am convinced that *Oxycephalus Edwardsii*, G. W. THOMSON, is nothing but the young male of O. piscator. Whether *O. bulbosus*, TH. STREETS, is an

independent species, or identical with O. piscator, is a question, which I am not yet able to answer definitively, but I am much inclined to think that the two are identical, as practically there are no differences to be found in the description of STREETS.

The *head* is somewhat longer and more depressed in the male than in the female, in which the ocular region is tumid and rises considerably above the dorsal line of the peræon, a feature which seems to occur, in a smaller or higher degree, in all the female forms in the family, and which may thus be looked upon as a sexual distinction. In the male the head is as long as the six first peræonal segments together, in the female as long as the first five. The rostrum is scarcely half as long as the rest of the head.

The first pair of *antennæ* in the male are comparatively slender; the first joint of the flagellum is about four times as long as it is broad at the apex; the three following joints together are longer than the breadth of the first flagellar joint.

The *peræon* shows a very feeble median keel dorsally, and an almost evanescent lateral ridge on each side in the fully adult animal, in the younger state the peræon is perfectly smooth.

The *epimerals* are long and deep, fully a third part as deep as the height of the peræon.

The first pair of *peræopoda* (Pl. I, fig. 11) are much shorter than the second; the lower front corner of the carpus is a little protruding, but does not form a distinct heel as in the following species; the carpal process is irregularly serrated, with broad teeth, and bordered by very long, stout bristles; it is somewhat longer than the hind margin of the metacarpus, which forms a thin serrated edge, with short triangular teeth (Pl. I, fig. 12); against the rounded lower corner of this edge the dactylus impinges, so that the first pair really have a complexely cheliform hand (see above, p. 33). The second pair (Pl. I, fig. 13) have a very long cheliform hand, the carpus, without the process, being half as long again as the metacarpus; the front margin of the carpus runs in a line with that of the metacarpus, the lower corner not protruding at all; the carpal process is serrated, bordered with a few short bristles, and is considerably longer than the hind margin of the metacarpus, but does not reach to the apex of the dactylus. The third and fourth pairs are equal in length and slender; along the hind margin of the tibia and carpus there are some short spines. The fifth pair are the longest; the femur is almost ovate, and as long as the three following

joints together. The femur of the sixth pair is irregularly pear-shaped, a fifth part longer than broad, only a little broader than the femur of the fifth pair, and shorter than the four following joints together; the front margin of the tibia is fringed with a row of spines, one longer one and one very short one alternating; the front margin of the carpus has a similar row of spines, one longer one and two very short ones alternating; the front margin of the dactylus is sparingly serrated. The seventh pair (Pl, I, fig. 14), reach to the middle of the carpus of the sixth; the femur is pear-shaped, and somewhat shorter than all the following joints together; the metacarpus is a little longer than the carpus, but shorter than the tibia.

The under margins of the *pleonal* segments are more or less rounded, sometimes uneven, but not produced into tooth-like projections as in *Oxycephalus Clausi.*

The last coalesced *ural* segment is a little more than a third part longer than broad.

The first pair of *uropoda* (p. 39, fig. 75) reach to the apex of the last, and to the apex of the telson; the peduncle is a little longer than the inner ramus, which is a little longer than the outer; both rami are strongly serrated. The second pair reach a little beyond the apex of the peduncle of the first pair, and very little beyond the base of the last pair; the peduncle is somewhat longer than the inner ramus, and twice as long as the outer. The third pair reach scarcely beyond the apex of the telson; the peduncle is as long as the inner ramus, which is a trifle longer than the outer.

The *telson* is only about a sixth part longer than broad, and triangular, the margins being very convex, and serrated.

COLOUR. Yellowish.
LENGTH. 14—20 mm
HAB. The temperate, subtropical, and tropical regions of the Atlantic; the Mediterranean; the Indian Ocean the subtropical and tropical regions of the Pacific.

2. **Oxycephalus Clausi,** C. BOVALLIUS, 1887.

The name is given in honour of Professor C. CLAUS.

Pl. I, fig. 19—24; Pl. II, fig. 1; and p. 21, fig. 4; p. 22, fig. 7 and 8; p. 25, fig. 22; p. 33, fig. 54; p. 36, fig. 65.

Diagn. The *body* is somewhat compressed, the segments of the peræon are scutellated, separated from each others by deep furrows.

The *head* is shorter than the peræon, with a moderately long rostrum, which in the male is abruptly narrowed near the apex, but in the female tapers evenly, and has the apex rounded. The hind part of the head is a little longer than the rostrum.

The front margin of the carpal process of the first two pairs of *peræopoda* is longer than the hind margin of the metacarpus, which is serrated and bordered with strong bristles; the lower front corner of the carpus protrudes a little in the first pair and much in the second, forming a broad heel in front of the metacarpus. The fifth pair are much longer than the sixth. The femur of the sixth pair is almost circular, much broader than that of the fifth, and about as long as that of the seventh pair, which is itself longer than all the following joints together.

The lateral parts of the *pleonal* segments are rounded in front; at the middle of the under margin of each projects a strong, tooth-like process, and the hind corner is produced and sharp-pointed.

The last coalesced *ural* segment is only a little longer than the telson.

The *telson* reaches beyond the apex of the last pair of uropoda.

Syn. **1878. Oxycephalus tuberculatus,** [SPENCE BATE] TH. STREETS. **26,** p 278, pl. 2, fig. 1.

1879. » **piscator,** [H. MILNE EDWARDS] C. CLAUS. **27,** p. 190 (44).

» » » 1887. **36,** p. 69, pl. 22, fig. 1-9, and pl. 23, fig. 1-8.

1887. » **Clausi,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 35.

» » » TH. STEBBING. 1888. **39,** p. 1566, pl. 201.

The species is at once distinguished from its congeners by the raised, almost prismatic dorsal sections of the peræonal segments, by the strongly protruding heel of the carpus of the second pair of peræopoda, by the almost circular femur of the sixth pair, and by the tooth-like, sharp-pointed projections on the under margins of the pleonal segments.

The *head* (p. 22, fig. 7 and 8) is longer in the male than in the female, especially the hind part of it. On the upper side the median line forms a distinct keel, ending in the apex, which is feebly bent downwards. The under margins of the rostrum are serrated. In the male the head is as long as the first six peræonal segments together, in the female as long as the first four.

The first pair of *antennæ* are like those in the preceding species, but the last three joints of the flagellum are not longer than the breadth of the first flagellar joint; the second is quite as long as the third, but much thicker.

The first pair of *peræopoda* (Pl. I, fig. 21) have the carpus very broad, with the lower front corner forming a broad angular heel at the base of the metacarpus; the carpal process is like that in the preceding species, but more strongly serrated and shorter than the hind margin of the metacarpus; the hind margin forms a thin, strongly serrated edge, the lower corner of which is angular. The second pair (p. 33, fig. 54) are much longer and stouter than the first pair; the carpus, without the process, is only a fourth part longer than the metacarpus; the lower front corner forms a broader heel than in the first pair; the carpal process is bluntly serrated, and reaches almost to the apex of the dactylus. The femur of the fifth pair is ovate, coarsely serrated on the front margin, and considerably shorter than the three following joints together. The sixth pair (Pl. I, fig. 23) are much shorter than the fifth; the femur is very broad, almost circular, serrated along the margins, and fully a third part broader than that of the fifth pair; the carpus is a little more than half as long as the tibia, with a row of longer and shorter spines along the front margin, one long one and four short ones alternating; the dactylus is serrated on the front margin. The seventh pair (Pl. I, fig. 24) reach fully to the apex of the carpus of the sixth pair; the femur is about as long as that of the preceding pair, and a little more than half as broad; it is longer than all the following joints together.

The *pleon* in the male is as long as the last six peræonal segments together; in the female it is as long as the last five. The lateral

part of each segment is convex in front of the projecting tooth, and concave behind it, the hind corner is produced, and sharp-pointed.

The last coalesced *ural* segment is about a fourth part longer than broad.

The first pair of *uropoda* (Pl. II, fig. 1) reach fully to the apex of the last pair, but not to the apex of the telson; the peduncle is serrated on both margins, and is a little longer than the inner ramus, which is somewhat longer than the outer, both being serrated. The second pair reach to the middle of the inner ramus of the first pair, and to the apex of the peduncle of the last pair; the peduncle is quite as long as the inner ramus, which is about a third part longer than, and more than twice as broad as, the outer. The third pair are very broad, and shorter than the telson; the peduncle is shorter than the inner ramus, which is twice as broad as, and a little longer than, the outer.

The *telson* is more than a third part longer than broad, triangular, and is serrated along the margins.

COLOUR. Light brownish to yellowish green.
LENGTH. 20—35 mm.
HAB. In all the seas of the subtropical and tropical regions.

3. **Oxycephalus tuberculatus,** SPENCE BATE, 1862.

Pl. II, fig. 2 and 3.

Diagn. The *body* is compressed, the segments of the peræon are tuberculate.

The *head* is shorter than the peræon, and has a long rostrum. The hind part of the head is shorter than the rostrum.

The front margin of the carpal process of the first two pairs of *peræopoda* is nearly as long as the hind margin of the metacarpus, which is smooth, and provided with a few bristles; the lower front corner of the carpus protrudes, forming a heel in front of the metacarpus. The fifth pair are about as long as the sixth. The femur of the sixth pair is broadly ovate, a little broader than that of the fifth pair, and more than twice as long as that of the seventh, which itself is more than twice as long as all the following joints together.

The lateral parts of the *pleonal* segments are rounded in front, below, and behind, and the under margins are without tooth-like projections.

The last coalesced *ural* segment is somewhat shorter than the telson (?).

The *telson* reaches beyond the apex of the last pair of uropoda.

Syn. **1862. Oxycephalus tuberculatus,** SPENCE BATE. **20,** p. 343 pl. 54, fig. 5.
» » » TH. STREETS. 1877. **24,** p. 136.
» » » C. BOVALLIUS. 1887. **35,** p. 36.

In addition to the characteristics quoted in the diagnosis, and which are taken from the description of SPENCE BATE, and with respect to a few particulars from STREETS work of 1877, I cite here some more details from the same authors:

SPENCE BATE says (l. c. p. 343).

»Antepenultimate pair of pleopoda having the rami short, serrated; penultimate not so long as the preceding, having the margins of the rami smooth; ultimate not reaching to the extremity of the telson, rami having the margins serrated. Telson acutely triangular, margins serrated.»

STREETS says(l. c. p. 136).

»Head not quite as long as the first five segments of the thorax, broad, inferior margin broadly convex; rostrum more than half the length of the head, triangular, acute; eyes large, covering the whole of the lateral surfaces of the head. — — — The first pair of gnathopoda shorter than the second, but similar to them in other respects; carpus produced anteriorly nearly to the apex of the propodos, margins furnished with a few long setæ, not serrated; propodos subovate; dactylus nearly half as long as the propodos. The flexible margins of the following thoracic feet furnished with a few setæ, or hairs».

COLOUR. ?

LENGTH. 10 mm. ($^{8}/_{20}$ths of an inch, SPENCE BATE, and 0.40 of an inch, STREETS).

HAB. Cape of Good Hope, (SPENCE BATE); The North Pacific Ocean, Lat. 5° N, Long. 128° W, (STREETS).

4. **Oxycephalus pectinatus,** C. BOVALLIUS, 1887.

Pl. II, fig. 4—6; and p. 25, fig. 19 and 21; and p. 27, fig. 29.

Diagn. The *body* is scarcely compressed, the peræonal segments are smooth.

The *head* is about as long as the peræon, and has a short rostrum. The hind part of the head is more than twice as long as the rostrum.

The front margin of the carpal process of the first pair of *peræopoda* is as long as, that of the second pair longer than, the hind margin of the metacarpus, which is strongly pectinated, with long teeth, and a few long bordering bristles; the lower front corner of the carpus does not protrude. The fifth pair are longer than the sixth. The femur of the sixth pair is pear-shaped, considerably broader than that of the fifth, and only a little longer than that of the seventh pair, which is itself about as long as all the following joints together.

The lateral parts of the first two *pleonal* segments are straight in front and below, while that of the third segment is rounded; the under margins without tooth-like projections. The hind corner of the first segment is rounded, that of the second angular, and that of the third produced, and sharp-pointed.

The last coalesced *ural* segment is much longer than the telson, but not twice as long.

The *telson* reaches to the apex of the last pair of uropoda.

Syn. **1887. Oxycephalus pectinatus,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 36.

Oxycephalus pectinatus is most closely allied to *O. latirostris*, but differs in the length of the head, in the armature of the first two pairs of peræopoda, in the comparatively short seventh pair, and in the telson being more than half as long as the last ural segment.

The *head* (Pl. II, fig. 4) in the male is a little longer than all the peræonal segments together, in the female a little shorter. The rostrum is scarcely more than a third part as long as the rest of the head.

The first pair of *antennæ* (p. 25, fig. 19 and 21) in the male are comparatively robust; the first joint of the flagellum is three times as

long as it is broad at the apex, the three following joints together are a little longer than the breadth of the first flagellar joint. The second pair (p. 27, fig. 29) are longer and more robust than in *Oxycephalus piscator*, or in *O. Clausi*.

The *peræon* is entirely smooth, and the *epimerals* are less deep than in *O. piscator*, scarcely equalling a fourth part of the height of the peræon.

The first pair of *peræopoda* (Pl. II, fig. 5) are shorter than the second; the front margin of the carpus runs in a line with that of the metacarpus; the carpal process is about as long as the stem of the joint, and is armed along its front margin with closely set, long, spine-like teeth, which give a combe-like appearance to the whole; the apex of the process forms a strong, sharp tooth. The metacarpus is stout, and somewhat longer than the stem of the carpus; its hind margin does not form an edge as in *Oxycephalus piscator;* it is as long, and armed in the same way, as the front margin of the carpal process, but the spine-like teeth are a little shorter. The dactylus is about a third part as long as the metacarpus, and has a tooth at the middle of the hind margin. The second pair (Pl. II, fig. 6) have the cheliform hand comparatively much shorter than in *Oxycephalus piscator* or in *O. latirostris*, the carpus, without the process, being scarcely longer than the metacarpus; the front margin runs in a line with the front margin of the metacarpus; the carpal process is longer than the rest of the joint; its front side is armed as in the first pair, but the teeth composing the pectination are much longer; the hind margin of the metacarpus, which is considerably shorter than the carpal process, has exactly the same pectination, and is bordered by four or five long bristles. The dactylus is like that in the first pair. The fifth pair are the longest; the femur is elongate, having the front margin straight and the hind convex; it is more than twice as long as broad, and shorter than the three following joints together. The femur of the sixth pair is a third part longer than broad, and much shorter than the four following joints together, and has the margins smooth; the front margins of the tibia and carpus are armed as in *Oxycephalus piscator;* the front margin of the metacarpus has a similar armature, but with a varying number of short spines between the single long spines; the dactylus is strongly pectinated. The seventh pair reach scarcely to the apex of the tibia of the sixth pair; the upper hind portion of the femur is considerably dilated and forms an obtuse angle; the metacarpus is as long as the carpus, and a trifle shorter than the tibia.

The *pleon* is about as long as the whole peræon. The under margins of the first two segments are straight, that of the third convex, and all are without tooth-like projections.

The last coalesced *ural* segment is about a fourth part longer than broad.

The first pair of *uropoda* reach to the apex of the last pair, and almost to the apex of the telson; the peduncle is considerably longer than the inner ramus, which is as long as the outer, and both are strongly serrated. The second pair do not fully reach to the apex of the last pair; the peduncle is a little longer than the inner ramus, which is a little longer than, and more than twice as broad as, the outer; both are serrated. The third pair are a trifle shorter than the telson; the peduncle is shorter than the rami, which are equal in length, and serrated.

The *telson* is about a third part longer than broad, triangular, the margins being convex and smooth.

COLOUR. Almost hyaline, the ocular pigment dark brown.
LENGTH. 10—16 mm.
HAB. The tropical region of the Atlantic.

5. **Oxycephalus latirostris,** C. CLAUS, 1879.

Pl. II, fig. 7—12; and p. 42, fig. 84.

Diagn. The *body* is compressed, the peræonal segments are smooth.
The *head* is a little shorter than the peræon, and has a short rostrum. The hind part of the head is more than three times as long as the rostrum.
The front margin of the carpal process of the first two pairs of *peræopoda* is longer than the hind margin of the metacarpus, which is pectinated, with comparatively short teeth and a few bordering bristles; the lower front corner of the carpus is not protruding. The fifth pair are much longer than the sixth. The femur of the sixth pair is narrowly pear-shaped, a little broader than that of the fifth, and quite as long as that of the seventh pair, which is itself shorter than all the following joints together.

The lateral parts of the *pleonal* segments are feebly rounded in front, and almost straight below, the under margins being without tooth-like projections; the hind corner of each is angular.

The last coalesced *ural* segment is about twice as long as the telson.

The *telson* is much shorter than the last pair of uropoda.

Syn. **1879. Oxycephalus latirostris,** C. CLAUS. **27,** p. 193(47).
» » » 1887. **36,** p. 71, pl. 24, fig. 1.
» » » C. BOVALLIUS. 1887. **35,** p. 36.

Oxycephalus latirostris agrees in some characteristics with *O. piscator*, as for instance in the length and general form of the cheliform hand in the second pair of peræopoda, and in the form of the urus and its appendages, but the distinguishing characteristics are many. From *O. pectinatus* it is, as I have already said (p. 62), easily distinguished.

The *head* is a little longer than the first six peræonal segments together. The rostrum is less than a third part of the length of the rest of the head.

The *peræon* shows a slight transversal depression on the dorsal side of each segment.

The first pair of *peræopoda* (Pl. II, fig. 9) are shorter than the second; the lower front corner protrudes a little in front of the base of the metacarpus; the carpal process is much shorter than the stem of the joint, but longer than the hind margin of the metacarpus, and is serrated along the front margin, with strong, equal, rounded teeth; it is also serrated along the hind margin. The metacarpus is considerably shorter than the stem of the carpus, and serrated like the carpal process. The dactylus is shorter than a fourth part of the metacarpus, and has a blunt tooth at the hind margin. The second pair (Pl. II, fig. 10) have the cheliform hand much longer than the first, the carpus, without the process, being half as long again as the metacarpus; the hind margin of the carpus and of the process is set with short slender bristles; the carpal process is serrated along the front margin as in the first pair, and reaches almost to the apex of the dactylus. The metacarpus and dactylus are like those in the first pair. The fifth pair are the longest; the femur is elongate-ovate, more than twice as long as broad, and shorter than the three following joints together. The femur of the sixth pair (Pl. II, fig. 11) is narrowly pear-shaped, with the margins smooth, twice

as long as broad, and as long as the three following joints together; the tibia has a row of spines along the front margin, two very short spines and one long one alternating; the front margin of the carpus is armed in the same way, with three short ones and one long one alternating; the serration of the front margin of the metacarpus is more irregular; the dactylus is serrated. The seventh pair reach beyond the apex of the carpus of the sixth pair; the femur is narrow, elongated, and as long as the femur of the sixth pair; the front margin is concave; the metacarpus is somewhat longer than the three preceding joints together.

The *pleon* is about as long as the last six peræonal segments together.

The last coalesced *ural* segment is nearly twice as long as broad.

The first pair of *uropoda* (Pl. II, fig. 12) reach to the apex of the last pair, and beyond the apex of the telson; the peduncle is a little longer than the inner ramus, which is considerably longer than the outer; both are serrated. The second pair reach beyond the apex of the peduncle of the last pair; the peduncle is longer than the inner ramus, which is longer and broader than the outer; both are serrated. The third pair are considerably longer than the telson; the peduncle is shorter than the rami, which are equal in length, and serrated.

The *telson* is about a third part longer than broad, triangular, with the margins very convex, and smooth.

COLOUR. White as ivory.
LENGTH. 16—22 mm.
HAB. The subtropical region of the Atlantic; the Indian Ocean.

Gen. 3. **Tullbergella**, C. BOVALLIUS, 1887.

The name is given in honour of Professor TYCHO TULLBERG of Upsala.

Diagn. The *head* is short and broad, produced into a short, broad sharp-pointed rostrum, which is open on the under side. The hind part of the head is feebly constricted.

The *second* pair of *antennæ* are hidden under the head and the peræon, when folded.

The first two pairs of *peræopoda* are subcheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated. The seventh pair are incomplete.

The last coalesced *ural* segment is longer than the first, and about as long as it is broad.

The inner ramus of the third pair of *uropoda* is coalesced with the corresponding peduncle.

The *telson* is broad and triangular, with the sides more or less curved.

Syn. **1887. Tullbergella,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 38.

Tullbergella is easily distinguished from the other genera of the family by the not compressed, broad, and robust form of body, the short head and rostrum, and the incomplete seventh pair of peræopoda. In the form of the second pair of antennæ it agrees with *Simorhynchotus* and *Cranocephalus*; in the form of the first two pairs of peræopoda it resembles *Cranocephalus* and *Stebbingella*.

Hitherto only one species is known.

1. **Tullbergella cuspidata,** C. BOVALLIUS, 1887.

Pl. II, fig. 13; and p. 20, fig. 1; p. 23, fig. 12; p. 25, fig. 18 and 23; p. 26, fig. 27; p. 29, fig. 40; p. 32, fig. 51; p. 34, fig. 59; p. 35, fig. 61, and p. 38 fig. 74.

Diagn. The *head* is a little longer than the first four peræonal segments together. The rostrum is broad, abruptly narrowed at the apex, and about as long as the hind part of the head, which is much broader than the base of the rostrum.

The free under margin of the carpus of the first two pairs of *peræopoda* is serrated, armed with bristles, and longer than the hind margin of the metacarpus. The lower hind corner of the femur of the sixth pair is produced backwards into a strong, triangular, sharp-pointed process. The femur of the seventh pair is more than half as long as that of the sixth, and more than twice as long as the three following joints together. The epimeral of the fifth pair shows a tuberculous prominence.

The lateral parts of the *pleonal* segments are straight and smooth below; the hind corner of the first two segments is angular, that of the third is strongly produced backwards into a long, triangular, sharp-pointed process, which reaches beyond the hind margin of the first ural segment.

The last coalesced *ural* segment is about as long as the telson. The *telson* is rounded at the apex, and reaches quite to the apex of the last pair of uropoda.

Syn. **1887. Tullbergella cuspidata,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 38.

Tullbergella cuspidata is probably the stoutest and most robust of all the Oxycephalids. The integument of the body is thicker and harder than in the other representatives of the family, *Stebbingella Théeli* perhaps excepted. The form of the rostrum shows, as mentioned above, some tendency towards the »wing-like projections» so enormously developed in the genus *Calamorhynchus*.

The *head* (p. 20, fig. 1 and p. 23, fig. 12) is somewhat longer than the first four peræonal segments together, and is scarcely longer in the male than in the female. The ocular region forms on each side a large hemispherical intumescence, which stands out globularly from the surface of the head. The hindest portion of the head shows a feeble constriction, but does not form a neck. The rostrum is very broad at the base, with almost parallel, and somewhat bulging sides for about half its length; the distal half of the rostrum is triangular with the apex sharp-pointed. This shape of rostrum forms a transition from that in *Oxycephalus* to the extremely dilated rostral portion of the head in *Calamorhynchus*.

The *eyes* (p. 23, fig. 12) are separated from one another by a comparatively broad strip at the crown of the head.

The first pair of *antennæ* in the male (p. 25, fig. 18) are very thick and robust; the first joint of the flagellum is scarcely more than a third longer than it is broad at the base; the three following joints together are much shorter than the breadth of the first joint; the second flagellar joint is much thicker than, and about twice as long as, the third; the fourth is slender, and nearly as long as the second. In the female the first pair (fig. 23) are more curved than in the preceding genus; the flagellum consists of three joints; the first is twice as broad at the base as at the apex, and a little shorter than the two following joints together. The second pair in the male (p. 26, fig. 27) have the first joint shorter than half the second, the third a trifle longer than the second, the fourth considerably shorter than the third, and the last or fifth joint very short, scarcely equalling one-twentieth of the length of the fourth. All the joints are closely fringed with short hairs along the under margins.

The *peræonal* segments are somewhat convex transversely; the surface is slightly rugose, being thickly set with small nobs or tubercles (p. 26, fig. 27).

The first pair of *peræopoda* (p. 32, fig. 51) are a little shorter than the second; the femur is linear, and narrow; the carpus is nearly square, somewhat narrowed at the base, and not produced; the under free margin is finely serrated, bordered with short bristles, and is a little longer than the hind margin of the metacarpus, which forms a thin serrated edge, with simple teeth; the dactylus is smooth, and not fully half as long as the metacarpus. The second pair (Pl. II, fig. 13) are similar to the first in shape, but the serration on the hind margin of the metacarpus consists of larger, finely denticulated teeth. The third and fourth pairs are comparatively slender, and much shorter than the fifth pair; the femur is narrow, linear, and not broader than the following joints The fifth pair have the femur fully as broad as that of the sixth, almost ovate, with the lower front corner a little produced; it is consideraby shorter than the three following joints together. The sixth pair (p. 35, fig. 61) are much shorter than the fifth; the lower hind corner of the femur is produced into a broad, triangular, sharp-pointed process, which is a little more than half as long as the breadth of the femur; the femur is about as long as the three following joints together. The seventh pair are incomplete, consisting of only the femur, genu, tibia, and carpus; all the joints are provided with glands; the femur is fully as broad as, and about a third part shorter than, that of the sixth pair; it is more than twice as long as all the following joints together.

The *pleon* is about as long as the last six peræonal segments together. The lateral, sharp-pointed process of the last pleonal segment (p. 38, fig. 74) does not reach fully to the middle of the last coalesced ural segment.

The first *ural* segment is more than half as long as the last coalesced, which is about a fourth part broader than long, and a little longer than the telson.

The first pair of *uropoda* (p. 38, fig. 74) reach fully to the apex of the last pair, and a little beyond the apex of the telson; the peduncle is shorter than the inner ramus, which is a trifle shorter than the outer, both being elongate-lanceolate, sharp-pointed, and serrated. The second pair do not fully reach to the apex of the last pair; the peduncle is shorter than the rami, which are equal in

length, and serrated; the inner ramus is broader than the outer. The third pair reach fully to the apex of the telson; the peduncle is half as long as the inner ramus, which is more than twice as broad as, and a little longer than, the outer.

The *telson* is triangular, with curved margins, and is a little longer than it is broad at the base.

COLOUR. Brownish, with dark red spots.
LENGTH. 9—13 mm.
HAB. The Indian Ocean.

Gen. 4. Calamorhynchus, TH. STREETS, 1878.

Diagn. The *head* is long and broad, produced into a long, broadly dilated and sharp-pointed rostrum, which is open on the under side. The hind part of the head is constricted, forming a short neck.

The second pair of *antennæ* are hidden under the head, when folded (?).

The first two pairs of *peræopoda* are subcheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.

The last coalesced *ural* segment is nearly three times as long as the first, and nearly four times as long as it is broad.

The inner ramus of the third pair of *uropoda* is coalesced with the corresponding peduncle.

The *telson* is elongated, and narrowly triangular.

Syn. **1878. Calamorhynchus,** TH. STREETS. **26,** p. 285.
» » TH. STEBBING. 1888. **39,** p. 1599.

This genus is at the first view easily distinguished from all the other genera by the peculiar form of the head, with its wing-like expansions of the rostrum; in this characteristic *Tullbergella* comes nearest to it, but is very different from it in almost all other points.

Beside the typical species, Calamorhynchus pellucidus, described in 1878 by STREETS, another, C. rigidus, is given by STEBBING

in his Report on the »Challenger» Amphipoda. The two species are distinguished from one another by the length of the seventh pair of peræopoda, and by that of the uropoda.

A. The seventh pair of peræopoda are scarcely longer than the femur of the sixth. 1. **C. pellucidus.**

B. The seventh pair of peræopoda are nearly as long as the whole sixth pair. 2. **C. rigidus.**

1. **Calamorhynchus pellucidus,** TH. STREETS, 1878.

Pl. II, fig. 14 and 15.

Diagn. The *head* is much longer than the whole peræon; the rostrum is shorter than the ocular region of the head.

The second pair of *peræopoda* are nearly cheliform, with the front margin of the carpal process as long as the hind margin of the metacarpus. The femur of the last three pairs is lanceolate; the seventh pair are scarcely longer than the femur of the sixth pair.

The first pair of *uropoda* reach to the apex of the second, but de not attain the apex of the last pair, which are a little shorter than the telson.

Syn. **1878. Calamorhynchus pellucidus,** TH. STREETS. **26,** p. 285, pl. 2, fig. 5.

From the original description of STREETS I add the following details:

»Head long, nearly one-third of the total length, its breadth twice that of the thorax; neck short, and slightly narrower than the thorax; the portion containing the eyes oblong, convex above and below when viewed in profile, elevated above, in the median line, into a sharp ridge, which terminates at the apex of the rostrum, below the eyes form two long and rounded lobes separated by a broad, shallow groove; rostrum flattened, posteriorly broader than the eyes, commencing an either side of the eyes in a broad, rounded wing-like expansion, and tapering forward to a long and acute apex. — — — Segments of the thorax subequal. — — — The anterior three abdominal segments subequal, the postero-

inferior angle acute, projecting. The sixth segment long and narrow, slightly longer than the peduncle of the first pair of caudal appendages. — — — Telson narrow, acute at apex.»

COLOUR. Pellucid.
LENGTH. »12 mm.» (STREETS).
HAB. The Pacific, Lat. 28° 6′ N, Long. 140′ 12′ W. One specimen a female (STREETS).

2. **Calamorhynchus rigidus,** TH. STEBBING, 1888.

Diagn. The *head* is much longer than the whole peræon, as long as the peræon and the first two pleonal segments together; the rostrum is fully as long as the ocular region of the head.

The lower hind corner of the carpus of the second pair of *peræopoda* is less produced than in the preceding species. The femur of the last three pairs is more or less pear-shaped; the seventh pair are nearly as long as the whole sixth.

The first pair of *uropoda* reach far beyond the apex of the second, and to the apex of the last pair, which are much shorter than the telson.

Syn. **1888. Calamorhynchus rigidus,** TH. STEBBING. **39,** p. 1600, pl. 206.

Apart from the characteristics recorded in the diagnosis respecting the seventh pair of peræopoda and the relation of the uropoda, the differences between the two species seem to be very small, or at least are not easily appreciated owing to the vague description given by STREETS of his species, and to the want of drawings. The characteristics recorded above are however sufficient for the distinction of the two species.

For particulars on Calamorhynchus rigidus I refer the reader to the original description and drawings given by STEBBING.

COLOUR. ?
LENGTH. 23 mm. (nine-tenths of an inch, STEBBING).
HAB. The South Atlantic. Lat. 37° 45′ S, Long. 33° 0′ W. »One specimen, female, with young in the pouch» (STEBBING).

Gen. 5. **Dorycephalus**, n. g.

Derivatio: *δόρυ* = a spear, and *κέφαλος* = a large-headed fish, see ARISTOTELES.

Diagn. The *head* is long and narrow, produced into a comparatively short, narrow, sharp-pointed rostrum, which is closed on the under side. The hind part of the head is constricted, forming a short, cylindrical neck.

The second pair of *antennæ* are hidden under the head, when folded.

The first two pairs of *peræopoda* are subcheliform, or the second are cheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.

The last coalesced *ural* segment is a little more than twice as long as the first, and somewhat more than three times as long as broad.

The inner ramus of the third pair of *uropoda* is coalesced with the corresponding peduncle.

The *telson* is narrowly triangular.

This new genus closely resembles *Leptocotis* in general form of body, but differs in the comparatively shorter and broader last ural segment and uropoda, and by the inner ramus of the last pair of uropoda being coalesced with the peduncle. The type for the genus is *Leptocotis Lindstroemi*, briefly described by me in 1887 (**35**, p. 38). The new species *Leptocotis ambobus*, proposed by STEBBING in 1888 (**39**, p. 1594) certainly belongs to this genus, and at my first comparison of STEBBING's species with my own I supposed them to be identical, but after a close re-examination of my specimens I must allow that there are some small differences, which can scarcely be explained as individual variations; but on the other hand both are easily distinguished from *Leptocotis tenuirostris*, CLAUS, and *L. spinigera*, STREETS, by the form of the urus and its appendages. Such being the case I record them here as two distinct species.

A. The second pair of peræopoda are subcheliform. The femur of the seventh pair is half as long as that of the sixth. 1. **D. Lindstroemi.**

B. The second pair of peræopoda are cheliform. The femur of the seventh pair is not half as long as that of the sixth. 2. **D. ambobus.**

1. **Dorycephalus Lindstroemi,** C. BOVALLIUS, 1887.

The name is given in honour of Professor GUSTAF LINDSTRÖM of Stockholm.

Pl. II, fig. 16—18; Pl. III, fig, 1; and p. 27, fig. **31**; p. 29, fig. **39** and **44**; p. 33, fig. **56**; p. 38, fig. **73**, and p. 39, fig. **77**.

Diagn. The *head* is about as long as the whole peræon and the first pleonal segment together.

The first pair of *peræopoda* are subcheliform; the under free margin of the carpus is as long as the hind margin of the metacarpus; the lower part of the hind margin of the carpus is provided with seven or eight teeth, some of them double-pointed. The second pair are subcheliform, with the lower hind corner of the carpus a little produced; the carpal process is strongly serrated on the front margin, and provided with three long sharp teeth on the hind margin just above the apex; the front margin of the carpal process is quite as long as the hind margin of the metacarpus. The femur of the seventh pair is fully half as long as that of the sixth, a little longer than broad, and twice as long as all the following joints together.

The lateral parts of the first two *pleonal* segments are angular behind; the hind corner of the third segment is produced into a triangular, sharp-pointed process, reaching beyond the middle of the first ural segment.

The inner ramus of the second pair of *uropoda* is only a trifle longer than the outer; the inner ramus of the third pair is twice as long as the peduncle, and more than twice as long as the outer ramus.

Syn. **1887. Leptocotis Lindstroemi,** C. BOVALLIUS. **35**, p. 38.

If the above diagnosis be compared with that of *Dorycephalus ambobus*, which follows, it at once will be seen that only small and trifling characteristics can be given for the distinction of the two species, and I am much inclined to think that the latter ought to be considered as a Pacific variety of the former. The closer discription of D. Lindstroemi will support the view that the two species are very nearly allied; but as I have myself examined specimens of *D. ambobus*, and as all the characteristics indicated by STEBBING are exactly the same as in my speci-

mens, I have not ventured to unite the two species under one name, though I was at first much disposed to do so.

The *body* is more compressed and slender than in the genus *Oxycephalus*, the thin integument shows, especially on the peræon, small pits and excavations, round, or oblong, or S-shaped, probably occupied by cutaneous glands.

The rostrum is considerably longer than a third part of the length of the whole *head*. The ocular region is more evenly egg-shaped in the female than in the male.

The first pair of *antennæ* in the male have the lower front corner of the first flagellar joint produced into a narrowly conical process, which is as long as the breadth of the joint. The last three flagellar joints together are scarcely as long as a third part of the under margin of the first joint; the second joint is as long as the third, the fourth is a little longer than the first, and is very slender. The second pair in the male have the first three joints almost equal in length; the fourth is a little shorter than the third, but is twenty-four times as long as the fifth or last joint (p. 27, fig. 31).

The first pair of *peræopoda* (p. 33, fig. 56) have the femur nearly as long as the four following joints together; the lower margin of the tibia is finely serrated; the carpus is only a little produced, with the under margin sparingly serrated; the front margin of the metacarpus is strongly convex, the hind margin is straight forming an edge, which is serrated only at the lower corner, with six or seven spine-like teeth; the dactylus is short, curved, with a small tooth on the hind margin, and is a third part as long as the metacarpus. The second pair (Pl. II, fig. 17) have the carpus more produced than in the first pair, but still the carpal process is not half as long as the stem of the joint, and the prehensile organ, formed by the carpus and metacarpus, must be termed a subcheliform hand; the metacarpus is considerably shorter than the stem of the carpus; its hind margin is provided with four shallow notches rather than serrated, and has five or six spine-like teeth at the lower corner. The third and fourth pairs are very slender, the metacarpus of both pairs is a trifle shorter than the tibia. The fifth pair have the femur quite as long as the three following joints together; the apex is outdrawn behind the genu almost to the apex of that joint; the tibia is much longer than the metacarpus, which is twice as long as the dactylus. The sixth pair have the femur fully as long as, and

considerably broader than, that in the preceding pair, and almost as long as the four following joints together; the upper hind corner is much dilated, and the apex is produced behind the genu, forming a broadly rounded process which reaches to the apex of the genu; the tibia is nearly as long as the three following joints together; the front margin is fringed with a row of equal, long, spine-like teeth; the front margin of the metacarpus shows longer and shorter hair-like bristles, not disposed in regular, come-like groups as in *Dorycephalus ambobus;* the dactylus is a third part as long as the metacarpus. The seventh pair (Pl. II, fig. 18) are a fourth part shorter than the femur of the sixth; the carpus is somewhat longer than the metacarpus; the dactylus is not fully half as long as the metacarpus.

The *pleon* in the male is a little shorter than the last six peræonal segments together; in the female it is a little shorter than the last five.

The first pair of *uropoda* (p. 38, fig. 73) reach to the apex of the last pair, but do not attain the apex of the telson; the peduncle is about nine times as long as broad, a little more than twice as long as the outer ramus, and quite as long as the last coalesced ural segment; it is finely pectinated along the inner margin, and coarsely serrated along the lower half of the outer; the outer ramus is elongated, sharp-pointed, more than four times as long as the inner, coarsely serrated along the outer margin, and finely pectinated along the inner; the inner ramus (p. 39, fig. 77) is lanceolate, serrated along both margins. The second pair reach to the middle of the inner ramus of the last pair; the peduncle is about seven times as long as broad, more than twice as long as the inner ramus, and armed on the margins as that of the first pair; both rami are elongated and sharp-pointed; the inner is serrated on both margins, the outer ramus is serrated on the inner margin and smooth on the outer. The third pair do not reach to the apex of the telson; the peduncle is half as long as the inner ramus, which is strongly serrated along the inner margin and almost smooth on the outer; the outer ramus is shorter than the peduncle, almost styliform, serrated on the inner margin and smooth on the outer.

The *telson* is elongate-triangular, sharp-pointed, nearly half as long as the last coalesced ural segment, and about three times as long as it is broad at the base.

COLOUR. White, almost hyaline, sprinkled with red.
LENGTH. 10—13 mm.
HAB. The subtropical region of the Atlantic.

2. **Dorycephalus ambobus,** Th. Stebbing, 1888.

Diagn. The *head* is about as long as the whole peræon and the first two pleonal segments together.

The first pair of *peræopoda* are subcheliform; the under free margin of the carpus is longer than the hind margin of the metacarpus; the lower part of the hind margin of the carpus is provided with a dozen sharp, simple teeth. The second pair are cheliform, with the carpus strongly produced; the carpal process is strongly serrated on the front margin, and provided with six or eight sharp teeth on the hind margin just above the apex; the front margin of the carpal process is longer than the hind margin of the metacarpus. The femur of the seventh pair is not half as long as that of the sixth, as long as broad, and half as long again as all the following joints together.

The lateral parts of the first two *pleonal* segments are angular behind; the hind corner of the third segment is produced into a sharp-pointed process.

The inner ramus of the second pair of *uropoda* is a fourth part longer than the outer; the inner ramus of the third pair is three times as long as the peduncle, and twice as long as the outer ramus.

Syn. **1888. Leptocotis ambobus.** Th. Stebbing. **39,** p. 1594, pl. 205.

For a full account of Dorycephalus ambobus I refer the reader to the description and drawings given by Stebbing.

Colour. Almost hyaline, the ocular pigment dark brown.

Length. 11—14 mm; (eleven-twentieths of an inch, Stebbing).

Hab. The tropical region of the Pacific; New Caledonia; »South Pacific, Lat. 36° 32′ S; Long. 132° 52′ W.» (Stebbing).

Gen. 6. Streetsia, TH. STEBBING, 1888.

The name was given by STEBBING in honour of D:r TH. H. STREETS, of the United States' Navy.

Diagn. The *head* is very long, narrow, produced into a long, evenly tapering, sharp-pointed rostrum, which is open on the under side. The hind part of the head is more or less constricted, but does not form a neck.

The second pair of *antennæ* are hidden under the head, when folded.

The first pair of *peræopoda* are subcheliform; the second are more or less cheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.

The last coalesced *ural* segment is not twice as long as the first, and more or less elongated.

The inner rami of all the three pairs of *uropoda* are free, not coalesced with the corresponding, peduncles.

The *telson* is triangular, sharp-pointed, and more or less elongated.

Syn. **1888. Streetsia,** TH. STEBBING. **39,** p. 1603.

The original generic diagnosis of STEBBING contains some characteristics which, in my opinion, have only specific value, as for instance those respecting the last five pairs of peræopoda and the length of the telson. The diagnosis runs:

»*Head* not constricted at the base, much longer than the peræon, the rostrum very elongate and the eyes still more so.

The *Gnathopods* complexy subchelate. *The second Peræopods* longer than the *First. The Fourth Peræopods* with the hinder apex of the first joint acutely produced. *The Fifth Peræopods* with dilated first joint exceeding in length the other five joints together; the outstretched limb exceeding in length the first joint of the fourth pair.

The Uropods with the rami distinct from the peduncles; the *Third Uropods* with peduncles much longer than broad.

The Telson produced far beyond the uropods, much longer than the coalesced fifth and sixth segments of the pleon.«

According to my views on the systematization of the Oxycephalids *Oxycephalus porcellus*, CLAUS, *O. longiceps*, CLAUS, *O. pronoïdes*, C. BOVALLIUS, *O. Steenstrupi*, C. BOVALLIUS, and a new species, here to be

described, must be placed in this genus; I am myself inclined to consider *Leptocotis mindanaonis*, STEBBING, really to be a Streetsia, but following the rule of not uniting an already established genus or species with another without full evidence, I shall for the present content myself with giving a diagnosis for distinguishing it from the species of Streetsia.

Beside the typical species Streetsia Challengeri the following species are to be recorded here, viz: S. porcellus, CLAUS, S. longiceps, CLAUS, S. pronoïdes, C. BOVALLIUS, S. Steenstrupi, C. BOVALLIUS, and S. carinata, n. sp. They are to be distinguished as shows the following synoptical table:

A. The last ural segment is shorter than the telson.

a 1. The lower hind corner of the femur of the sixth pair of peræopoda is produced into a long, sharp-pointed process. — 1. **S. Challengeri.**

a 2. The lower hind corner of the femur of the sixth pair of peræopoda is produced into a short, rounded process. — 2. **S. porcellus.**

B. The last ural segment is about as long as the telson.

b 1. The under margin of the carpus, and the hind margin of the metacarpus of the first pair of peræopoda are serrated.

bb 1. The dactylus of the first and second pairs of peræopoda is much shorter than half the metacarpus. The femur of the seventh pair is longer than all the following joints together. — 3. **S. pronoïdes.**

bb 2. The dactylus of the first and second pairs of peræopoda is longer than half the metacarpus. The femur of the seventh pair is much shorter than all the following joints together. — 4. **S. carinata.**

b 2. The under margin of the carpus, and the hind margin of the metacarpus of the first pair of peræopoda are smooth. The dactylus of the first pair is not half as long, that of the second pair is half as long, as the metacarpus. The femur of the seventh pair is a little longer than all the following joints together. — 5. **S. Steenstrupi.**

C. The last ural segment is longer than the telson. The under margin of the carpus, and the hind margin of the metacarpus of the first pair of peræopoda are smooth. The dactylus of the first two pairs is not half as long as the metacarpus. The femur of the seventh pair is as long as all the following joints together. 6. **S. longiceps.**

1. Streetsia Challengeri, TH. STEBBING, 1888.

Diagn. The *head* is nearly as long as the peræon and pleon together; the rostrum is considerably more than half as long as the rest of the head.

The *peræon* is dorsally rounded.

The under margin of the carpus of the first two pairs of *peræopoda* is serrated, with the hind corner projecting into a long, sharp tooth; the hind margin of the metacarpus is serrated and fully as long as the under margin of the carpus; the dactylus is more than half as long as the metacarpus. The fourth pair are much longer than the third. The lower hind corner of the femur of the sixth pair is produced downwards into a very long, sharp-pointed process reaching considerably below the apex of the genu. The femur of the seventh pair is much more than half as long as that of the sixth, and is a little longer than all the following joints together.

The *pleon* is dorsally carinated, with the lateral parts of the last two segments acutely produced behind.

The last coalesced *ural* segment is not twice as long as broad, and only half as long as the telson.

The peduncle of the first pair of *peræopoda* is quite as long as the last coalesced ural segment, and a little longer than the inner ramus.

The *telson* is about four and a half times as long as broad, and is carinated.

Syn. **1888. Streetsia Challengeri,** TH. STEBBING, **39,** p. 1603, pl. 207.

For further details I refer the reader to the work of STEBBING.

COLOUR?
LENGTH. »A little over an inch» (STEBBING).
HAB. The North Pacific; Lat. 35° 35′ N, Long 150° 50′ E. One specimen, a female (STEBBING).

2. **Streetsia porcellus,** C. CLAUS, 1879.

Pl. IV, fig. 4—6.

Diagn. The *head* is about as long as the whole peræon; the rostrum is considerably more than half as long as the rest of the head.

The *peræon* is dorsally rounded.

The under margin of the carpus of the first pair of *perœopoda* is rounded, without projecting corner, strongly denticulated, with comparatively few, but very long and sharp, spine-like teeth; the hind margin of the metacarpus is sparingly serrated; the dactylus is longer than two-thirds of the metacarpus. The under margin of the carpus of the second pair is finely serrated, with the hind corner a little produced and sharp-pointed; the hind margin of the metacarpus is serrated, and considerably shorter than the under margin of the carpus; the dactylus is longer than two-thirds of the metacarpus. The fourth pair are not longer than the third. The lower hind corner of the femur of the sixth pair is produced downwards into a short rounded process. The femur of the seventh pair is about half as long as that of the sixth (?), and somewhat longer than all the following joints together.

The *pleon* is not carinated; the lateral parts of all the segments are somewhat produced behind, and sharp-pointed.

The last coalesced *ural* segment is about as long as broad, and somewhat more than a fourth part shorter than the telson.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is longer than the last coalesced ural segment, and longer than the inner ramus.

The *telson* is not twice as long as broad.

Syn. **1879. Oxycephalus porcellus,** C. CLAUS. **27,** p. 194 (48).
» » » 1887. **36,** p. 71, pl. 24. fig. 7—9.
» » (Spec. A) » TH. STEBBING. 1888. **39,** p. 1587, pl. 203.

Streetsia porcellus differs from all its congeners in the broad urus and in the form of the second pair of peræopoda, and especially in the fine serration on the under margin of the carpus of that pair. I am pretty sure that *Oxycephalus porcellus, Specimen B,* described and figured by STEBBING

(l. c. p. 1589, pl. 204 A) is not identical with the present species, though it seems to belong to the genus Streetsia. In the form of the urus and of the first two pairs of peræopoda it comes near to *Streetsia carinata*.

The short original description, of the species, given by CLAUS in 1879, and repeated in 1887, runs:

»Körper ziemlich gedrungen, mit glattem, starkem Integument, circa 8 mm. lang. Schnabel mässig lang, und shnauzenförmig. Beine minder gestreckt, mit langen Krallen bewaffnet. Die Greifhände der beiden vorderen Paare kurz und gedrungen. Letztes Beinpaar mit sehr schmächtiger Platte, dünn und gestreckt. Die vorderen stark gezackt, die hinteren feingezähnelt. Abdomen sehr kräftig, glattrandig. Das Caudaldoppelsegment kurz, merklich kürzer als die Schwanzplatte.«

STEBBING gives in his Report of the »Challenger» Amphiopoda an exhaustive description and good drawings of Oxycephalus porcellus, *Specimen A*, which most probably is identical with CLAUS' O. porcellus.

COLOUR. ?
LENGTH. »8 mm.» (CLAUS), »a little over half an inch», (STEBBING)
HAB. The Indian Ocean, Zanzibar (CLAUS); The South Pacific, »between Api and Cape York, surface» (STEBBING).

3. **Streetsia pronoïdes**, C. BOVALLIUS, 1887.

Pl. III, fig. 7—12; and p. 23, fig. **9**; p. 35, fig. **62**.

Diagn. The *head* is as long as the peræon and half the first pleonal segment; the rostrum is fully as long as the rest of the head.

The *peræon* is dorsally rounded.

The under margin of the carpus of the first pair of *peræopoda* is straight, with the hind corner obtusely rounded, not projecting, and is serrated, with short, broad teeth; the hind margin of the metacarpus is feebly serrated, and is fully as long as the under margin of the carpus; the dactylus is about a fifth part as long as the metacarpus. The under margin of the carpus of the second pair is provided with a few short, broad teeth, and has the hind corner very little produced, and sharp-pointed; the hind margin of the metacarpus is armed with a few short, spine-like teeth along its lower half, and is somewhat longer than the under margin of the

carpus; the dactylus as in the first pair. The fourth pair are not longer than the third. The lower hind corner of the femur of the sixth pair is produced downwards into a rounded process, which reaches beyond the apex of the genu. The femur of the seventh pair is more than half as long as that of the sixth, and is longer than all the following joints together.

The *pleon* is not carinated; the lateral parts of the segments are angular behind.

The last coalesced *ural* segment is nearly twice as long as broad at the base, and is quite as long as the telson.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is quite as long as the last coalesced ural segment, and is considerably longer than the inner ramus.

The *telson* is elongate-triangular, and is about three times as long as it is broad as the base.

Syn. **1887. Oxycephalus pronoïdes,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 37.

Streetsia pronoïdes is distinguished from its congeners by the very short dactylus of the first two pairs of peræopoda, and by the ovate, not posteriorly dilated femur of the seventh pair.

The *body* is comparatively high and compressed, but not carinated.

The hind part of the *head* is not constricted; the rostrum seen from above (p. 23, fig. 9) is narrowly triangular, evenly tapering from the base towards the apex.

The *peræon* is comparatively long with high and large *epimerals.*

The first pair of *peræopoda* (Pl. III, fig. 8) have the carpus longer than broad; the hind margin is fringed with five or six long bristles; the lower corner is obtusely rounded, and shows no teeth on the hind margin, but has six short and broad triangular teeth on the under margin, the outermost of which is the broadest and is obtusely rounded at the apex; both sides of the lower hind corner of the joint are set with a large number of long stout bristles; the metacarpus is very broad, scarcely more than a third part longer than broad; the front side is strongly convex, and fringed with long bristles; the hind margin forms a thin edge, bluntly serrated, and bordered by short bristles; the short dactylus is smooth on the hind margin. The second pair (Pl. III, fig. 9) have the hind margin of the carpus fringed with bristles, as in the first

pair; the feebly produced lower corner is set with bristles on the sides, the apical tooth is short and broad, but sharp-pointed; the metacarpus is more slender than in the first pair, but armed in the same way. The fifth pair are much longer than the sixth; the femur is more than twice as long as broad, and considerably longer than the three following joints together. The sixth pair (Pl. III, fig. 10) have the femur irregularly pear-shaped, and longer than all the following joints together; the genu articulates subapically with the femur as in all the species of Streetsia, which I have examined, and is fixed on the inner side of the femur so that the last five joints of the leg are entirely concealed under the femur when folded up. For this reason the name pronoïdes has been applied to the species, but this feature is not confined to this species but common to all the species of Streetsia, as just mentioned. The front margin of the tibia is pectinated with longer and shorter teeth, one long one and two short ones alternating; the lower front and hind corners are produced. The seventh pair (Pl. III, fig. 11) are quite as long as the femur of the sixth; the femur is ovate, not fully twice as long as broad, and distinctly longer than all the following joints together.

The *pleon* is somewhat shorter than the first six peræonal segments together. The hind corner of the third segment is not produced but is angular.

The first pair of *uropoda* (Pl. III, fig. 12) reach about to the apex of the last pair; the peduncle is linear, and is about five times as long as broad; the rami are elongate-lanceolate; the inner is serrated on both margins, and is only a little longer than the outer, which is serrated on the inner margin and smooth on the outer. The second pair reach a little beyond the apex of the peduncle of the last pair; the peduncle is shorter than the inner ramus, which is broader, and considerably longer, than the outer, both are serrated as in the first pair. The third pair reach as far as two-thirds of the length of the telson; the peduncle is considerably shorter than the inner ramus, and quite as long as the outer, which is much narrower than the inner ramus; both are serrated as in the first pair.

The *telson* has the margins smooth, and only feebly curved.

COLOUR. Whitish.
LENGTH. 8 mm.
HAB. The tropical region of the Atlantic, the Caribbean Sea.

4. **Streetsia carinata**, n. sp.

Pl. III, fig. 13—15, Pl. IV, fig. 1 and 2; and p. 34, fig. 58.

Diagn. The head is as long as the peræon and the first pleonal segment together; the rostrum is not fully as long as the rest of the head.

The *peræon* is dorsally carinated.

The under margin of the carpus of the first pair of *peræopoda* is strongly serrated, with short, broad teeth, and has the hind corner projecting into a long sharp tooth; the hind margin of the metacarpus is smooth, and is longer than the under margin of the carpus; the dactylus is more than half as long as the metacarpus. The second pair are almost cheliform, with the front margin of the carpal process smooth and ending into a broad sharp tooth; the hind margin of the metacarpus is armed with a few short, broad teeth, and is about as long as the front margin of the carpal process with the apical tooth; the dactylus is more than half as long as the metacarpus. The fourth pair are a little longer than the third. The lower hind corner of the femur of the sixth pair is produced downwards into a long rounded process, which reaches far beyond the apex of the genu. The femur of the seventh pair is not half as long as that of the sixth, and is much shorter than all the following joints together.

The *pleon* is dorsally carinated; the lateral parts of the segments are rounded behind.

The last coalesced *ural* segment is about a third part longer than broad, and is quite as long as the telson.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is shorter than the last coalesced ural segment, and is as long as the inner ramus.

The *telson* is lanceolate, and is about three times as long as broad.

Streetsia carinata is easily distinguished from the other species by the peræon and pleon being dorsally carinated, and the femur of the seventh pair of peræopoda considerably much shorter than all the following joints together.

The hind part of the *head* is not constricted; the rostrum seen from above (Pl. IV, fig. 2) is elongate-lanceolate.

The *epimerals* are not as high as in the preceding species.

The first pair of *peræopoda* (Pl. III, fig. 13) have the carpus longer than broad, with the under margin somewhat convex; the hind margin has a single bristle; the lower corner projects into a strong, narrow tooth, and shows five or six sharp broad teeth on the hind margin above the apical tooth; the two undermost teeth are much longer than the others; the under margin shows four broad, triangular teeth in front of the large apical tooth; the metacarpus has the same form as in the preceding species, but is nearly twice as long as broad; the dactylus is curved, and armed with a small tooth on the hind margin a little below the middle. The second pair (Pl. III, fig. 14) have the carpus produced so as to form with the metacarpus an almost cheliform hand, though it is really only a subcheliform hand, because the metacarpus does not impinge upon the apex of the carpal process but passes across the inside of it, the edge of the metacarpus and the sharp front margin of the carpal process meeting one another like the blades of a pair of scissors; the dactylus is like that in the first pair. The fifth pair are much longer than the sixth; the femur is twice as long as broad, and quite as long as the three following joints together. The sixth pair have the femur a little shorter than all the following joints together. The seventh pair (p. 34, fig. 58) are about as long as the femur of the sixth; the femur is almost triangular, with the margins feebly convex, and is not fully twice as long as it is broad at the base; it is scarcely longer than the three following joints together.

The *pleon* is as long as the first five peræonal segments together. The hind corner of the third segment is produced backwards, and is broadly rounded.

The first pair of *uropoda* (Pl. III, fig. 15) reach a little beyond the middle of the inner ramus of the last pair; the peduncle is linear, and about five times as long as broad; the inner ramus is elongate-lanceolate, serrated on both margins, with spine-like teeth, and is considerably longer than the outer ramus, which is elongated, somewhat curved, smooth on the outer margin, and serrated on the inner. The second pair reach to the middle of the inner ramus of the last pair; the peduncle is as long as the inner ramus, which is broader, and much longer, than the outer; both rami are serrated as in the first pair. The third pair reach as far as five-sixths of the length of the telson; the peduncle

is considerably shorter than the inner ramus, and a little shorter than the outer; the inner ramus is lanceolate, sparingly serrated on both margins, with spine-like teeth, and is more than three times as broad as the outer ramus; the outer ramus is almost styliform, and is two-thirds as long the inner; it is smooth on the outer margin, and serrated on the inner.

The *telson* has the margins smooth and tolerably convex.

COLOUR. Yellowish, with the eyes dark brown.
LENGTH. 10 mm.
HAB. The tropical region of the Pacific, the Bay of Panamá.

5. Streetsia Steenstrupi, C. BOVALLIUS, 1887.

Pl. III, fig. 2—6; and p. 25, fig. **20**; p. 29, fig. **38**; p. 32, fig. **52**; p. 33, fig. **55**.

Diagn. The *head* is a little longer than the whole peræon, the rostrum is scarcely more than a third part as long as the rest of the head.

The *peræon* is dorsally rounded.

The under margin of the carpus of the first pair of *peræopoda* is entirely smooth, with the hind corner projecting into a short, broadly triangular process; the hind margin of the metacarpus is smooth, and is somewhat longer than the under margin of the carpus; the dactylus is scarcely a third as long as the metacarpus. The second pair are almost cheliform; the front margin of the carpal process is nearly straight and entirely smooth; the hind margin of the metacarpus is smooth, and is a little longer than the front margin of the carpal process; the dactylus is half as long as the metacarpus. The fourth pair are not longer than the third. The lower hind corner of the femur of the sixth pair is produced downwards into a short, rounded process, which reaches about to the apex of the genu. The femur of the seventh pair is only a fourth part shorter than that of the sixth, and is somewhat longer than all the following joints together.

The *pleon* is not carinated; the lateral parts of the segments are scarcely produced, but are angular behind.

The last coalesced *ural* segment is about a third part longer than broad, and is about as long as the telson.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is longer than the last coalesced ural segment, and much longer than the inner ramus.

The *telson* is lanceolate, very sharp-pointed, and somewhat more than twice as long as broad.

Syn. **1887. Oxycephalus Steenstrupi,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 37.

Streetsia Steenstrupi comes near to the next species, *S. longiceps*, CLAUS, but differs from it in the very long and strongly developed seventh pair of peræopoda, by the last coalesced ural segment being rather shorter than the telson, and by the peduncle of the second and third pairs being not longer than the corresponding inner rami.

The *Oxycephalus longiceps*, STEBBING, agrees with the specimens of Streetsia Steenstrupi, which I have examined, in the characteristics of the seventh pair of peræopoda and the uropoda, and thus decidedly differs from *Oxycephalus longiceps*, CLAUS, but as it also differs from Streetsia Steenstrupi in the characteristics of the first two pairs of peræopoda, I can scarcely consider it identical either with the present species or with *Streetsia longiceps*, CLAUS, and think that it ought to have a new specific name.

The *body* is compressed, but not at all carinated.

The hind part of the *head* is a little constricted; the rostrum seen from above is broadly lanceolate, with the apex narrowed.

The first pair of *antennæ* (Pl. III, fig. 3) have the first flagellar joint fully twice as long as is it is broad at the apex, which is dilated downwards and forwards; the second flagellar joint is about as long as the third, and is provided with three very long olfactory hairs; the fourth joint is unusually short, cylindrical, and scarcely a third part as long as the third (p. 25, fig. 20).

The *epimerals* are high, but not longer than the under margins of the corresponding peræonal segments.

The first pair of *peræopoda* (p. 32, fig. 52) have the carpus considerably longer than broad; the hind margin is richly fringed with long stout bristles; the under margin is concave, entirely smooth and sharp-edged; the lower corner is a little projecting forming a broad and short triangular process, but not outdrawn into a spine-like tooth; the sides of the triangular projection are densely covered with very stout and long bristles; the metacarpus is very thick and short, less than a third part longer than broad; the front margin is strongly convex, and provided with four or five very long bristles; the hind margin forms a very thin and sharp edge, which is smooth, but which, when examined under a strong

magnifying power, shows traces of a very minute serration consisting of densely placed rounded teeth; the apex of the hind margin projects a little along the dactylus into a broadly rounded process; the dactylus is short, with the hind margin entirely smooth. The second pair (p. 33, fig. 55) have the stem of the carpus as long as broad; the hind margin is fringed with five or six long bristles; the carpal process is broadly triangular, not outdrawn into an apical spine-like tooth; the front margin is entirely smooth, and without spines; the sides ot the joint and of the process show an oblique row of long bristles; the metacarpus is comparatively narrow; the front margin is convex, the hind is straight and smooth, not forming a distinct edge; the dactylus is fully half as long as the metacarpus, with the hind margin smooth. The fifth pair are much longer than the sixth; the femur is about twice as long as broad, with the lower hind corner produced downwards into a broadly rounded process reaching to the apex of the genu; the femur is shorter than the three following joints together. The sixth pair have the femur about as long as all the following joints together; the apical process is broadly rounded, and reaches fully to the apex ef the genu; the front margin of the tibia is fringed with longer and shorter spine-like teeth, one long one and one short one alternating (Pl. III, fig. 5). The seventh pair are very long, reaching nearly to the apex of the tibia of the sixth pair; the femur is broad, scarcely a third part longer than broad, with the upper hind portion dilated; it is a little longer than all the following joints together.

The *pleon* is as long as the first five peræonal segments together. The hind corner of the pleonal segments is not produced backwards, but is angular.

The first pair of *uropoda* (Pl. III, fig. 6) reach almost to the apex of the last pair; the peduncle is linear, nearly five times as long as broad, and more than a third part longer than the inner ramus; the inner ramus is elongate-lanceolate, serrated on both margins, and is longer than the outer ramus, which is elongated, sharp-pointed, smooth on the outer margin and serrated on the inner. The second pair reach nearly to the middle of the inner ramus of the last pair; the peduncle is much broader than that in the first pair, and not fully three times as long as broad; the inner lower corner is a little projecting, and sharp-pointed, as in the first pair; the inner ramus is only a little longer than the peduncle, lanceolate, serrated on both margins, and is considerably longer than, and not fully twice as broad as, the outer ramus, which is serrated on the inner margin, and smooth on the outer. The third pair reach as far as four-

fifths of the length of the telson; the peduncle is much shorter than the inner ramus, and a little shorter than the outer; the inner ramus is elongate-lanceolate, serrated on both margins, and considerably broader and longer than the outer ramus, which is serrated as in the preceding pair.

The *telson* has the margins smooth and tolerably convex.

COLOUR. Almost hyaline.
LENGTH. 10—12 mm.
HAB. The tropical region of the Atlantic.

6. **Streetsia longiceps,** C. CLAUS, 1879.

Pl. IV, fig. 3.

Diagn. The *head* is as long as the whole peræon; the rostrum is nearly half as long as the rest of the head.

The *peræon* is dorsally rounded.

The under margin of the carpus of the first pair of *peræopoda* is entirely smooth (?) with the hind corner projecting into a long narrow sharp-pointed process; the hind margin of the metacarpus is smooth (?) and somewhat shorter than the under margin of the carpus; the dactylus is not half as long as the metacarpus. The second pair are cheliform; the front margin of the carpal process is smooth (?) the apex narrowly sharp-pointed; the hind margin of the metacarpus is smooth (?) and is about as long as the front margin of the carpal process; the dactylus is not half as long as the metacarpus. The fourth pair are only a little longer than the third. The lower hind corner of the femur of the sixth pair is scarcely produced. The femur of the seventh pair is about half as long as that of the sixth, and is as long as all the following joints together.

The *pleon* is not carinated; the lateral parts of the segments are produced behind, and sharp-pointed.

The last coalesced *ural* segment is a little longer than the telson.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is a little longer than the inner ramus.

Syn. **1879. Oxycephalus longiceps,** C. CLAUS. **27,** p. 194 (48).
» » » **36,** p. 72, pl. 24, fig. 10.

The description of CLAUS being very short and the drawing not very instructive, it is impossible to say anything definite about the closer affinities of the species, but from the characteristics known it seems most likely that it belongs to the genus Streetsia, and that it is not identical with any of the above recorded species. Above (p. 90) I have suggested that *Oxycephalus longiceps* of STEBBING is another species than that described by CLAUS.

The original diagnosis given by CLAUS in 1879 runs:

»Kopf sehr lang, mit dem rüsselförmigen Schnabel fast so lang als der Mittelleib. Pigmentkörper des Auges sehr gestreckt, fast quadrangulär. Beine schlank und dünn. Die Greifhand der beiden vorderen Beinpaare mit scharfem, gezähneltem. Rande und einfacher, langer Endspitze. Siebentes Beinpaar klein. Schwimmfüsse dünn und schmächtig. Integument glatt und ziemlich dünn. Seitenflügel der Abdominalsegmente unbewaffnet. Das Caudaldoppelsegment nur wenig länger als die Schwanzplatte, ebenso die Stielglieder der Uropoden nicht viel länger als die Aeste.«

COLOUR. ?
LENGTH. 6 mm. (young ♂, CLAUS).
HAB. The Indian Ocean, Zanzibar (CLAUS).

Streetsia (?) mindanaonis, TH. STEBBING, 1888.

Diagn. The *head* is as long as the peræon, the pleon, and the first ural segment together; the rostrum is about half as long as the rest of the head.

The *peræon* is dorsally rounded.

The first pair of *peræopoda* are subcheliform; the under margin of the carpus is smooth, with the hind corner a little projecting and sharp-pointed; the hind margin of the metacarpus is smooth; the dactylus is minute. The second pair are cheliform, with the carpal process ending into a slender, spine-like tooth; the front and hind margins of the carpal process are serrated; the hind margin of the metacarpus is finely serrated, and provided with short bristles; it is much longer than the front margin of the carpal process with the

apical tooth; the dactylus is not half as long as the metacarpus. The fourth pair are longer than the third. The femur of the seventh pair is as long as that of the sixth, and is as long as all the following joints together.

The lateral parts of the first two *pleonal* segments are squared behind; that of the third segment is acutely produced backwards.

The last coalesced *ural* segment is much more than twice as long as broad, and is considerably longer than the telson.

The peduncle of the first pair of *uropoda* is a little shorter than the last coalesced ural segment, and is nearly twice as long as the inner ramus.

The *telson* is lanceolate, and is more than twice as long as broad.

Syn. **1888. Leptocotis mindanaonis,** TH. STEBBING. **39,** p. 1598, pl. 204, c.

For further information on the subject I refer the reader to STEBBING's work.

COLOUR. Hyaline spotted with orange (STEBBING).
LENGTH. »About two-fifths of an inch» (STEBBING).
HAB. Off Mindanao, Philippines (STEBBING).

Gen. 7. Cranocephalus, n. g.

Derivatio: *κράνος*, = helmet, and *κέφαλος* = a large-headed fish.

Diagn. The *head* is short and thick, produced into a very short, sharp-pointed rostrum, which is open on the under side. The hind part of the head is constricted.

The second pair of *antennæ* are hidden under the head and the peræon, when folded.

The first two pairs of *peræopoda* are subcheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.

The last coalesced *ural* segment is longer than, but not twice as long as, the first, and is not twice as long as broad.

The inner rami of all the three pairs of *uropoda* are free, not coalesced with the corresponding peduncles.

The *telson* is tongue-shaped and elongated.

The genus Cranocephalus is well defined from all the other genera of the family. In the short head and in the second pair of antennæ being concealed under the head *and the peræon* it resembles *Simorhynchotus* and *Tullbergella;* in the form of the peræopoda it comes tolerably near to *Stebbingella*, which also has broadly expanded femora in the last three pairs. Only one species is hitherto known.

1. **Cranocephalus Goësi**, n. sp.

The name is given in honour of D:r Axel Goës of Kisa, Sweden.

Pl. IV, fig. 7—9; and p. 21, fig. 5; p. 32, fig. 53; and p. 38, fig. 72.

Diagn. The *body* is smooth and even, with a thin but hard integument.

The *head* is nearly as long as the first six peræonal segments together; the hind part is a little constricted; the broadly triangular rostrum is scarcely half as long as the rest of the head.

The under margin of the carpus of the first pair of *peræopoda* is entirely smooth, with the hind corner projecting into a short sharp tooth; the hind margin is strongly serrated, without spines or bristles, the hind margin of the metacarpus is as long as the free under margin of the carpus, and forms an edge which is smooth on the hind margin but armed with a few sharp teeth on the under margin. The under margin of the carpus of the second pair is smooth, with the apical tooth somewhat longer than in the first pair; the hind margin is feebly serrated, and providod with some very short bristles; the hind margin of the metacarpus is about as long as the free under margin of the carpus, the upper part is smooth; the lower obliquely truncated end is provided with a few strong teeth. The femur of the sixth pair is a fifth part longer than broad, with the lower hind corner produced downwards into a broadly rounded process, which reaches to the apex of the genu. The seventh pair reach to the apex of the carpus of the sixth pair.

The lateral parts of the *pleonal* segments are a little produced behind, and sharp-pointed.

The peduncle of the first and second pairs of *uropoda* is fully twice as long as the inner ramus.

The *telson* is more than two and a half times as long as it is broad at the base; and is considerably longer than the last pair of uropoda; the apex is broadly rounded.

The helmet-shaped *head* (Pl. IV, fig. 7) viewed in profile resembles that figured by STREETS (**26**, pl. 2, fig. 36) from the female of *Stebbingella sclerotica*. It is very broad and deep, almost as deep as it is long without the rostrum. The under side of the rostrum is bordered behind by a small duplicature of the integument.

The first pair of *antennæ* (Pl. IV, fig. 8) have the first joint of the flagellum twice as long as it is broad at the apex; the three following joints are subequal in length, and are together quite as long as the under margin of the first joint.

The *peræon* has the segments very neatly defined but not protruding. The *epimerals* are entirely smooth and even, without tubercles or spinous processes, and are somewhat longer than the under margins of the corresponding peræonal segments.

The first pair of *peræopoda* (p. 32, fig. **53**) have the carpus nearly as long as broad; the metacarpus is as long as the carpus, with the front margin convex; the dactylus is gently curved, half as long as the metacarpus, and smooth on the hind margin. The second pair (Pl. IV, fig. 9) are only a little longer than the first; the metacarpus is a little longer than the carpus; the dactylus is half as long as the metacarpus, and is like that in the first pair. The third and fourth pairs are very slender and equal in length. The fifth pair are longer than the sixth; the femur is broad, only a fourth part longer than broad, and a little longer than the three following joints together. The femur of the sixth pair is broadly pear-shaped, about a fifth part longer than broad, and about a sixth part broader than that of the fifth pair. The seventh pair have an almost trapeziform femur, which is as broad at the base as it is long, and a little longer than all the following joints together.

The *pleon* is somewhat longer than the last five peræonal segments together. The under margins of the segments are straight.

The last coalesced *ural* segment is less than a third part longer than it is broad at the base.

The first pair of *uropoda* (p. 38, fig. **72**) reach a little beyond the middle of the inner ramus of the last pair; the peduncle is longer than the last coalesced ural segment, almost linear, and about four times as long as broad, with the lower parts of the margins

serrated; it is more than twice as long as the inner ramus, which is a little longer than the outer; both rami are elongate-lanceolate, and are serrated on both margins. The second pair reach fully to the apex of the peduncle of the last pair; the peduncle is linear, more than four times as long as broad, and quite twice as long as the inner ramus, which is considerably longer than the outer and is serrated on both margins; the outer ramus is smooth on the outer margin and serrated on the inner. The third pair reach as far as four-fifths of the length of the telson; the peduncle is linear, more than twice as long as broad, and considerably longer than the inner ramus, which is as long as the outer and is serrated on both margins; the outer ramus is serrated as in the preceding pair.

The *telson* has the margins smooth and straight.

Colour. White as ivory, with red spots on the lower parts of the body, the eyes are dark red.
Length. 8 mm.
Hab. The tropical region of the Atlantic.

Gen. 8. Stebbingella, n. g.

The name is given in honour of the Rev. Th. R. R. Stebbing.

Diagn. The *head* is moderately long and broad, and is produced into a tolerably long and sharp-pointed rostrum, which is closed on the under side. The hind part of the head is constricted.
The second pair of *antennæ* are hidden under the head, when folded.
The first two pairs of *peræopoda* are subcheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.
The last coalesced *ural* segment is longer than, but not twice as long as, the first, and is only a little longer than broad.
The inner rami of all the three pairs of *uropoda* are free, not coalesced with the corresponding peduncles.
The *telson* is triangular, and sharp-pointed.

This genus has been established for the reception of those Oxycephalids, which, according to my views as to the generic characteristics shown in the family Oxycephalidæ (see above p. 16) are intermediate between the genera *Oxycephalus*, *Streetsia*, and *Leptocotis*.

The first Oxycephalidean species described, which belongs to this new genus, is *Oxycephalus sclerotícus*, TH. STREETS, from the year 1878, the second is *O. typhoïdes*, described by CLAUS in 1879, and the last is the new species recorded below under the name Stebbingella Théeli.

A. The lower hind corner of the pleonal segments is produced backwards, and sharp-pointed.

a 1. The last ural segment is as long as the telson. The rostrum is longer than the rest of the head (♂). The seventh pair of peræopoda are shorter than the femur of the sixth pair. 1. **S. sclerotica.**

a 2. The last ural segment is more than twice as long as the telson. The rostrum is much shorter than the rest of the head (♂). The seventh pair of peræopoda are much longer than the femur of the sixth pair. 2. **S. typhoïdes.**

B. The lower hind corner of the pleonal segments is squared, not produced, nor sharp-pointed. The last ural segment is about a fourth part longer than the telson. The rostrum is nearly as long as the rest of the head (♂). The seventh pair of peræopoda are longer than the femur of the sixth pair. 3. **S. Théeli.**

1. **Stebbingella sclerotica,** TH. STREETS, 1878.

Pl. IV, fig. 13—16.

Diagn. The *body* is dorsally carinated, with a broad, rounded ridge, and a row of nodules along the sides above the epimerals. The fifth epimeral has a prominent spine directed backwards; the whole surface of the body is finely granulated.

The *head* is as long as the first five peræonal segments together; the rostrum is considerably longer than the rest of the head, and is wedge-shaped.

The first four joints of the second pair of *antennæ* are subequal in length and straight; they reach, when folded, nearly to the the apex of the rostrum.

The first pair of *peræopoda* have the under side of the carpus provided with spines, and the hind corner projecting into an acute apical tooth; the hind margin of the metacarpus is somewhat longer than the under margin of the carpus. The second pair have the carpus more produced than the first pair, with the under margin straight and smooth; the hind margin of the metacarpus is as long as the under margin of the carpus, and is provided with spines. Along the middle of the femur of the last three pairs there is a row of four pits. The seventh pair are shorter than the femur of the sixth.

The *pleon* is fully as long as the first five peræonal segments together; the under margin of the segments is straight; the hind corner is produced and sharp-pointed.

The last coalesced *ural* segment is as long as the telson.

The first pair of *uropoda* reach to the apex of the last pair. The rami are lanceolate.

The *telson* is broad, triangular, and reaches beyond the apex of the last pair of uropoda.

Syn. **1878. Oxycephalus scleroticus,** TH. STREETS. **26,** p. 281, pl. 2, fig. 3.

As to the calcareous and peculiarly sculptured integument STREETS says:

»Animal with the tegumentary covering hard and resisting — — — —. The thorax elevated along the median line into a broad, rounded ridge, with the sides sloping down from the summit; the ridge appearing somewhat nodulated; a row of nodules along the side above the epimerals; on the fifth epimeral a prominent spine, directed backward; the segments of the thorax decreasing posteriorly, each segment bulging, not overriding its fellow; the whole surface of the body finely granulated».

It is very probable that the female, which he describes, does not belong to this species; it was not taken in the same locality, and it seems not impossible that it may have been a *Cranocephalus*, since his description of the granulated and nodulous integument refers to the male form only.

As to this supposed female he says:

»The female of this species is more robust than the male. The head is deeper and broader, more rounded above and below, the notch posterior shallower; the rostrum shorter and narrower. Superior antennæ

straight, or slightly curved, slender, not produced at the apex of the third joint of the peduncle. In the one specimen of this sex in the collection the spine of the fifth epimeral was absent».

COLOUR. ?
LENGTH. The male 10—15 mm; the female 10 mm. (STREETS).
HAB. The tropical region of the Pacific, the male at Lat. 25° 13′ to 26° 13′ N, Long. 143° 15 W; the female at Lat. 25° 50′ N, Long. 132° 45′ W. (STREETS).

2. **Stebbingella typhoïdes,** C CLAUS, 1879.

Pl. IV, fig. 10—12; and p. 27, fig. 30.

Diagn. The segments of the *body* are bulging and protruding, but not carinated. The fifth epimeral has a prominent, curved spine, directed backwards.

The *head* is a little longer than the first five peræonal segments together. The rostrum is narrow and sharp-pointed, and is half as long as the rest of the head.

The first four joints of the second pair of *antennæ* are unequal in length and strongly arched.

The first pair of *peræopoda* have the under margin of the carpus smooth, with the hind corner projecting into a spine-like tooth; the hind margin of the metacarpus is about as long as the under margin of the carpus. The second pair have the carpus like that in the first pair; the hind margin of the metacarpus is shorter than the under margin of the carpus. On the femur of the fifth and sixth pairs there are no pits, but along the middle of the femur of the seventh pair there is a long ridge and two pits. The seventh pair are much longer than the femur of the sixth, and reach almost to the apex of the tibia of that pair.

The *pleon* is a little longer than the last four peræonal segments together; the under margin of the pleonal segments is almost straight; the hind corner is produced and sharp-pointed.

The last coalesced *ural* segment is more than twice as long as the telson.

The first pair of *uropoda* reach to the apex of the telson.

The *telson* is short, but a little longer than the last pair of uropoda.

Syn. **1879, Oxycephalus typhoïdes,** C. CLAUS. **27,** p. 195 (49).
» » » 1887. **36,** p. 72, pl. 24, fig. 11—14.

Stebbingella typhoïdes is easily distinguished from the two other species by the even, not noduluos integument, and by the last coalesced ural segment being more than twice as long as the telson.

The original description as it was given by CLAUS in 1879 runs:

»Körper mässig comprimirt, mit einem Paar von Seitenstacheln an den Epimeren des fünften Thoracalsegments. Kopf kugelig aufgetrieben, mit sehr tiefer Antennengrube und spitzem, ziemlich kurzem Schnabel. Nackengegend stark verengert. Die vorderen Antennen des Männchens gross, mit stumpfem Zahnfortsatz an dem sehr gestreckten Schaft, zweites Antennenpaar sehr lang, mit stark ausgebogenen Gliedern und kurzem Endgliede. Greifhand der vorderen Beinpaare mit ungezähntem, in eine lange Spitze ausgezogenem Rand. Die Schenkelplatten des fünften und sechsten Beinpaares sind breite, mächtig vergrösserte Scheiben, von fast birnförmigem Umrisse und liegen wie *Eutyphis (Thyropus)* klappenartig der Bauchseite an. Siebentes Beinpaar gross und lang, mit umfangreicher, am Hinterrande lang ausgezogener Schenkelplatte. Aussenfläche der letzteren mit langer Firste und zwei Gruben. Die Seitenflügel der Abdominalsegmente ziehen sich in einem langen spitzen Fortsatz aus. Das Caudaldoppelsegment mehr als zweimal so lang wie die kurze Schwanzplatte. Letztes Uropodenpaar sehr kurz».

COLOUR. ?
LENGTH. 8—9 mm. (CLAUS).
HAB. The Indian Ocean, Zanzibar; The Mediterranean (CLAUS).

3. **Stebbingella Théeli,** n. sp.

The name is given in honour of Professor HJALMAR THÉEL of Upsala.

Pl. V, fig. 1—4; and p. 21, fig. 3; and p. 35, fig. 60.

Diagn. The *body* is dorsally carinated, each of the peræonal segments showing on the summit an egg-shaped, calcareous tubercle, and on the four middle segments there are large tubercles above the epimerals; the pleon has a longitudinal keel, the

segment being sculptured on the sides and showing large grooves. The body increases in breadth from the first peræonal segment to the middle of the fifth, then narrows abruptly towards the pleon; the fifth epimeral thus shows an angular protruding tubercle.

The *head* is longer than the first six peræonal segments together; the rostrum is not fully as long as the rest of the head, and is triangular, and sharp-pointed.

The first four joints of the second pair of *antennæ* are subequal in length, and are feebly bent.

The first pair of *peræopoda* have the under margin of the carpus serrated, with the hind corner feebly projecting, and sharp-pointed; the hind margin of the carpus is also serrated; the hind margin of the metacarpus is serrated, without spines, and is shorter than the under margin of the carpus. The second pair have the under margin of the carpus serrated, and the hind corner does not project more than in the first pair; the hind margin is notched, and provided with four or five spinelike bristles; the hind margin of the metacarpus is serrated, and is nearly as long as the under margin of the carpus. Along the middle of the femur of the fifth pair there are three pits, on that of the sixth four, and on that of the seventh pair three pits and some larger grooves at the apex of the joint. The seventh pair are much longer than the femur of the sixth, and reach beyond the apex of the tibia.

The *pleon* is a little longer than the last four peræonal segments together; the under margin of the pleonal segments is feebly convex; the hind corner is squared, and not at all produced.

The last coalesced *ural* segment is a third part longer than the telson.

The first pair of *uropoda* reach to the apex of the last pair. The rami are narrowly elongate.

The *telson* is almost lanceolate, and reaches scarcely beyond the apex of the last pair of uropoda.

Stebbingella Théeli is very similar to *S. sclerotica* in form, and if there were not the differences in the armature of the first two

pairs of peræopoda, in the length of the seventh pair and of the last coalesced ural segment, they would rather be looked upon as local varieties. As far as it is possible to judge from the description of STREETS, and from his unsatisfactory drawing, there are great differences in the sculpture on the peræon and pleon.

The species is one of the most beautiful of all the Hyperids, and it is a wonder that it has so long escaped the attention of zoologists.

The integument of the *body* (Pl. V, fig. 1; p. 21 fig. 3) is very thick and calcareous, showing a rich sculpture, especially on the peræon, which consists of protruding bands or rolls, straight and curved, and curiously formed nobs and tubercles, interrupted by notches and furrows. The epimerals are very thick, the third, fourth, and fifth are much thicker than high; the fifth is abruptly incised or rather truncated at the middle so as to form a broadly protruding angular tubercle, which, however, does not project into a more or less curved spine-like tooth as in the two other species.

The *head* is dorsally carinated, and is considerably longer in the female than in the male, especially as to the rostrum. In the male (p. 21, fig. 3) the rostrum is half as long again as it is broad at the base (i. e. the point of fixation of the first pair of antennæ), and a little shorter than the rest of the head; in the female, on the other hand, the rostrum is more than three times as long as it is broad at the base, and longer than the rest of the head; the rostrum is closed on the under side more completely in the female than in the male.

The first pair of *antennæ* in the male have the first flagellar joint twice as long as it is broad at the under margin; the projecting lower front corner is a little more than a third part as long as the under margin of the joint; the second joint is a little shorter than the third, which is a trifle shorter than the fourth; all the three together are shorter than the under margin of the first flagellar joint. The first peduncular joint in the female is very long; the flagellum is slender and consists of three joints. The second pair in the male reach to the middle of the rostrum; the first joint is tolerably curved, and a little shorter than the second, which is shorter than the third; the fourth is much shorter than the second.

The first pair of *peræopoda* (Pl. V, fig. 2) are considerably smaller than the second; the carpus is a third part broader than long, and has the lower front corner a little protruding in front of the base of

the metacarpus; the metacarpus is about twice as long as broad; the dactylus has the hind margin smooth, and is more than half as long as the metacarpus. The second pair (Pl. V, fig. 3) have the carpus nearly as long as broad; the lower front corner as well as the hind corner are less projecting than in the first pair. The third and fourth pairs are equal in length, tolerably slender, and considerably shorter than the fifth pair. The fifth pair have the femur much dilated, broadest below the middle, and scarcely more than a fifth part longer than broad; the lower front and hind corners are produced downwards to the middle of the genu; the three pits on the outer side are ovate in form; the femur is as long as the genu, tibia, carpus, and half the metacarpus together. The sixth pair are shorter than the fifth; the femur is much dilated, broader than long, and nearly as long as all the following joints together; the lower hind corner is not produced. The femur of the seventh pair (p. 35, fig. 60) is somewhat longer than all the following joints together, and is about as long as that of the sixth pair.

The last coalesced *ural* segment is about a third longer than broad.

The peduncle of the first pair of *uropoda* (Pl. V, fig. 4) is quite as long as the last coalesced ural segment, and more than three times as long as broad; the inner ramus is much shorter than the peduncle, and much longer than the outer ramus; both rami are serrated on both margins. The second pair reach a little beyond the apex of the peduncle of the last pair, the peduncle is much longer than the inner ramus, which is about a third part longer than the outer; the inner ramus is serrated on the outer margin and smooth on the inner; the outer ramus is serrated on the inner margin and smooth on the outer. The third pair reach almost to the apex of the telson; the peduncle is quite as long as the inner ramus, which is serrated on both margins, and scarcely longer than the outer ramus.

The *telson* has the margins smooth, and feebly convex.

COLOUR. Bright yellow, lustrous as if polished, the eyes are dark red.
LENGTH. 15—21 mm.
HAB. The Indian Ocean.

Gen. 9. Glossocephalus, C. BOVALLIUS, 1887.

Derivatio: γλῶσσα = the tongue, and κέφαλος = a large-headed fish.

Diagn. The *head* is comparatively short and broad, and produced into a broad rostrum, which is rounded in front. The under side of the rostrum is open. The hind part of the head is constricted.

The second pair of *antennæ* are hidden under the head, when folded, and, to a small extent, under the peræon.

The first two pairs of *peræopoda* are cheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are much dilated.

The last coalesced *ural* segment is longer than, but not twice as long as, the first, and is only a little longer than broad.

The inner rami of all the three pairs of *uropoda* are free, not coalesced with the corresponding peduncles.

The *telson* is short, and tongue-shaped.

Syn. **1887. Glossocephalus,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 35.

This genus is most easily distinguished from all the other genera of the family by the much dilated tibia, carpus, and metacarpus of the fifth pair of peræopoda, and also by the wide, almost cup-shaped carpus of the first two pairs. The dilated form of the joints of the fifth pair strikingly recall that feature in the sixth pair of *Phorcorhaphis*, STEBBING, and *Lycæopsis*, CLAUS.

The genus contains hitherto two species:

A. The hind margin of the metacarpus of the first pair of peræopoda is smooth. The seventh pair are longer than the femur of the sixth. 1. **G. Milne-Edwardsi.**

B. The hind margin of the metacarpus of the first pair of peræopoda is armed with a strong tooth. The seventh pair are shorter than the femur of the sixth. 2. **G. spiniger.**

1. **Glossocephalus Milne-Edwardsi**, C. BOVALLIUS, 1887.

The name is given in honour of Professor ALPHONSE MILNE EDWARDS.

Pl. V, fig. 5; and p. 22, fig. 6 and 6 a; p. 38, fig. 71.

Diagn. The *head* in the male is as long as the first four peræonal segments together, in the female as long as the first three; the rostrum is about half as long as the rest of the head.

The metacarpus of the first pair of *peræopoda* has the hind margin entirely smooth, and the lower front corner only feebly produced. The third pair are considerably longer than the fourth and a little longer than the fifth. The carpus of the fifth pair is more than twice as long as the tibia. The sixth pair are shorter than the fifth. The seventh pair do not reach fully to the apex of the tibia of the sixth pair.

The lateral parts of the *pleonal* segments are rounded behind.

The first and second pairs of *uropoda* reach about to the apex of the last pair.

Syn. **1887. Glossocephalus Milne-Edwardsi, 35,** p. 35.

The integument of the *body* is smooth, without tubercles or excavations, hard and bright as if polished.

The *rostrum* is very broad at the apex, in the male half as broad as the ocular region, in the female a little narrower.

The first pair of *antennæ* in the male are less curved than usually in this family, and have the front corner of the first flagellar joint not at all projecting; the first flagellar joint is not twice as long as broad; the second joint is longer than the third, and as long as the fourth; these last three joints together are nearly twice as long as the under margin of the first joint. The first pair in the female are robust, with the first flagellar joint thick and tumid, and nearly as long as the two following joints together. The second pair in the male are six-jointed; the first joint is somewhat curved, and considerably shorter than the second, which is shorter than the third; the fourth joint is a little shorter than the second; the fifth and sixth are short, equal in length, and together about an eighth part of the length of the fourth joint.

The first two segments of the *peræon* are short and together scarcely as long as the third, the first three segments together are somewhat

shorter than the fifth, which is the longest of all; the sixth and seventh segments are equal in length. The *epimerals* are long, irregularly rounded below, and fully as long as the under margins of the corresponding segments.

The first two pairs of *peræopoda* are very small in comparison with the following pairs, and have the carpus shaped as an egg with the top obliquely cut off. The carpal process of the first pair is armed on the outer margin with two spine-like teeth, and is sharp-pointed at the apex; the metacarpus is longer than the stem of the carpus; the hind margin is straight, smooth, and sharp, and is longer than the front side of the carpal process; the front margin is convex, with the apex produced into a very short, and feebly curved tooth; the dactylus is smooth on the hind margin, and fully half as long as the metacarpus. The second pair are closely similar to the first, but the outer margin of the carpal process wants teeth; the metacarpus is only a little longer than the stem of the carpus, and has the hind margin concave, smooth, and a little longer than the front side of the carpal process; the dactylus is not more than a third part as long as the metacarpus, and has the hind margin smooth. The third pair are very slender and elongated, more than nine times as long as the second pair, the femur and tibia are much elongated, being more than eight times as long as broad. The fourth pair are like the third, but shorter. The fifth pair have the femur dilated, and not fully three times as long as broad; the front margin is serrated; the tibia is dilated, not twice as long as broad; the carpus is much dilated, about as broad as the femur, and a little more than twice as long as it is broad at the apex; the metacarpus is dilated, lanceolate, with both margins finely serrated, and is about as long as the carpus; the dactylus is very short. The sixth pair are about a fifth part shorter than the fifth pair, and have the femur somewhat narrower; the tibia and carpus are dilated, but not as much as in the preceding pair; the metacarpus is as long as the two preceding joints together, and is finely serrated on both margins. The femur of the seventh pair is broadly ovate, more than half as long as that of the sixth pair, and about a fourth part longer than all the following joints together.

The *pleon* is a little longer than the last three peræonal segments together, and is not carinated.

The last coalesced *ural* segment is quite as long as it is broad at the base, and has the margins convex; it is two and a half times as long as the telson.

The peduncle of the first pair of *uropoda* (p. 38, fig. 71) is about three times as long as broad, with feebly convex and serrated margins; it is longer than the last coalesced ural segment, and nearly twice as long as the outer ramus, which is more than a third longer than the inner; the rami are lanceolate, and serrated on both margins. The second pair reach fully as far as the first; the peduncle is longer than the last coalesced ural segment, and more than three times as long as broad, with the margins serrated; the outer ramus is more than half as long as the peduncle, and a little longer than the inner; the rami are narrower than in the first pair, and are serrated on both margins. The third pair are not twice as long as the telson; the peduncle is somewhat broader than long, and a third part as long as the outer ramus, which is a little longer than the inner; the rami are serrated as in the preceding pair.

The *telson* is broadly tongue-shaped, with the margins serrated, and is twice as long as the peduncle of the last pair of uropoda.

COLOUR. Yellowish white
LENGTH. The male 17 mm, the female 9 mm.
HAB. The tropical region of the Atlantic.

2. **Glossocephalus spiniger,** C. BOVALLIUS, 1887.

Pl. V, fig. 6—9; and p. 26, fig. 26; p. 29, fig. 43.

Diagn. The *head* is longer than the first three peræonal segments together; the rostrum is not a third part as long as the rest of the head.

The metacarpus of the first pair of *peræopoda* has the hind margin armed with a very long, sharp tooth at the middle, and some small teeth above it, and the lower front corner produced into a long, sharp-pointed tooth, which is about half as long as the dactylus. The third pair are about as long as the fourth, and much shorter than the fifth. The carpus of the fifth pair is not twice as long as the tibia. The sixth pair are fully as long as the fifth. The seventh pair are much shorter than the femur of the sixth, scarcely reaching to three-fourths of its length.

The lateral parts of the *pleonal* segments are angular behind.

The first and second pairs of *uropoda* reach beyond the apex of the last pair.

Syn. **1887. Glossocephalus spiniger,** C. BOVALLIUS. **35,** p. 35.

The first pair of *peræopoda* (Pl. V, fig 8) have the same form as in the preceding species, but the carpal process is longer, armed with a single, very long, spine-like tooth on the outer margin, and has the apex produced into a long, curved, spine-like tooth; the metacarpus is much longer than the stem of the carpus, with the hind margin as long as the front side of the carpal process; the spine-like tooth on the hind margin is nearly half as long as the hind margin; the front margin is convex, with the long apical tooth nearly straight and sharp-pointed; the dactylus is curved, smooth on the hind margin, and is two-thirds as long as the metacarpus. The second pair (Pl. V, fig. 9) have the carpus similar to that in the first pair; the metacarpus is much longer than the stem of the carpus, with the hind margin concave, and entirely smooth; the front margin is convex, with the apex projecting into a feebly curved tooth, which is somewhat shorter than that in the first pair; the dactylus is nearly half as long as the metacarpus with the hind margin smooth. The third and fourth pairs are equal in length, more robust than in the preceding species, and much shorter than the fifth pair; the third pair are scarcely four times as long as the second. The femur of the fifth pair is narrower than in *Glossocephalus Milne-Edwardsi*, being more than four times as long as broad; the tibia is twice as long as broad; the carpus is a third part longer than the tibia, and about three times as long as it is broad at the apex; the metacarpus is dilated, lanceolate, and somewhat shorter than the carpus. The sixth pair are a trifle longer than the fifth; the metacarpus is shorter than the two preceding joints together. The femur of the seventh pair is not half as long as that of the sixth, and is much longer than all the following joints together.

The *ovitectrices* are crescent-shaped (Pl. V, fig. 6).

The *pleon* is much shorter than the last three peræonal segments together, and is dorsally feebly carinated.

The last coalesced *ural* segment is a fourth longer than broad.

The first pair of *uropoda* reach far beyond the apex of the last pair; the peduncle is a third part longer than the outer ramus, which is nearly twice as long as the inner; the peduncle is much longer than the

last coalesced ural segment. The peduncle of the second pair reach as far as that of the first, but the rami are shorter. The third pair are twice as long as the telson, with the rami nearly equal in length.

The *telson* is obtusely triangular; it is a third part as long as the last coalesced ural segment, and is only a little longer than the peduncle of the last pair of uropoda.

COLOUR. White.
LENGTH. 11 mm.
HAB. The Indian Ocean, Lat. 7°—2° S; Long. 80°—90° E.

Gen. 10. **Leptocotis**, TH. STREETS, 1877.

Diagn. The *head* is long, and produced into a comparatively short, narrow, sharp-pointed rostrum. The hind part of the head is constricted, forming a short cylindrical neck.

The second pair of *antennæ* are hidden under the head, when folded.

The first pair of *peræopoda* are subcheliform; the second are cheliform. The carpus and metacarpus of the fifth pair are not dilated.

The last coalesced *ural* segment is three or four times as long as the first, narrowly elongated, and cylindrical.

The inner rami of all the three pairs of *uropoda* are free, not coalesced with the corresponding peduncles.

The *telson* is narrowly elongated and cylindrical.

Syn. **1877. Leptocotis,** TH. STREETS. **24,** p. 136.
» » 1878. **26,** p. 283.
TH. STEBBING. 1888. **39,** p. 1593.

STREETS, when instituting the new genus Leptocotis (**24,** p. 137) observed that it »exhibits a remarkable blending of the characters of *Oxycephalus* and *Rhabdosoma*». The characteristic which most suggests affinity with Xiphocephalidæ is undoubtedly the narrowly elongated form of the last ural segment, of the peduncles of the uropoda, and of the telson. The other characteristics pointed out by STREETS correspond rather with *Streetsia* than with *Xiphocephalus*. From *Dorycephalus* the genus may he distinguished by the inner ramus of the third pair of uropoda being free, not coalesced with the peduncle, and by the second pair of peræopoda being

more nearly cheliform than in *Dorycephalus;* the best distinguishing characteristic is, however, the considerable elongation of the urus and its appendages. But by this last characteristic *Leptocotis mindanaonis,* Stebbing, is clearly excluded from the genus, and if it be not placed in the genus *Streetsia*, as I think it may be, and have already suggested (above p. 81), it ought to be the type for a new genus.

The generic diagnosis given by Streets in 1877 contains only a few passages which could possibly serve for characterization of his new genus. They are:

»Gnathopoda short and complexly chelate. — — —. Caudal appendages long, biramous. Telson cylindrical, long».

In 1878 he gave the following diagnosis:

»Body long and slender. Head produced anteriorly to the superior antennæ in a long, slender rostrum, constricted posteriorly at its articulation with the thorax, the constricted portion short. Superior antennæ short, three-jointed, curved in the male; inferior antennæ five-jointed, joints subequal, excepting the last which is short. Mandibular appendage three-jointed. First and second pairs of thoracic legs short, chelate; the third and fourth simple; the last three pairs with the basal joint dilated; the last pair diminutive. The sixth abdominal segment (the fifth and sixth fused) elongated. The caudal appendages long, linear. Telson long, triangular at apex».

Whether *Oxycephalus tenuirostris*, Claus, and Leptocotis spinifera, Streets, are identical or not is a very difficult question to settle, because the authors do not record at all, or only vaguely, any details of importance for specific distinction; I must therefore restrict myself to giving the two species below with the characteristics which are available from their descriptions.

1. **Leptocotis spinifera,** Th. Streets, 1877.

Pl. V, fig. 15—17.

Diagn. The *head*, without the rostrum, is as long as the whole peræon; the rostrum is slightly more than half as long as the rest of the head.

The segments of the *peræon* increase in length backwards. The epimerals are long, broadly ovate, and transversely rugose.

The dactylus of the first two pairs of *peræopoda* is half as long as the metacarpus. The whole seventh pair are not half as long as the femur of the sixth.

The lateral parts of the first two *pleonal* segments are square behind, not produced; that of the third segment is produced behind into a long, spinous process.

Syn. **1877. Leptocotis spinifera,** TH. STREETS. **24,** p. 137.
» » » 1878. **26,** p. 283, pl. 2, fig. 4.

From the first description of the species published in 1877 I give the following passages:

»Head long, with the rostrum longer than the thorax; vertical diameter of the head greater posteriorly than anteriorly; the superior surface on a higher level than the dorsum of the thorax; abruptly constricted behind the eyes and in front of the first thoracic segment; the inferior border slightly convex; the under surface hollowed out on each side anteriorly in the form of fossæ for the reception of the superior antennæ; supra-fossal margin arched and slightly elevated; rostrum long, acute, slightly arched. — — —. Thorax seven-jointed; segments increasing in length posteriorly; epimerals long, broadly ovate, transversely rugose. Gnathopoda short chelate; the second pair longer than the first; carpus of first pair scarcely produced anteriorly, and inferiorly serrated; propodos broad, serrated on inferior margin; dactylus half the length of the propodos, arched, with a minute spine about the middle of the inferior surface, antagonizing with the extremity of the carpus. Second pair having the carpus more produced anteriorly than the first, extending to, or slightly beyond, the apex of the propodos, and terminating in a long fine point; propodos and dactylus similar to the first pair. — — — Fifth pair rudimentary, coxa dilated, small, with the remaining joints not half as long as the coxa of the preceding pair. — — — — Caudal appendages long, cylindrical, serrated along their inner margins, biramous; outer pair longer than the two following; ultimate short, reaching further than the inner. Telson long, cylindrical, extending beyond the extremities of the lamellæ».

From his later description in 1878 the following may be added:

»Head long, excluding the rostrum, as long as the thorax; — — — rostrum slightly more than one-third the length of the head (including its own length,) slender, acute, sligthtly arched. — — — The second

pair of legs similar to the first; the third and fourth pairs simple, slender, shorter than the fifth; the fifth, sixth, and seventh with the first joint dilated; the basal joint of the sixth broader than the fifth, but with the remaining joints shorter, and closely pectinated along their anterior margin; the pectinations on the third joint coarse, on the fourth very fine, while those on the fifth joint are intermediate between the two preceding; the last pair of legs diminutive, not half as long as the basal joint of the preceding. The first three segments of the abdomen subequal, inferior margins finely serrated, the third segment with the postero-inferior angle produced into a long, spinous process, the angle of the first and second segments square behind, not produced; the peduncles of swimming feet broadly oval. Sixth abdominal segment and telson elongated».

COLOUR. ?
LENGTH. 8—13 mm (STREETS).
HAB. The tropical region of the Pacific (STREETS).

2. **Leptocotis tenuirostris,** C. CLAUS, 1871.

Pl. V, fig. 10—14.

Diagn. The *head*, without the rostrum, is about as long as the first four peræonal segments together; the rostrum is only a little shorter than the rest of the head.

The middle segments of the *peræon* are the longest, the following decrease in length.

The dactylus of the first two pairs of *peræopoda* is more than half as long as the metacarpus. The whole seventh pair are more than half as long as the femur of the sixth.

The lateral parts of the first two *pleonal* segments are somewhat produced and rounded behind, that of the third segment is produced behind and sharp-pointed (?).

Syn. **1871. Oxycephalus tenuirostris,** C. CLAUS. **23,** p. 155.
» » » **27,** p. 194 (48).
» » » **36,** p. 71, pl. 24, fig. 2.

The original diagnosis of *Oxycephalus tenuirostris* from the year 1871 runs:

»Schnabel überaus dünn und gestreckt ungefähr so lang als der Kopf. Nackengegend desselben verengert und tief eingebogen. Körper

schlank und gracil, mit sehr dünnen Beinen. Das verschmolzene Caudalsegment stabförmig verlängert, ebenso die Basalglieder der beiden vordern Caudalgriffelpaare, welche mindestens 4 bis 5mal so lang sind als ihre lanzetförmigen Endäste (Annäherung an Rhabdosoma)».

From the description given by CLAUS in 1879 the following new details are taken:

»— — Antennen des Männchens mit hakenförmigem Zapfen am Ende des Stammes, die des Weibchens von mässiger Länge. Die Antennen des zweiten Paares ausserordentlich verlängert. Beine dünn und schlank, das letzte Paar klein. Die beiden vorderen Paare mit stark gezähnter Greifhand. Die Seitenflügel der Abdominalsegmente unbewaffnet. Das Caudaldoppelsegment stabförmig gestreckt, drei bis viermal so lang als die schmale Schwanzplatte».

COLOUR. (?)
LENGTH. About 10 mm. (CLAUS).
HAB. The Indian Ocean, the Gilolo-Passage. (CLAUS).

The family **Xiphocephalidæ**, n. f.

Diagn. The *head* is much elongated, provided with a narrow neck, and a long, needle-shaped rostrum.

The *eyes* are large, but occupy only a short space of the length of the head.

The first pair of *antennæ* are curved (♂), and fixed on the under side of the head; the first joint of the flagellum is very large, and tumid, the following joints are few in number, and subterminal (♂), or wanting (♀). The second pair are fixed on the under side of the head, are long, slender, and folded four times (♂), or entirely wanting (♀).

The *mouth-organs* are reduced, the maxillæ being rudimentary; the mandibles are provided with a much elongated palp (♂), or without a palp (♀).

The third, fourth, fifth, and sixth pairs of *peræopoda* are walking legs; the femur of the fifth and sixth pairs is not transformed. The seventh pair are transformed into a bladder-like sac. Ovitectrices are wanting.

The *uropoda* are provided with rami.
The *telson* is not coalesced with the last ural segment[1]).

Characteristic features of this family, in addition to those given in the diagnosis, are the enormous development of the auditory vesicles in the hind part of the head, the not less highly developed glands in some of the joints of the peræopoda (see above, p. 42), and also the peculiar manner of bearing and protecting the eggs and young ones (see above p. 31 and 43). The most striking among the external characteristics is the extreme elongation of the head and the urus, with its appendages, but notwithstanding this there are very few details showing analogies with the other elongated forms of Amphipoda, viz: *Tanaidea* and *Caprellidea*.

The first description of an animal belonging to this family was published in 1840 by H. MILNE EDWARDS (**7**, see above p. 3). In the following year EYDOUX and SOULEYET (**8**, p. 267) gave a detailed description of an Oxycephalid, which they supposed to be identical with the *Oxycephalus armatus* of H. MILNE EDWARDS. The drawing which they gave, is the first we have of a Xiphocephalid, and in execution has not been rivalled to this day; a copy of it in reduced scale is given below (Pl. VII, fig. 1). In the work of these authors we also find the first recognition of the animal in question as the type for an independent genus. According to their statement it was F. E. GUÉRIN-MÉNEVILLE, who proposed the new generic name Xiphocephalus. He did not give a full diagnosis, it is true, but the identity of the genus there was no possibility of mistaking, as the description of the species was exhaustive, and the accompanying drawing excellent, as I have mentioned above. From this generic name the present family-name has been taken.

---

[1]) An exception is *Xiphocephalus brevicaudatus*, TH. STEBBING.

Gen. 1. **Xiphocephalus**, F. E. GUÉRIN-MÉNEVILLE, 1841.

Diagn. The *body* is much elongated, rod-like.
The *head* shows a distinct neck, an egg- or spindle-shaped ocular region, and a much elongated, needle-shaped rostrum.
The first two pairs of *peræopoda* are cheliform, and very small.
The last coalesced *ural* segment is cylindrical, rod-like.
The peduncles of the *uropoda* are much elongated, and very narrow. The inner ramus of the last two pairs is coalesced with the corresponding peduncle.
The *telson* is much elongated, and needle-shaped.

Syn.

1841.	**Xiphocephalus,** F. E. GUÉRIN-MÉNEVILLE.			**8,** p. 271.	
1848.	**Rhabdosoma,** A. ADAMS and A. WHITE.			**9,** p. 63.	
	»	»	SPENCE BATE. 1862.	**20,** p. 344.	
	»	»	TH. STREETS. 1878.	**26,** p. 286.	
	»	»	C. CLAUS. 1879.	**27,** p. 195	(49).
	»	»	» 1887.	**36,** p. 73.	
	»	»	TH. STEBBING. 1888.	**39,** p. 1606.	
1858.	**Macrocephalus,** SPENCE BATE.			**18,** p. 361.	
1887.	**Rhabdonectes,** C. BOVALLIUS.			**35,** p. 39.	

The passage relating to the name Xiphocephalus, in the work of EYDOUX and SOULEYET runs:

»M. GUÉRIN-MÉNEVILLE, qui a bien voulu étudier avec nous cette espèce, pense qu'elle devra être séparée du genre Oxycéphale pour former une nouvelle division générique à laquelle on pourrait donner le nom de *Xyphicéphale*[1]), qui exprime son principal caractère; il se fonde en cela sur ce que les Oxycéphales véritables ont le corps plus court, de forme différente, et en ce qu'ils ont sept paires de pattes, dont deux didactyles et cinq ambulatoires».

ADAMS and WHITE, when they instituted *Rhabdosoma*, gave scarcely any ampler diagnosis than GUÉRIN-MÉNEVILLE. They said:

»We regret that the state of the only specimen in the British Museum is such that we cannot give the generic character with that detail which we should wish. — -- — The head is as long as the rest of the body, and ends in a very long beak; from the state of

1) »*Xyphicephale*» in the text, but Xiphocephalus is the correct spelling.

our specimen we cannot describe this, but indicate it on the plate from a drawing made at the time of capture. The immense length of the body and the beak would sufficiently mark this generic form».

On the same typical specimen on which ADAMS and WHITE had founded the genus *Rhabdosoma*, SPENCE BATE in 1858 founded his genus *Macrocephalus*. Four years later he himself dropped the new name in favour of *Rhabdosoma*.

In 1840 H. MILNE EDWARDS (7, p. 101) described *Oxycephalus armatus* with characteristics fully sufficient for the identification of the species. The *Oxycephalus armatus*, which was described at length by EYDOUX and SOULEYET (8, p. 267—71) is not identical with MILNE EDWARDS' species, but with that subsequently instituted by SPENCE BATE (see below p. 127).

The *Rhabdosoma armatum*, ADAMS and WHITE, is a true Xiphocephalus armatus, as is of course also *Macrocephalus longirostris*, SPENCE BATE, the two names really having been given to the same specimen.

The *Rhabdosoma Whitei*, SPENCE BATE, is a good species, and the characteristics given by its founder, are quite adequate.

The *Rhabdosoma armatum* and *Rh. Whitei*, recorded in 1878 by STREETS, are the true species, but his *Rh. longirostre* is based only on the bad drawing of SPENCE BATE from ADAMS and WHITE'S typical specimen of Xiphocephalus armatus (see below p. 121).

The *Rhabdosoma armatum*, described by CLAUS in 1879 and 1887, is a mixture of the two species just metioned, the male being Xiphocephalus Whitei, and the female X. armatus.

The *Rhabdosoma Batei*, figured in 1884 by J. S. KINGSLEY (32, fig. 98), is a synonym for Xiphocephalus armatus.

The *Rhabdosoma investigatoris*, proposed in 1887 by G. M. GILES (37, p. 219), is identical with Xiphocephalus Whitei (see below p. 127).

The *Rhabdosoma armatum*, recorded in 1888 by STEBBING, is a Xiphocephalus Whitei. His new species, *Rh. brevicaudatum*, seems to be a good species.

Here I propose a new species Xiphocephalus Lilljeborgi.

The four species to be accounted for are distinguished as shows the following synoptical table:

A. The second pair of uropoda are shorter than the last coalesced ural segment. The flagellum of the first pair of antennæ in the male is four-jointed. The hind corner of the seventh peræonal segment is rounded. The last coalesced ural segment is longer than the first. The first pair of uropoda are shorter than the third. The telson is longer than the pleon and urus together. 1. **X. armatus.**

B. The second pair of uropoda are longer than the last coalesced ural segment. The telson is shorter than the pleon and urus together.

b 1. The last coalesced ural segment is as long as, or shorter than, the first.

bb 1. The seventh peræonal segment is not half as long as the sixth, the hind corner is produced downwards into a crescent-shaped, sharp-pointed process. The flagellum of the first pair of antennæ in the male is two-jointed. The first pair of uropoda are about as long as the third. 2. **X. Whitei.**

bb 2. The seventh peræonal segment is more than half as long as the sixth, the hind corner is obtusely angular, and only feebly produced. The first pair of uropoda are much longer than the third. 3. **X. Lilljeborgi.**

b 2. The last coalesced ural segment is twice as long as the first. The seventh peræonal segment is more than half as long as the sixth, the hind corner is broadly rounded. The first pair of uropoda are longer than the third. 4. **X. brevicaudatus.**

1. **Xiphocephalus armatus,** H. MILNE EDWARDS, 1840.

Pl. VI, fig. 1—20; and p. 20, fig. 2; p. 34, fig. 57, and p. 40 fig. 80.

Diagn. The *head*, without the rostrum, is longer than the first six peræonal segments together. The neck is a little longer than the ocular region. The rostrum is much longer than the peræon and pleon together.

The flagellum of the first pair of *antennæ* in the male is four-jointed.

The seventh *peræonal* segment is about as long as the sixth, the hind corner is broadly rounded, not produced downwards.

The *epimeral* of the first pair of *peræopoda* is tongue-shaped. The carpal process of the first pair has a single sharp tooth on the hind margin; the lower hind corner of the metacarpus is sharp-pointed. The femur of the fifth and sixth pairs is dilated.

The first *ural* segment is much shorter than the last coalesced.

The first pair of *uropoda* are shorter than the third; the second pair are shorter than the last coalesced ural segment. The outer ramus of the first pair is nearly half as long as the inner; the outer ramus of the second pair is scarcely a fourth part as long as the inner; the outer ramus of the third pair is diminutive, much shorter than a tenth part of the inner.

The *telson* is longer than the pleon and urus together.

COLOUR. White, almost hyaline, with red spots on the last joints of the legs and on the uropoda, the eyes are deep red, almost black.

LENGTH. 50—120 mm.

HAB. The tropical region of the Atlantic, the Indian Ocean the Pacific.

Syn. **1840. Oxycephalus armatus,** H. MILNE EDWARDS. **7,** p. 101.

Rhabdosoma armatum, » A. ADAMS and A. WHITE. 1848. **9,** p. 63, pl. 13, fig. 1.

» » » SPENCE BATE. 1862. **20,** p. 334, pl. 54, fig. 6.

» » » TH. STREETS. 1878. **26,** p. 288, pl. 2, fig. 7.

» » (e. p.) » C. CLAUS. 1879. **27,** p. 194 (51)

» » » » » 1887. **36,** p. 74, pl. 26, fig. 1-4.

Rhabdonectes armatus, » C. BOVALLIUS. 1887. **35,** p. 39.

1858. Macrocephalus longirostris, SPENCE BATE. **18,** p. 362.

The original description of H. MILNE EDWARDS runs:

»Tête aussi longue que tout le reste du corps, terminée par un rostre styliforme très-long, renflée au milieu dans le point occupé par les yeux, puis rétrécie dans une étendue assez considérable, et renflée de nouveau à son extrémité postérieure, où se trouve la bouche. Antennes de la première paire très-petites et terminées par une lamelle ovalaire; celles de la seconde paire extrêmement longues et grêles. Pates des deux premières paires extrêmement petites; le premier article de celles des cinquième et sixième paires étroit et semblable à celui des pates précédentes. Les pates de la septième paire paraissent manquer complétement; mais il existe, au point où elles devraient s'insérer, une lamelle membraneuse semblable à celle fixée près de la base des pates précédentes. Portion postérieure de l'abdomen très-étroite; le sixième segment cylindrique, et terminé par un stylet impair aussi long que le corps. Les fausses pates de trois dernières paires très-grêles, très-longues, et terminées chacune par deux stylets. Longueur, environ 1 pouce».

All characteristics in this diagnosis, except one, agree exactly with the specimen, which has been the type for my description below, and the characteristics of the rostrum and the telson do not agree with any other of the forms I have examined. The only characteristic which at first seems difficult to conciliate with the features in my type specimen is: »le premier article de celles (pates) des cinquième et sixième paires étroit et semblable à celui des pates précédentes», though if we take into consideration the fact that MILNE EDWARDS did not try to mark the distinction between two species of the present genus Xiphocephalus, but that between a Xiphocephalus and *Oxycephalus piscator*, the seeming discrepancy will loose much of its importance. In comparison with the very broad, almost circular or pear-shaped femora of the fifth and sixth pairs of peræopoda in *Oxycephalus piscator*, the feebly dilated femora of the same pairs in Xiphocephalus armatus, must be considered as very narrow, but still we must allow that they are somewhat broader than those of the third and fourth pairs.

In corroboration of my opinion as to the identity of Xiphocephalus armatus, H. MILNE EDWARDS, with the present species, comes the fact that the specimens of Xiphocephalus marked *Oxycephalus armatus* and *Rhabdosoma armatum* in the collection of the »Musée d'Histoire

naturelle» in Paris were all Xiphocephalus armatus, after my diagnosis; one of these specimens, that marked «*Oxycephalus armatus*, MILNE EDWARDS, *Quoy et Gaimard*», and therefore most likely his original specimen, has been the type for the diagnosis and description I have given here, and from it the drawing has also been made (Pl. VI, fig. 1).

ADAMS and WHITE gave no specific description, but a good drawing, the first published of this species. A copy of it on a reduced scale is given below (Pl. VI, fig. 14).

SPENCE BATE in 1858 proposed the new generic and specific name *Macrocephalus longirostris*, taking for his type the very specimen that was the original of the drawing given in 1848 by ADAMS and WHITE. This being the case there is not the slightest doubt as to the identity of Xiphocephalus armatus with *Macrocephalus longirostris*.

The description given by SPENCE BATE in 1862 is very good, and points out some valuable characteristics, as for instance the carpal process of the first pair peræopoda having a secondary tooth on the hind margin, the sixth pair being shorter than the fifth, and the second pair of uropoda not being longer than the last ural segment. But with respect to the first pair of uropoda he is in error, as the original drawing of the animal, which was made at the capture, clearly shows (Pl. VI, fig. 14); and as ADAMS and WHITE as early as in 1848 stated that the specimen then was in bad order there is no wonder that the later drawing and description are somewhat incorrect.

TH. STREET's description of the species, published in 1878, is valuable, as it records two good specific characteristics, not appreciated before, namely the form of the under part of the seventh peræonal segment, and the dilation of the femur of the fifth and sixth pairs of peræopoda; the accompanying drawing is not good. His contention for maintaining a *Rhabdosoma longirostre*, which is based on the incorrect figure in SPENCE BATE's Catalogue, pl. 54, fig. 6, has no great weight, as I have said above. We must rely rather upon the original drawing from the fresh specimen than upon the later figure made from the same specimen in a bad state.

CLAUS in 1871 (8, p. 155), 1879, and 1887 argued that *Rhabdosoma Whitei* was the male form of *Rh. armatum*, and thus his descrip-

tion contained no characteristics of use for the specific distinction. He asserted further that only the fifth and sixth pairs of peræopoda were provided with branchial vesicles, while, as I have shown above, the second, third, and fourth pairs also have such appendages, but as they are usually concealed by the projecting lateral parts of the peræonal segments, i. e. the coalesced epimerals, they may easily escape notice.

In 1887 I gave a short diagnosis of *Rhabdonectes armatus*, H. MILNE EDWARDS, with characteristics fully sufficient to distinguish it from *R. Whitei.*

Among the »Challenger» specimens of Xiphocephalids there seem to be none belonging to the present species.

The *body* is much compressed, and is only a little broader in the female than in the male. The integument is very thin, but hard, almost vitreous, and perfectly smooth.

The *head*, without the rostrum, is not fully as long as the peræon. The neck is about a fourth part longer than the ocular region. The rostrum is four or five times longer than the rest of the head, needle-shaped, with two marginal, serrated ridges on the under side; the apex of the rostrum is sharp-pointed. The rostrum is rather longer in the adult female than in the male. The antennal groove is large in the male, forming a protruding convexity in front of the ocular region; in the female it is less spacious, and is not visible on the dorsal side of the head.

The first pair of *antennæ* in the male (Pl. VI, fig. 3) are like that pair in *Oxycephalidæ*, having the second and third pedunclar joints almost fused and the last three joints of the flagellum together not half as long as the under margin of the first flagellar joint. In the young male the first pair are very like that in the young of *Oxycephalus piscator*. In the female this pair (Pl. VI, fig. 4) consist of a two-jointed peduncle, and a long single flagellar joint, which is almost spindle-shaped, and set with long olfactory hairs. The second pair in the adult male reach, when folded, to the front wall of the antennal groove; the joints are straight, and have the under margin fringed with short hairs.

The *mandibles* are comparatively small, and want a molar tubercle; the mandibular palp in the male is very long, its first joint being a little longer than the first joint of the second pair of antennæ; the second and third joints ave very short, subequal in length.

The *peræon.* The first segment is two-thirds as long as the second; the third, fourth, fifth, and sixth are equal in length; the seventh is only a little shorter than the sixth.

The *epimeral* of the first pair of peræopoda (Pl. VI, fig. 6) is free from, and articulating with, the first segment; it is deeper than long, evenly rounded, almost tongue-shaped, and has the front margin serrated. The epimerals of the following pairs are coalesced with the corresponding segments; those of the second, third, fourth, and fifth pairs have the under margin almost straight and sligthly serrated, and the corners obtusely rounded; that of the sixth pair has the hind portion somewhat deeper than the front part, and circularly rounded; the epimeral of the seventh pair (Pl. VI, fig. 5) has the under margin dumbbell-shaped, as STREETS justly remarks (**26,** p. 289), the hind portion being less deep than the front part, and circularly rounded.

The *branchial vesicles* are very large, tumid, elongate-eggshaped, and attached to the second, third, fourth, fifth, and sixth pairs of peræopoda in the male, as well as in the female; that of the second pair is longer than the whole leg, those of the following pairs are a little shorter than the corresponding femora; those of the fifth and sixth pairs are thicker, and more tumid, than the preceding.

The *peræopoda.* The first pair (Pl. VI, fig. 7, and p. 34, fig. 57) are very short, and are, when folded up, almost concealed by the large epimeral; the carpus is very broad; the carpal process is triangular, much longer than the stem of the carpus, and has a large sharp tooth at the middle of the hind margin; the front margin is serrated, and is much longer than the hind margin of the metacarpus, reaching about to the apex of the dactylus; the hind portion of the metacarpus forms a thin sharp edge, and has the lower corner triangularly produced and sharp-pointed; the dactylus is stout, curved, and about three-fourths as long as the metacarpus. The second pair (Pl. VI, fig. 8) are a little longer than the first, and have the carpus comparatively less dilated; the carpal process is somewhat curved, and reaches fully to the apex of the dactylus. The third and fourth pairs (Pl. VI, fig. 9) are similar in shape, but the fourth is somewhat longer; the femur is linear, about five times as long as broad; the tibia is longer than the femur, is linear in the male, and often also in the female, being about five or six times as long as broad; but in the ovigerous female the joint is more or less inflated, containing highly developed glands. The femur of the fifth pair is a little dilated, being

however four or four and a half times as long as broad; that of the sixth pair (Pl. VI, fig. 10) is more dilated, being about three and a half times as long as broad; the tibia and carpus are narrow and linear in the male and in the not ovigerous female, but much inflated in the female which carries eggs. The seventh pair consist of a single bladder-like joint, which is broader below.

The *pleon* is about as long as the peræon, and is dorsally carinated. The under margin of the segments is feebly curved, the hind corner is sharp-pointed, but scarcely produced.

The *urus* is about as long as the last two pleonal segments together; the first ural segment is thicker, and considerably shorter, than the last coalesced segment. On the under side of the segments run two marginal, serrated ridges.

The first pair of *uropoda* (Pl. VI, fig. 11) in the adult male and female are considerably shorter than the last pair, and do not reach to the middle of that pair; they are more than twice as long as the second pair, and have the inner ramus about half as long as the outer. The second pair (Pl. VI, fig. 12) do not reach beyond the apex of the last coalesced ural segment, and have the outer ramus a fourth part as long as the inner, which is about a sixth part as long as the peduncle. The third pair (Pl. VI, fig. 13, and p. 80, fig. 40) are much shorter than the telson, and have the outer ramus very diminutive being shorter than a twelfth part of the inner.

The *telson* is straight, sharp-pointed, and has serrated margins; it is much longer than the pleon and urus together.

2. **Xiphocephalus Whitei,** Spence Bate, 1862.

The name was given by Spence Bate in honour of Mr. Adam White

Pl. VII, 1—20; and p. 24, fig. 13—17; p. 26, fig. 24; p. 28 fig. 32; p. 29, fig. 45; p. 30, fig. 46 and 47; p. 31, fig. 48 and 49; p. 35, fig. 63 and 64; p. 40, fig. 78, 79, 81, and 82; p. 42, fig. 83 and 85; p. 43, fig. 86; and p. 129, fig. 87.

Diagn. The *head*, without the rostrum, is as long as the first six peræonal segments together. The neck is a little longer than the ocular region. The rostrum is shorter than the peræon and pleon together.

The flagellum of the first pair of *antennæ* in the male is two-jointed.

The seventh *peræonal* segment is not half as long as the sixth; is crescent-shaped, sharp-pointed, and produced downwards.

The epimeral of the first pair of *peræopoda* is obtusely crescent-shaped, and projects forwards. The carpal process of the first pair is smooth, without tooth on the hind margin; the lower hind corner of the metacarpus is sharp-pointed. The femur of the fifth and sixth pairs is narrow, not dilated.

The *pleon* is dorsally carinated.

The first *ural* segment is as long as, or longer than, the last coalesced segment.

The first pair of *uropoda* are about as long as the third; the second pair are longer than the last coalesced ural segment, but shorter than the third pair. The outer ramus of all the three pairs is more than half as long as the inner.

The *telson* is a little longer than the last pair of uropoda, and is shorter than the urus.

Colour. Yellowish white.

Length. 35—75 mm.

Hab. The Southern tropical and subtropical regions of the Atlantic; the Indian Ocean; the tropical regions of the Pacific.

Syn. **1841. Oxycephalus armatus,**	[H. MILNE EDWARDS]. EYDOUX and » SOULEYET.		**8,** p. 267, pl. 4, fig. 13-32.
Rhabdosoma armatum,	» C. CLAUS.	1871.	**23,** p. 155.
» »	» »	1879.	**27,** p. 197 (51).
» »	» »	1887.	**36,** p. 74, pl. 25, fig. 1-6, pl. 26, fig. 5.
»	» TH. STEBBING.	1888.	**39,** p. 1607.
1862. Rhabdosoma Whitei,[1])	SPENCE BATE.		**20,** p. 345, pl.
»	» TH. STREETS.	1878.	**26,** p. 287, pl. 2, fig. 6.
Rhabdonectes »	» C. BOVALLIUS.	1887.	**35,** p. 39.
1887. Rhabdosoma investigatoris,	G. M. GILES. »		**37,** p. 219, pl. 4.

The original description of SPENCE BATE in 1862 was fully sufficient for the identification of his species. I give here the most important passages of it.

»— — Sixth segment of the pleon (= the last coalesced ural segment) not longer than the preceding. — — — First pair of gnathopoda having the coxa (= the epimeral) anteriorly produced to an obtuse point; carpus broadly infero-anteriorly produced as far as the inferior angle of the propodos; propodos short, stout, inferior angle anteriorly produced; dactylos long, arcuate, capable of antagonizing at the apex with the extremity of the carpus only. Second pair of gnathopoda much longer than the first; carpus infero-anteriorly produced beyond the extremity of the propodos, the process being slender and curved, terminating in a fine point; propodos increasing towards the distal extremity, inferior angle slightly anteriorly produced; dactylos arcuate, antagonizing at the extremity with the apex of the carpus. Pereiopoda gradually increasing in length posteriorly, the fourth pair being the longest; fifth obsolete. Antepenultimate pair of pleopoda reaching to half the length of the ultimate; peduncle having the outer margin coarsely, the inner finely serrated: penultimate pair originating on the inner side of the preceding, and longer than the sixth segment of the pleon (= the last coalesced ural segment); peduncle having the outer margin coarsely, the inner finely serrated; ultimate pair nearly as long again as the sixth

1) SPENCE BATE, in his publication of 1861 (**19,** p. 15, pl. 1, fig. 4) gave a drawing of the animal, and mentioned the name *Rhabdosoma Whitei*, but only in the explanation of the plates, and without the slightest description.

segment of the pleon; peduncle having both margins coarsely serrated; rami short, sharp, lanceolate, serrated. Telson cylindrical, reaching beyond the extremity of the ultimate pair of pleopoda, terminating obliquely in a fine point».

From the earlier publication of Eydoux and Souleyet I give the diagnosis and parts of the detailed description:

»Oxycephalus, corpore perangusto, elongatissimo, pellucido et roseo; capite longo, antice rostro longissimo et acuto terminato; ultimis segmentis abdominis longis, angustis et spinosis; ultimo perlongo et acuto».

»La tête, moins longue d'un tiers environ que le reste du corps, est un peu rétrécie après sa naissance et de forme cylindrique; elle présente ensuite un renflement allongé sur lequel se trouvent les yeux qui sont grands, ovalaires, non saillants, et qui ne se distinguent du reste de la tête que par les facettes dont ils sont composés; après cette portion renflée, la tête se rétrécit en un rostre styliforme très-grêle et très-aigu à son sommet, qui est à peu près deux fois aussi long qu'elle. En dessous de la base de ce rostre, en avant des yeux et dans une fossette assez profonde, se trouvent les antennes supérieures ou de la première paire, qui sont courtes, recourbées, composées de trois articles dont le second est très-grand, arqué, cilié en dehors, dilaté au bout et portant le troisième article, qui est très-petit et rudimentaire, au milieu de son bord antérieur. Dans les femelles, cette antenne est également composée de trois articles, mais qui sont d'une forme tout à fait différente; c'est le deuxième article qui est le plus petit, et le troisième, qui est le plus grand, est de forme ovalaire et cilié à son extrémité seulement. — — — — Immédiatement après les parties que nous venons de décrire (= les antennes inférieures), vient le tubercule buccal contre lequel sont appliquées deux paires de petites pattes didactyles, auxquelles font suite quatre autres paires de pattes ambulatoires assez longues, grêles et uniformes dans les mâles, à articles basilaires[1]) plus ou moins renflés chez les femelles. Le dernier segment thoracique est beaucoup plus court que les autres, dans les deux sexes, et dépourvu de la paire de pattes qu'il porte chez les Amphipodes voisins et même chez *l'Oxycephale océanique;* il présente seulement, en dedans, une petite lamelle arrondie

1) This statement, that the femur of the third, fourth, fifth, and sixth pairs of peræopoda in the female is inflated as well as the tibia and carpus, may very likely be right, though I have not observed this feature in any of the species.

qui ne déborde pas ses parois latérales et qui semble être le vestige de la dernière paire de pattes. Les autres pattes portent en dedans et à leur base, des grandes lamelles ovalaires, placées longitudinalement sur les cotés des segments thoraciques et qui, en se croisant par leurs bordes, servent de réceptacle aux oeufs et aux jeunes. L'abdomen est composé de six segments dont les trois premiers sont assez grands et portent chacun une paire de fausses pattes courtes, à tige très-large et terminée par deux filets ciliés. La queue est formée par les trois articles suivants qui sont allongés, minces, cylindriques, épineux en dessus et en dessous, les épines supérieures étant beaucoup plus petites que les inférieures; les deux premiers portent à leur extrémité postérieure de fausses pattes à tige très-longue et très-grêle, et terminées chacune par deux filets ciliés et fort courts[1]), le dernier[2]), aussi long que le précédents, se termine en pointe aigue.»

»— — — les jeunes Oxycéphales sont très-différents des adultes et ont une assez grand ressemblance avec le genre *Pronoé*.»

This description and the excellent drawing clearly prove that the animal examined by EYDOUX, SOULEYET, and GUÉRIN-MÉNEVILLE was a Xiphocephalus Whitei and not a *X. armatus*.

The description given by STREETS in 1878 agrees, in the characteristics recorded by him, with the features shown in the specimens which have been the types for my desription below.

Moreover the short description of *Rhabdosoma armatum* given by STEBBING in 1888 shows that his specimens **A**, **B** and **C** must be referred to Xiphocephalus Whitei.

Lastly I must refer to the new species *Rhabdosoma investigatoris* proposed by G. M. GILES in 1887. He does not give any description of the species but a very good drawing which is reproduced here on a somewhat reduced scale. Notwithstanding the differences, which he points out under five heads, at least the specimen figured is a true Xiphocephalus Whitei, as is easily seen on a comparison with the drawing of an adult male given below (Pl. VII, fig. 9). GILES erroneously considers the specimen figured by him to be an adult female, and says:

1) They do not mention the second pair of uropoda although this pair are distinctly given in their drawing.

2) The telson.

(37, p. 220) »The male differs further in the inferior antennæ being much shorter, and the mandibular appendage correspondingly diminished.» It is clear therefore that both his specimens are males.

Fig. 87. Rhabdosoma investigatoris, GILES. Reduced copy from GILES, 37, pl. 4, fig. 1.

The *head*, without the rostrum, is quite as long as the first six peræonal segments, in the male as well as in the female. The neck is more than a third part longer than the ocular region. The rostrum is about twice as long as the rest of the head, or in the female a little longer; the under margins are serrated. The antennal groove is like that in the preceding species.

The first pair of *antennæ* in the male (Pl. VII, fig. 10) have a two-jointed flagellum; the second joint (Pl. VII, fig. 11) is shorter than a third part of the under margin of the first flagellar joint. In the female this pair (p. 26, fig. 24) have a single-jointed flagellum, which is almost globular at the apex. The first joint of the second pair in the male is the longest, the fifth joint is diminutive.

The *epistoma* (p. 28, fig. 32) is more protruding than in *Xiphocephalus armatus*, and is armed with a sharp-pointed, process in the middle.

The *peræon* (p. 30, fig. 46 and 47) The first segment is about half as long as the second; the seventh is not half as long as the sixth.

The *epimeral* of the first pair of peræopoda is free and articulating with the segment; it is crescent-shaped, with the anteriorly projecting corner obtuse (Pl. VII, fig. 13). The following epimerals are coalesced with the corresponding segments; those of the second, third, and fourth pairs have the under margin very slightly bilobed, with broadly rounded corners; that of the fifth pair has the hind part very deep and broadly rounded; that of the sixth pairs has also the hind part very deep, rounded in front and behind, and with a feebly projecting angle at the

middle (p. 30, fig. 47). The epimeral of the seventh pair has the front corner feebly rounded and the hind part deeply projecting downwards, almost crescent-shaped, with the sharp-pointed apex directed straight downwards. On the manner of bearing the eggs and young see above p. 31 and 43, and also Pl. VII, fig. 20.

The *branchial vesicles* (p. 30, fig. 46) are like those in *Xiphocephalus armatus*, and are attached to the second, third, fourth, fifth, and sixth pairs of peræopoda in the male as well as in the female.

The *peræopoda*. The first pair (Pl. VII, fig. 15) have the carpus comparatively broader than in the preceding species; the carpal process is broadly triangular; the hind margin is entirely smooth, without tooth; the front margin is serrated, and is much longer than the hind margin of the metacarpus, reaching beyond the apex of the dactylus; the hind portion of the metacarpus is produced at the lower corner into a sharp-pointed angle; the dactylus is curved, and is about half as long as the metacarpus. The second pair (Pl. VII, fig. 16) are much longer than the first; the carpal process reaches a little beyond the apex of the metacarpus, but does not attain the apex of the dactylus. The third and fourth pairs are similar in shape and equal in length; the femur is narrower at the base than at the apex; the tibia is longer than the femur, linear in the male and in the not ovigerous female, but inflated, as well as the carpus, in the female which carries more or less developed eggs. The fifth and sixth pairs are similar in shape and subequal in length, the sixth sometimes being a trifle longer than the fifth; the femur is longer than in the two preceding pairs, narrow and linear, about ten or eleven times as long as broad, and a little longer than the tibia; the tibia and carpus are inflated in ovigerous females (p. 42, fig. 85), as I have said above, but linear in the other individuals; the not inflated carpus and the metacarpus of the sixth pair are armed on the front margin with peculiar comb-like sets of spines or bristles fixed on ovate discs (see above p. 35—36 and p. 35, fig. 63—64); the metacarpus is longer than the carpus, and the dactylus is more than a third part as long as the metacarpus. The seventh pair consist of a single, evenly rounded, bladder-like joint.

The *pleon* is carinated; in the male it is considerably longer than the peræon; in the female it is scarcely longer than the last six peræonal segments together. The under margin of the pleonal segments is strongly convex or rather protruding, the hind corner is produced into a tolerably long and sharp-pointed process.

The *urus* is about as long as the whole pleon; in the female it is a little longer; the first ural segment is about as long as, or longer than, the last coalesced segment. Both segments are serrated on the under side.

The first pair of *uropoda* (Pl. VII, fig. 18) are about as long as the last pair, and reach fully to the middle of that pair; the first pair are less than a third part longer than the second pair, and have the inner ramus only a little longer than the outer. The second pair (p. 40, fig. 78) reach beyond the apex of the last coalesced ural segment, and have the outer ramus only a little shorter than the inner. The third pair (p. 40, fig. 79) are distinctly shorter than the telson, and have the outer ramus somewhat more than half as long as the inner (p. 40, fig. 81).

The *telson* (p. 40, fig. 82) is sharp-pointed, and sometimes obliquely bent at the apex; it is considerably shorter than the urus.

3. **Xiphocephalus Lilljeborgi,** n. sp.

The name is given in honour of Professor WILHELM LILLJEBORG of Upsala.

Pl. VII, fig. 21—24.

Diagn. The *head*, without the rostrum, is a little longer than the first five peræonal segments. The neck is scarcely longer than the ocular region. The rostrum is fully as long as the peræon and pleon together.

The seventh *peræonal* segment is more than half as long as the sixth; the hind corner of the epimeral is somewhat produced downwards, and is obtuse at the apex.

The epimeral of the first pair of *peræopoda* is obtusely triangular. The carpal process of the first pair is armed with two small teeth on the hind margin; the lower hind corner of the metacarpus is rounded. The femur of the fifth and sixth pairs is narrow, not dilated.

The *pleon* is dorsally smooth, not carinated.

The first *ural* segment is as long as the last coalesced segment.

The first pair of *uropoda* are considerably longer than the third, the second pair are much longer than the last coalesced

ural segment, and are nearly as long as the third pair. The outer ramus of the first two pairs is nearly as long as the inner; the outer ramus of the third pair is not half as long as the inner.

The *telson* is about as long as the last pair of uropoda, and is as long as the urus.

COLOUR. Light red all over the body.
LENGTH. 45—60 mm.
HAB. The tropical region of the Atlantic, at Lat. 17° 30′ N., Long. 37° 5′ W.

Xiphocephalus Lilljeborgi differs from the other species in the form of the first pair of peræopoda and their epimerals, in the form and length of the seventh peræonal segment, in the length of the first pair of uropoda, and in the relation between the rami of all the three pairs.

The *peræon.* The first segment is about two-thirds as long as the second; the seventh is scarcely a fourth part shorter than the sixth.

The *epimeral* of the first pair of peræopoda is deeper than long, obtusely triangular, with the apex directed straight downwards. That of the seventh pair has the hind corner a little projecting downwards, with the apex obtuse.

The *peræopoda.* The carpal process of the first pair (Pl. VII, fig. 23) is triangular, armed with two low teeth on the hind margin, and provided with two or three broad teeth on the front margin, which is a little longer than the hind margin of the metacarpus, but does not attain the middle of the dactylus; the hind margin of the metacarpus is produced at the lower corner into a rounded and serrated process; the dactylus is strongly curved, and is quite as long as the metacarpus. The second pair (Pl. VII, fig. 24) are much longer than the first; the carpal process is very slender and sharp-pointed, reaching far beyond the apex of the metacarpus, and beyond the middle of the dactylus. The third and fourth pairs are similar in shape and equal in length; the tibia is about as long as the femur. The fifth and sixth pairs are sinilar in shape, but unequal in length, the sixth pair being distinctly longer than the fifth; the metacarpus is scarcely longer than the carpus. The single joint of the seventh pair is almost truncated at the apex.

The *pleon* is not carinated, and is longer than the whole peræon. The under margin of the segments is convex; the hind corner is feebly produced and sharp-pointed.

The *urus* is scarcely longer than the last two pleonal segments together, and is thicker, and more robust, than in the two preceding species. The first segment is quite as long as the last coalesced segment.

The first pair of *uropoda* are about a fifth part longer than the last pair, and reach far beyond the middle of that pair; the first pair are more than a third part longer than the second, and have the outer ramus about as long as the inner. The second pair reach far beyond the apex of the last coalesced ural segment, and have the outer ramus only a little shorter than the inner. The third pair reach almost to the apex of the telson, and have the outer ramus not half as long as the inner.

The *telson* is comparatively thick, is straight and sharp-pointed, and is quite as long as the urus.

4. **Xiphocephalus brevicaudatus,** TH. STEBBING, 1888.

Diagn. The *head*, without the rostrum, is longer than the whole peræon. The neck is a third part longer than the ocular region.

The seventh *peræonal* segment is only a little shorter than the sixth; the hind part of the epimeral is somewhat deeper than the front part, and is broadly rounded.

The epimeral of the first pair of *peræopoda* is as deep as long (?), with rounded corners. The carpal process of the first pair is finely denticulated on the hind margin; the lower hind corner of the metacarpus is squared. The femur of the fifth and sixth pairs is moderately dilated.

The *pleon* is dorsally smooth, not carinated (?).

The first *ural* segment is half as long as the last coalesced segment.

The first pair of *uropoda* are much longer than the third; the second pair are much longer than the last coalesced ural segment, and are quite as long as the third pair. The outer ramus of the first pair is about half as long as the inner; that of the second pair is not a sixth part as long as the inner; that of the third pair is minute, not a tenth part as long as the inner.

COLOUR. ?

LENGTH. »The specimen outstretched measured four-fifths of an inch, the rostrum being broken» (STEBBING).

HAB. »North Atlantic, Lat. 10° 55′ N., Long. 17° 46′ W. surface. — — One specimen, female» (STEBBING).

Syn. **1888. Rhabdosoma brevicaudatum,** TH. STEBBING **39,** p. 1612, pl. 208.

Xiphocephalus brevicaudatus comes near to *X. armatus* in the form of the first and seventh peræonal segments, in the somewhat dilated femora of the fifth and sixth pairs, in the short first ural segment, and in the very short outer rami of the uropoda; to *X. Lilljeborgi* it shows relationship in the form of the first pair of peræopoda, and in the length of the peduncle of the first two pairs of uropoda. From all the other species it is easily distinguished by the serration of the hind margin of the carpal process in the first pair of peræopoda.

For further details I refer the reader to STEBBING's work.

ALPHABETICAL INDEX
of genera and species.

The names in *italics* are synonyms; the **big** figures give the page where the genus or species in question is more or less fully described.

Calamorhynchus . . . . . p. 7, 46, **72.**
„ **pellucidus** . . . . . „ 7, **73.**
„ **rigidus** . . . . . „ 11, **74.**
Carcinornis . . . . . „ 6.
„ *acutirostris* . . . . . „ 6.
„ *inflaticeps* . . . . . „ 6.
Cranocephalus . . . . . „ 11, 47, **94.**
„ **Goësi** . . . . . „ 11, **95.**
Cheiropristis messanensis . . . . . „ 9.

Dorycephalus . . . . . „ 11, 46, **75.**
„ **ambobus** . . . . . „ **79.**
„ **Lindstroemi** . . . . . „ 10, **76.**

Erpetoramphus . . . . . „ 4.
„ *Costæ* . . . . . „ 4.

Glossocephalus . . . . . „ 9, 47, **105.**
„ **Milne-Edwarsi** . . . . . „ 9, **106.**
„ **spiniger** . . . . . „ 9, **108.**

Leptocotis . . . . . „ 7, 47, **110.**
„ *ambobus* . . . . . „ 11, 79.
„ *Lindstroemi* . . . . . „ 10, 76.
„ *mindanaonis* . . . . . „ 11, 94.
„ **spinifera** . . . . . „ 7, **111.**
„ **tenuirostris** . . . . . „ 10, **113.**

Macrocephalus . . . . . „ 5, 116, 117.
„ *longirostris* . . . . . „ 5, 119, 121.

Natalius . . . . . „ 6, 54.
„ *candidissimus* . . . . . „ 6, 55.

Orio . . . . . p. 2, 54.
„ *ornithoramphus* . . . . . „ 2, 4, 55.
„ *oxyahingus* . . . . . „ 2.
„ *oxyrhynchus* . . . . . „ 4.
„ *xancleus* . . . . . „ 9.
Ornithoramphus . . . . . „ 4. 54.
„ *Coccoi* . . . . . „ 4, 55.
Oxycephalus . . . . . „ 2. 46, **54.**
„ *armatus* . . . . . „ 3, 55, 119, 126.
„ *bulbosus* . . . . . „ 7, 55. 57.
„ **Clausi** . . . . . „ 9, 55, **60.**
„ *Edwardsii* . . . . . „ 8, 55, 57
„ **latirostris** . . . . . „ 8, 9, 55, **66.**
„ *longiceps* . . . . . „ 8, 9, 11, 55, 90, 92.
„ *oceanicus* . . . . . „ 3, 4, 55, 57.
„ **pectinatus** . . . . . „ 9, 55, **64.**
„ **piscator** . . . . . „ 3, 8, 55, **56.**
„ *piscatoris* . . . . . „ 2, 9, 55, 57.
„ *piscatorius* . . . . . „ 3.
„ *porcellus* . . . . . „ 8, 9, 55, 83.
„ *pronoïdes* . . . . . „ 9, 55, 85.
„ *sclerotieus* . . . . . „ 7, 55, 99.
„ *similis* . . . . . „ 8, 55, 57.
„ *Steenstrupi* . . . . . „ 9, 55, 90.
„ *tenuirostris* . . . . . „ 8, 55, 113.
„ **tuberculatus** . . . . . „ 5, 55, **62.**
„ *typhoïdes* . . . . . „ 8, 55, 101.

Rhabdosoma . . . . . „ 3, 116.
„ *armatum* . . . . . „ 3, 117, 119, 126.
„ *Batei* . . . . . „ 9, 117.
„ *brevicaudatum* . . . . . „ 11, 134.
„ *investigatoris* . . . . . „ 10, 117, 128.
„ *Whitei* . . . . . „ 5, 126.
Rhabdonectes . . . . . „ 10, 116.
„ *armatus* . . . . . „ 10, 119.
„ *Whitei* . . . . . „ 10, 126.

Schnehagenia . . . . . „ 7.
Simorhynchotus . . . . . „ 11, 46, **47.**
„ **antennarius** . . . . . „ 7, **49.**
„ **Lilljeborgi** . . . . . „ 48, **52.**
„ **Stebbingi** . . . . . „ 48, **50.**
Simorhynchus . . . . . „ 7, 48.
„ *antennarius* . . . . . „ 7, 49, 51.

Stebbingella . . . . . p. 11, 47, 97.
„ sclerotica . . . . . „ 11, 98.
„ Théeli . . . . . „ 11, 101.
„ typhoïdes . . . . . „ 11, 100.
Streetsia . . . . . „ 11, 46, 80.
„ carinata . . . . . „ 81, 87.
„ Challengeri . . . . . „ 11, 82.
„ longiceps . . . . . „ 11, 92.
„ mindanaonis . . . . . „ 93.
„ porcellus . . . . . „ 11, 83.
„ pronoïdes . . . . . „ 11, 84.
„ Steenstrupi . . . . . „ 11, 89.

Tullbergella . . . . . „ 10, 46, 68.
„ cuspidata . . . . . „ 10, 69.

Xiphocephalus . . . . . „ 3, 11, 116.
„ armatus . . . . . „ 118, 119.
„ brevicaudatus . . . . . „ 118, 133.
„ Lilljeborgi . . . . . „ 11, 118, 131.
„ Whitei . . . . . „ 118, 125.

LIST OF ILLUSTRATIONS IN THE TEXT.

Fig. 1. *Tullbergella cuspidata*, from the side, ♀. (Drawn by the author) p. 20.

„ 2. *Xiphocephalus armatus*, „ „ „ ♂. „ „ „ „ „ „

„ 3. *Stebbingella Théeli*, „ above, ♀. „ „ „ „ „ 21.

„ 4. *Oxycephalus Clausi*, „ the side, ♀. „ „ A. M. Westergren) „ „

„ 5. *Cranocephalus Goësi*, „ above, ♂. „ „ the author) „ „

„ 6. The head of *Glossocephalus Milne-Edwardsi*, from the side, „ „ „ „ „ 22.

„ 6a. The same from above „ „ „ „ „ „

„ 7. The head of *Oxycephalus Clausi*, from above ♂. (Drawn by A. M. Westergren) „ „

„ 8. „ „ „ „ „ „ „ ♀. „ „ „ „ „

„ 9. „ „ „ *Streetsia pronoïdes*, „ „ ♀. „ „ the author) „ 23.

„ 10. „ „ „ *Leptocotis spinifera*, „ „ ♀. (Facsimile from Streets, **26**) „ „

„ 11. „ „ „ *Calamorhynchus pellucidus*, „ „ ♀. „ „ „ „ „ „

„ 12. „ „ „ *Tullbergella cuspidata*, „ „ ♀. (Drawn by the author) „ „

„ 13 and 14. Eye-elements of *Xiphocephalus Whitei*. „ „ A. M. Westergren) „ 24.

„ 15. A piece of the surface of the eye of the same animal. „ „ „ „ „

„ 16 and 17. Hexagonal facets from the surface of the eye of the same. „ „ „ „ „

„ 18. The first pair of antennæ of *Tullbergella cuspidata*, ♂. „ „ „ „ 25.

„ 19. „ „ „ „ „ „ *Oxycephalus pectinatus*, ♂. „ „ „ „ „

„ 20. The last flagellar joints in the first pair of antennæ of *Streetsia Steenstrupi*, ♂. „ „ „ „ „

„ 21. The first pair of antennæ of *Oxycephalus pectinatus*, young ♂. „ „ „ „ „

„ 22. „ „ „ „ „ „ *Oxycephalus Clausi*, young ♂. „ „ „ „ „

Fig. 23. The first pair of antennæ of *Tullbergella cuspidata*, ♀. (Drawn by the author) p. 25.
„ 24. „ „ „ „ „ „ *Xiphocephalus Whitei*, ♀. „ „ „ „ „ 26.
„ 25. „ „ „ „ „ „ *Simorhynchotus Lilljeborgi*, ♀. „ „ „ „ „ „
„ 26. „ „ „ „ „ „ *Glossocephalus spiniger*, ♀. „ „ „ „ „ „
„ 27. The forepart of the body of *Tullbergella cuspidata*, ♂. „ „ A. M. Westergren) „ „
„ 28. The second pair of antennæ of *Simorhynchotus Lilljeborgi*, ♂. „ „ „ „ 27.
„ 29. „ „ „ „ „ „ *Oxycephalus pectinatus*, ♂. „ „ „ „ „
„ 30. „ „ „ „ „ „ *Stebbingella typhoïdes*, ♂. (Reduced copy from Claus, 36) „ „
„ 31. The last joint of the second pair of antennæ of *Dorycephalus Lindstroemi*. (Drawn by the author) „ „
„ 32. Epistoma of *Xiphocephalus Whitei*, ♂. „ „ „ „ „ 28.
„ 33. Labrum of *Oxycephalus piscator*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 34. Mandible of *Simorhynchotus Lilljeborgi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 35. „ „ *Oxycephalus piscator*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 36. „ „ „ „ young, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 37. „ „ „ „ ♀. „ „ „ „ „ 29.
„ 38. „ „ *Streetsia Steenstrupi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 39. „ „ *Dorycephalus Lindstroemi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 40. Labium of *Tullbergella cuspidata*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 41 and 42. Maxillipeds of *Oxycephalus piscator*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 43. „ „ *Glossocephalus spiniger*, ♀. „ „ „ „ „ „
„ 44. „ „ *Dorycephalus Lindstroemi*, ♂ „ „ „ „ „ „
„ 45. „ „ *Xiphocephalus Whitei*, ♀. „ „ „ „ „ „
„ 46. The first two peræonal segments of *Xiphocephalus Whitei*, ♂. „ „ A. M. Westergren) „ 30.
„ 47. The sixth and seventh peræonal segments of the same animal, ♂. „ „ the author) „ „

Fig. 48. The fourth peræonal segment of the same animal, with a row of eggs, ♀. (Drawn by A. M. Westergren) p. 31.
„ 49. The sixth peræonal segment of the same animal with a row of nearly hatched young, ♀. „ „ „ „ „
„ 50. The first pair of peræopoda of *Simorhynchotus Lilljeborgi*, ♂. „ „ the author) „ 32.
„ 51. „ „ „ „ „ „ *Tullbergella cuspidata*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 52. „ „ „ „ „ „ *Streetsia Steenstrupi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 53. „ „ „ „ „ „ *Cranocephalus Goësi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 54. The second pair of peræopoda of *Oxycephalus Clausi*, ♂. „ „ the author) „ 33.
„ 55. „ „ „ „ „ „ *Streetsia Steenstrupi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 56. The first „ „ „ „ *Dorycephalus Lindstroemi*, ♂. „ „ A. M. Westergren) „ „
„ 57. „ „ „ „ „ „ *Xiphocephalus armatus*, ♂. „ „ the author) „ 34.
„ 58. The seventh pair of peræopoda of *Streetsia carinata*, ♀. „ „ „ „ „ „
„ 59. „ „ „ „ „ „ *Tullbergella cuspidata*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 60. „ „ „ „ „ „ *Stebbingella Théeli*, ♂. „ „ „ „ „ 35.
„ 61. „ „ „ „ „ „ *Tullbergella cuspidata*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 62. The sixth „ „ „ „ *Streetsia pronoïdes*, ♀.[1] „ „ „ „ „ „
„ 63. Peculiar sensitive organs from the carpus of the sixth pair in *Xiphocephalus Whitei*, ♂. „ „ A. M. Westergren) „ „
„ 64. Similar organs from the metacarpus of the sixth pair in the same animal, ♂. „ „ „ „ „
„ 65. The dactylus of the first pair of peræopoda of *Oxycephalus Clausi*, ♂. „ „ the author) „ 36.
„ 66. Coupling spine from the first pair of pleopoda of *Oxycephalus piscator*, ♂. „ „ „ „ „ „

1) Wrongly named Streetsia carinata in the text, p. 35.

Fig. 67. Coupling spines from the first pair of pleopoda of *Simorhynchotus Lilljeborgi*, ♂. (Drawn by the author) p. 36.
„ 68 and 69. Cleft bristle from the first pair of pleopoda of *Oxycephalus piscator*, ♂. „ „ „ „ „ 37.
„ 70. Cleft bristle from the first pair of pleopoda of *Simorhynchotus Lilljeborgi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 71. The urus of *Glossocephalus Milne Edwardsi* ♂. „ „ „ „ „ 38.
„ 72. „ „ „ *Cranocephalus Goësi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 73. „ „ „ *Dorycephalus Lindstroemi*, ♂. „ „ A. M. Westergren) „ „
„ 74. „ „ „ *Tullbergella cuspidata*, ♂. „ „ the author) „ „
„ 75. „ „ „ *Oxycephalus piscator*, ♂. „ „ „ „ „ 39.
„ 76. „ „ „ *Simorhynchotus Lilljeborgi*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 77. The inner ramus of the first pair of uropoda in *Dorycephalus Lindstroemi*, ♂. „ „ A. M. Westergren) „ „
„ 78. The second pair of uropoda of *Xiphocephalus Whitei*, ♀. „ „ the author) „ 40.
„ 79. „ third „ „ „ „ *X. Whitei*, ♀. „ „ „ „ „ „
„ 80. „ third „ „ „ „ *Xiphocephalus armatus*, ♂. „ „ „ „ „ „
„ 81. The inner ramus of the third pair of uropoda of *Xiphocephalus Whitei*, ♀. „ „ A. M. Westergren) „ „
„ 82. The telson of the same animal, ♀. „ „ „ „ „
„ 83. Cutaneous gland form the margin of the epimeral in the first pair of peræopoda of *Xiphocephalus Whitei*, ♂. „ „ „ „ 42.
„ 84. The dactylus of the first pair of peræopoda of *Oxycephalus latirostris*, ♀. „ „ „ „ „
„ 85. The tibia of the fourth pair of peræopoda in *Xiphocephalus Whitei*, filled with glands, ♀. „ „ „ „ „
„ 86. A young of *Xiphocephalus Whitei*. „ „ the author) „ 43.
„ 87. *Xiphocephalus Whitei*, from the side, young ♂. (Facsimile from Giles, 37) „ 129.

PLATE I.

Simorhynchotus Lilljeborgi, Oxycephalus piscator, and O. Clausi.

PLATE I.

Simorhynchotus Lilljeborgi, C. Bovallius.

Fig. 1. The male from the side. (Drawn by the author.)
„ 2. The first pair of antennæ, ♂. „ „ „ „
„ 3. The head of the female. „ „ „ „
„ 4. The last flagellar joints of the first pair of antennæ, ♀. „ „ „ „
„ 5. The second pair of peræopoda, ♂. „ „ „ „
„ 6. The sixth „ „ „ ♂. „ „ „ „
„ 7. The dactylus of the seventh pair of peræopoda, ♂. „ „ „ „

Oxycephalus piscator, H. Milne Edwards.

Fig. 8. The male from the side. (Facsimile from H. Milne Edwards, 7.[1])
„ 9. A young male from the side. (Drawn by the author.)
„ 10. A female from the side. (Reduced copy from Claus, **36**.)
„ 11. The first pair of peræopoda, ♂. (Drawn by the author.)
„ 12. The dactylus of the same pair, ♂. „ „ „ „
„ 13. The second pair of peræopoda, ♂. „ „ „ „
„ 14. The seventh „ „ „ ♂. „ „ „ „
„ 15. The dactylus of the same pair, ♂. „ „ „ „
„ 16. A female from the side (*O. bulbosus*). (Facsimile from Streets, **26**.)
„ 17. The first pair of peræopoda, ♀. „ „ „ „
„ 18. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „

Oxycephalus Clausi, C. Bovallius.

Fig. 19. The male from the side. (Drawn by A. M. Westergren.)
„ 20. „ „ „ „ „ (Facsimile from Streets, **26**.)
„ 21. The first pair of peræopoda, ♂. „ „ „ „
„ 22. The second „ „ „ ♂. „ „ „ „
„ 23. The sixth „ „ „ ♂. (Drawn by A. M. Westergren.)
„ 24. The metacarpus of the seventh pair, ♂. „ „ „

[1]) The figures refer to the bibliographical list above, p. 2—10.

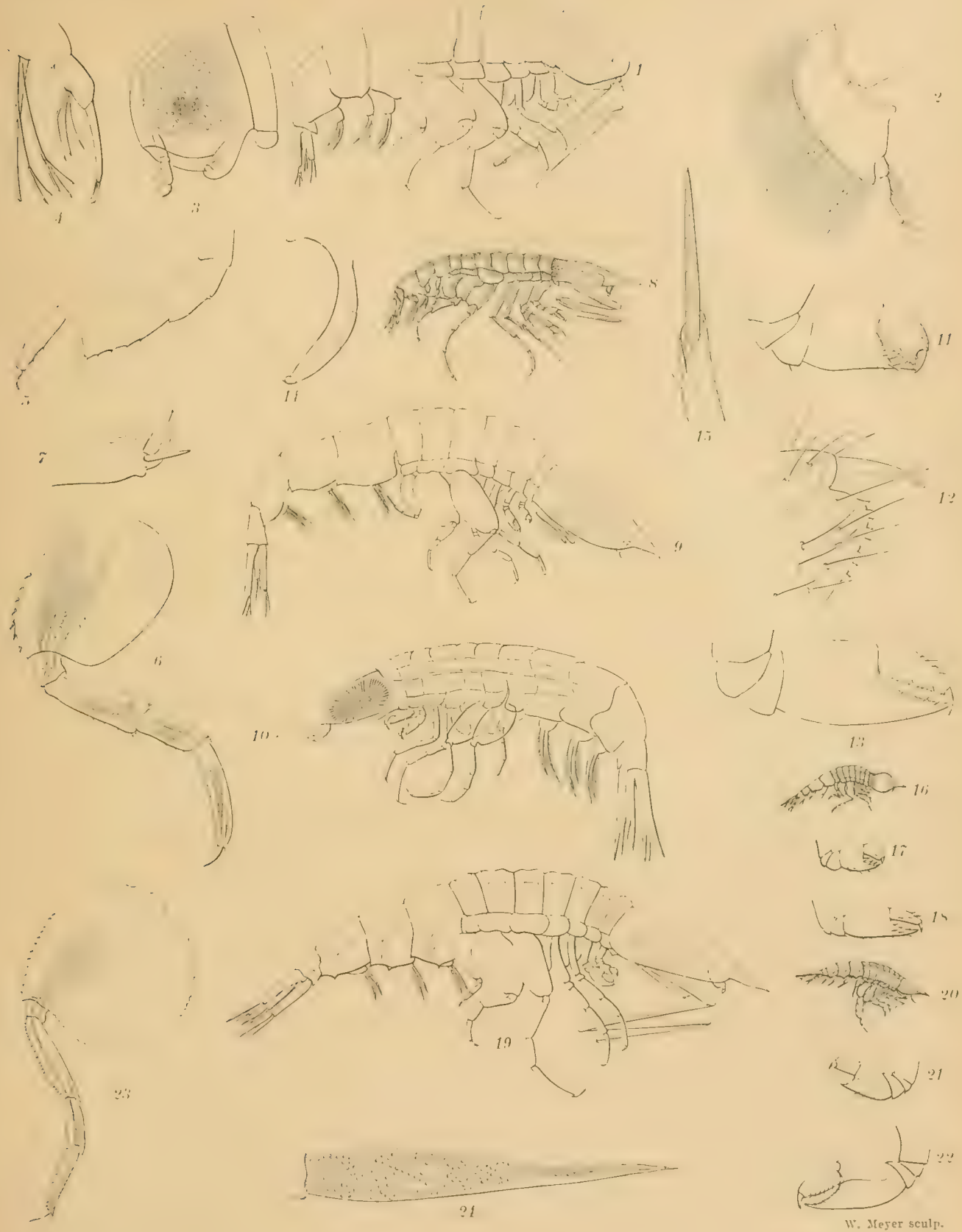


Fig. 1—7. Simorhynchotus Liljeborgi. Fig. 8—18. Oxycephalus piscator. Fig. 19—24. Oxycephalus Clausi.

PLATE II.

Oxycephalus Clausi, O. tuberculatus, O. pectinatus, O. latirostris, Tullbergella cuspidata, Calamorhynchus pellucidus and Dorycephalus Lindstroemi.

PLATE II.

Oxycephalus Clausi, C. Bovallius.

Fig. 1. The urus, ♂. (Drawn by the author.)

Oxycephalus tuberculatus, Spence Bate.

Fig 2. The animal from the side. (Facsimile from Spence Bate, **20.**)
„ 3. The second pair of peræopoda. „ „ „ „

Oxycephalus pectinatus, C. Bovallius.

Fig. 4. The head from above, ♂. (Drawn by A. M. Westergren.)
„ 5. The first pair of peræopoda, ♂. „ „ „
„ 6. The second „ „ „ ♂. „ „ „

Oxycephalus latirostris, Claus.

Fig. 7. The female from the side. (Drawn by the author.)
„ 8. „ „ „ „ „ (Reduced copy from Claus, **36.**)
„ 9. The first pair of peræopoda, ♀. (Drawn by the author.)
„ 10. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „
„ 11. The dactylus of the seventh pair of peræopoda, ♀. „ „ „ „
„ 12. The urus, ♀. „ „ „ „

Tullbergella cuspidata, C. Bovallius.

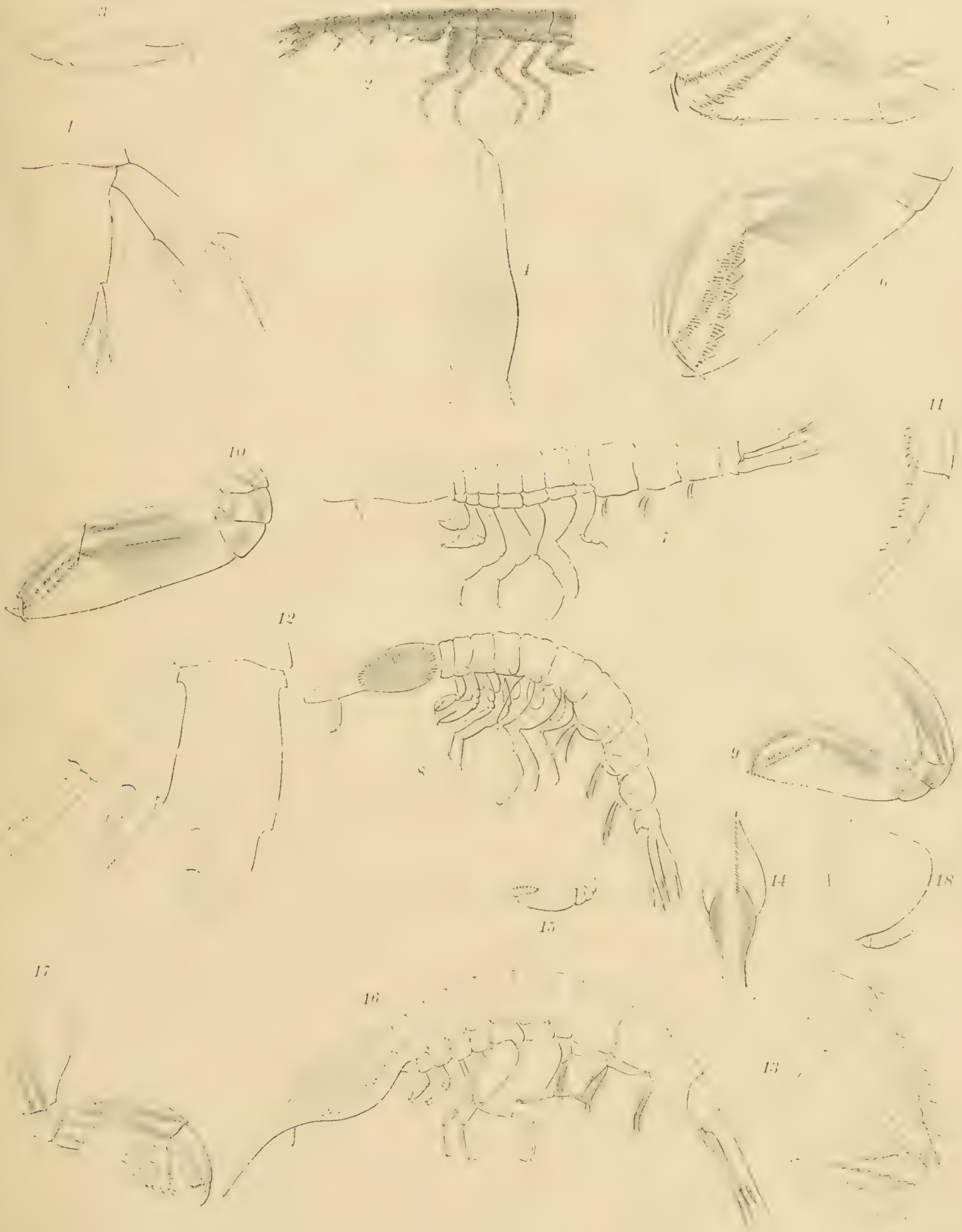
Fig. 13. The second pair of peræopoda, ♂. (Drawn by the author.)

Calamorhynchus pellucidus, Th. Streets.

Fig. 14. The head from above, ♀. (Facsimile from Streets, **20.**)
„ 15 The second pair of peræopoda, ♀. „ „ „ „

Dorycephalus Lindstroemi, C. Bovallius.

Fig. 16. The female from the side. (Drawn by the author.)
„ 17. The second pair of peræopoda, ♂. „ „ A. M. Westergren.)
„ 18. The seventh „ „ „ ♂. „ „ the author.)



W. Meyer sculp.

Fig. 1. Oxycephalus Clausi. Fig. 2—3. Oxycephalus tuberculatus. Fig. 4—6. Oxycephalus pectinatus. Fig. 7—12. Oxycephalus . . rstris. Fig. 13. Tullbergella cuspidata. Fig. 14, 15. Calamorhynchus pellucidus. Fig. 16—18. Dorycephalus Lindstroemi.

PLATE III.

Dorycephalus Lindstroemi, Streetsia Steenstrupi, S. pronoïdes, and S. carinata.

PLATE III.

Dorycephalus Lindstroemi, C. Bovallius.

Fig. 1. The male from the side. (Drawn by A. M. Westergren.)

Streetsia Steenstrupi, C. Bovallius.

Fig. 2. The male from the side (Drawn by A. M. Westergren.)
„ 3. The first pair of antennæ, ♂. „ „ „
„ 4. The dactylus of the fourth pair of peræopoda, ♂. „ „ „
„ 5. The carpus and metacarpus of the sixth pair of peræopoda, ♂. „ „ „
„ 6. The urus, ♂. „ „ the author).

Streetsia pronoïdes, C. Bovallius.

Fig. 7. The female from the side. (Drawn by the author.)
„ 8. The first pair of peræopoda, ♀. „ „ „ „
„ 9. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „
„ 10. The sixth „ „ „ ♀. „ „ „ „
„ 11. The seventh „ „ „ ♀. „ „ „ „
„ 12. The urus „ „ „ ♀. „ „ „ „

Streetsia carinata, n. sp.

Fig. 13. The first pair of peræopoda, ♀. (Drawn by the author.)
„ 14. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „
„ 15. The urus „ „ „ ♀. „ „ „ „

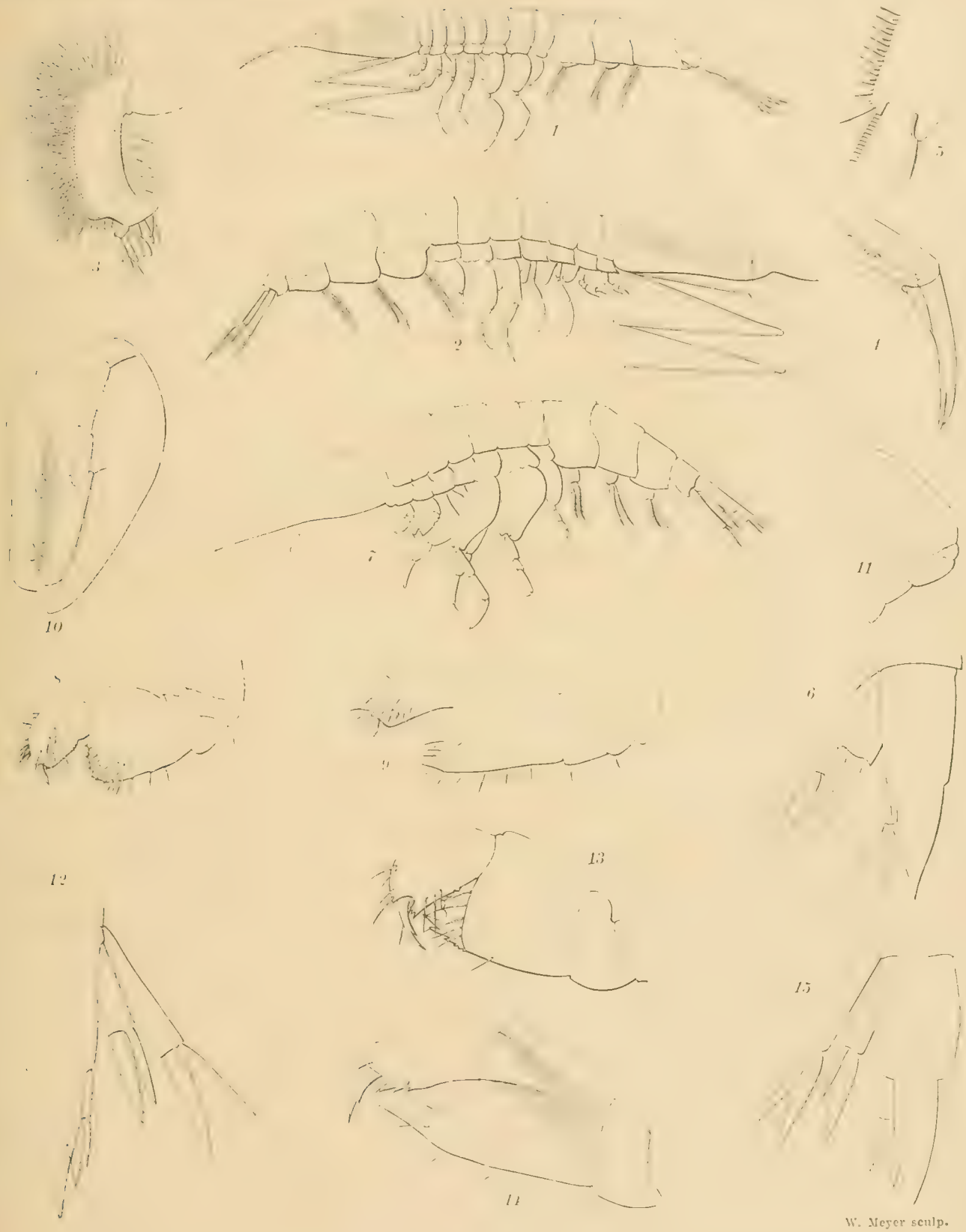


Fig. 1. Dorycephalus Lindstroemi. Fig. 2—6. Streetsia Steenstrupi. Fig. 7—12. Streetsia pronoides.
Fig. 13—15. Streetsia carinata.

PLATE IV.

Streetsia carinata, Streetsia longiceps, Streetsia porcellus, Cranocephalus Goësi, Stebbingella typhoïdes and Stebbingella sclerotica.

PLATE IV.

Streetsia carinata, n. sp.

Fig. 1. The female from the side. (Drawn by the author.)
„ 2. The head from above, ♀. „ „ „ „

Streetsia longiceps, C. Claus.

Fig. 3. The female from the side. (Reduced copy from Claus, **36**.)

Streetsia porcellus, C. Claus.

Fig. 4 The female from the side. (Reduced copy from Claus, **36**.)
„ 5. The first pair of peræopoda, ♀. „ „ „ „ „
„ 6. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „ „

Cranocephalus Goësi, n. sp.

Fig. 7. The male from the side. (Drawn by the author.)
„ 8. The first pair of antennæ, ♂. „ „ „ „
„ 9. The second pair of peræopoda, ♂. „ „ „ „

Stebbingella typhoïdes, C. Claus.

Fig. 10. The male from the side. (Reduced copy from Claus, **36**.)
„ 11. The animal from above. „ „ „ „ „
„ 12. The second pair of peræopoda. „ „ „ „ „

Stebbingella sclerotica, Th. Streets.

Fig. 13. The male from the side. (Facsimile from Streets, **26**.)
„ 14. The head of the female. „ „ „ „
„ 15. The first pair of peræopoda. „ „ „ „
„ 16. The second „ „ „ „ „ „ „ „

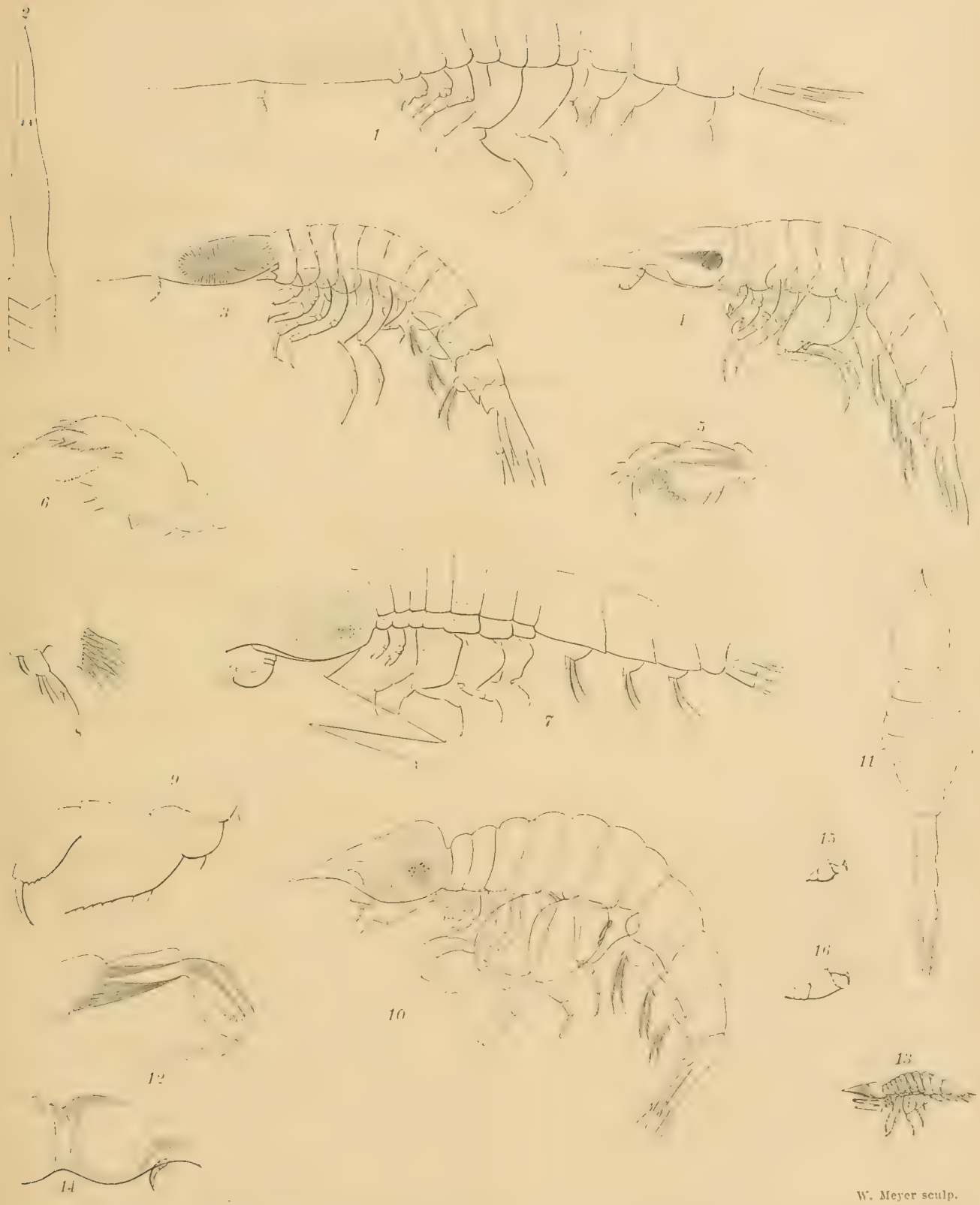


Fig. 1—2. Streetsia carinata. Fig. 3. Streetsia longiceps. Fig. 4—6. Streetsia porcellus. Fig. 7—9. Cranocephalus Goësi.
Fig. 10—12. Stebbingella typhoides. Fig. 13—16. Stebbingella sclerotica.

PLATE V.

Stebbingella Théeli, Glossocephalus Milne-Edwardsi, G. spiniger, Leptocotis tenuirostris, and L. spinifera.

PLATE V.

Stebbingella Théeli, n. sp.

Fig. 1. The male from the side. (Drawn by A. M. Westergren).
„ 2. The first pair of peræopoda, ♂. „ „ the author).
„ 3. The second „ „ „ ♂. „ „ „ „
„ 4. The urus, ♂. „ „ „ „

Glossocephalus Milne-Edwardsi, C. Bovallius.

Fig. 5 The male from the side. (Drawn by A. M. Westergren).

Glossocephalus spiniger, C. Bovallius.

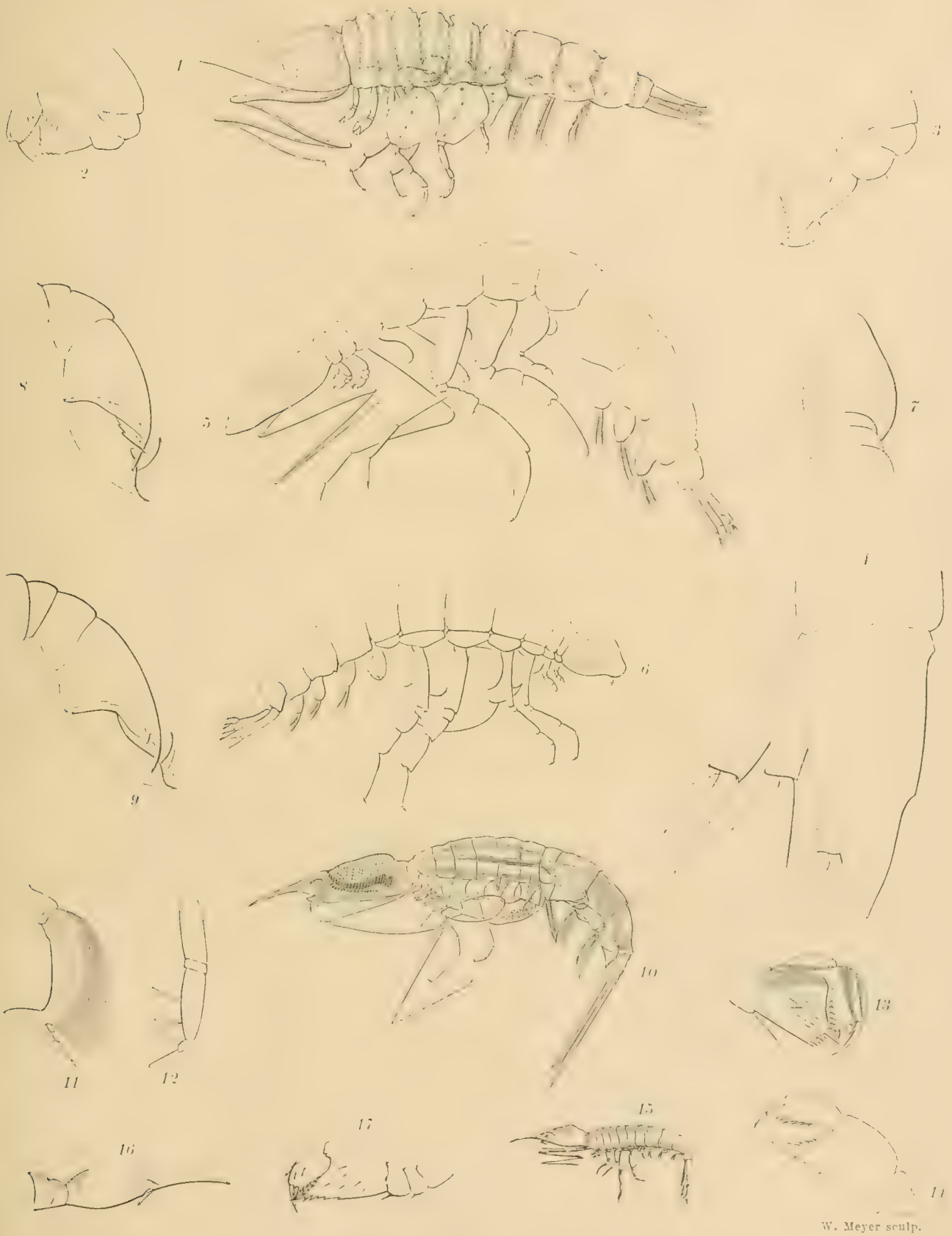
Fig. 6. The female from the side. (Drawn by the author).
„ 7. The head from above, ♀. „ „ „ „
„ 8. The first pair of peræopoda, ♀. „ „ „ „
„ 9. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „

Leptocotis tenuirostris, C. Claus.

Fig. 10. The male from the side. (Reduced copy from Claus, **36**).
„ 11. The first pair of antennæ, ♂. „ „ „ „ „
„ 12. The „ „ „ „ ♀. „ „ „ „ „
„ 13. The „ „ „ peræopoda, ♂. „ „ „ „ „
„ 14. The second „ „ „ ♂. „ „ „ „ „

Leptocotis spinifera, Th. Streets.

Fig. 15. The male from the side. (Facsimile from Streets, **26**).
„ 16. The head of the female from the side. „ „ „ „
„ 17. The second pair of peræopoda. „ „ „ „



W. Meyer sculp.

Fig. 1—4. Stebbingella Théeli. Fig. 5. Glossocephalus Milne-Edwardsi. Fig. 6—9. Glossocephalus spiniger. Fig. 10—14. Leptocotis tenuirostris. Fig. 15—17. Leptocotis spinifera.

PLATE VI.

Xiphocephalus armatus.

PLATE VI.

Xiphocephalus armatus, H. Milne Edwards.

Fig.	1.	The female from the side.	(Drawn by the author).
„	2.	The male „ „ „	„ „ „ „
„	3.	The first pair of antennæ, ♂.	(Drawn by A. M. Westergren).
„	4.	„ „ „ „ „ ♀.	„ „ „
„	5.	The last two peræonal segments, ♂.	„ „ the author).
„	6.	The epimeral of the first pair, ♂.	„ „ „ „
„	7.	The first pair of peræopoda, ♂.	„ „ „ „
„	8.	The second „ „ „ ♂.	„ „ „ „
„	9.	The fourth „ „ „ ♀.	„ „ „ „
„	10.	The sixth „ „ „ ♀.	„ „ „ „
„	11.	The first „ „ uropoda, ♂.	„ „ „ „
„	12.	The third „ „ „ ♂.	„ „ „ „
„	13.	The second „ „ „ ♂.	„ „ „ „
„	14.	The female from the side.	(Facsimile from Adams and White, 9).
„	15.	The first pair of antennæ, ♀.	„ „ Spence Bate, 20).
„	16.	The „ „ „ peræopoda, ♀.	„ „ „ „
„	17.	The second „ „ „ ♀.	„ „ „ „
„	18.	The female from the side, ♀.	„ „ Streets, 26).
„	19.	The first pair of peræopoda, ♀.	„ „ „ „
„	20.	The second „ „ „ ♀.	„ „ „ „

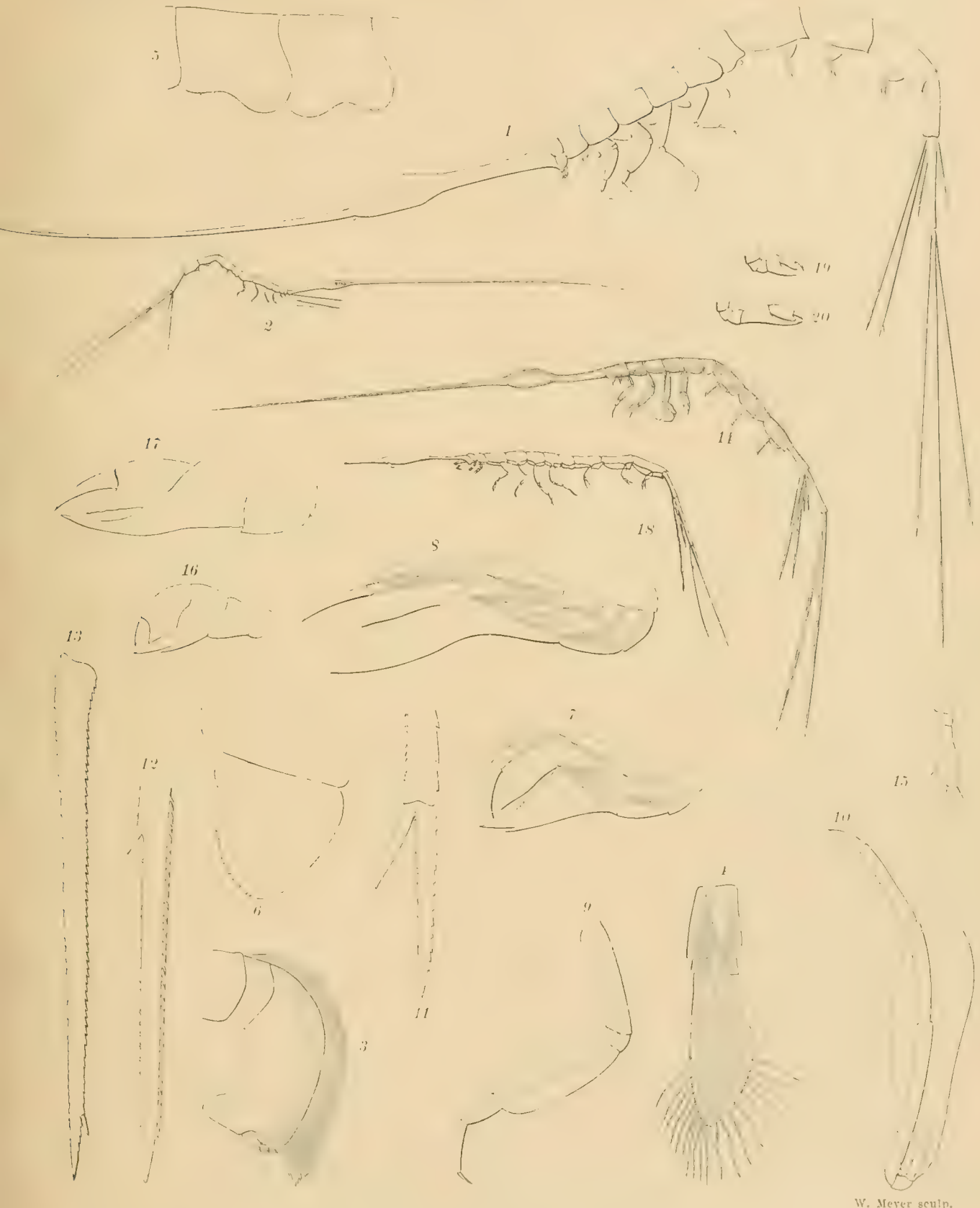


Fig. 1—20. Xiphocephalus armatus.

PLATE VII.

Xiphocephalus Whitei and X. Lilljeborgi.

PLATE VII.

Xiphocephalus Whitei, Spence Bate.

Fig. 1. The male from the side. (Reduced copy from Eydoux and Souleyet, 9).
„ 2. The „ „ „ „ (Facsimile from Spence Bate, 20).
„ 3. The first pair of antennæ, ♂. „ „ „ „
„ 4. The „ „ „ peræopoda, ♂. „ „ „ „
„ 5. The second „ „ „ ♂. „ „ „ „
„ 6. The female from the side. (Facsimile from Streets, 26).
„ 7. The first pair of peræopoda, ♀. „ „ „ „
„ 8. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „
„ 9. The male from the side. (Drawn by the author).
„ 10. The first pair of antennæ, ♂. (Drawn by A. M. Westergren).
„ 11. The second flagellar joint of the same pair, ♂. „ „ „
„ 12. The last two joints of the mandibular palp, ♂. „ „ „
„ 13. The epimeral of the first pair of peræopoda, ♂. „ „ the author).
„ 14. The front end of the same, ♂. „ „ A. M. Westergren).
„ 15. The first pair of peræopoda, ♀. „ „ the author).
„ 16. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „
„ 17. The seventh „ „ „ ♂. „ „ „ „
„ 18. The first „ „ uropoda, ♂. „ „ „ „
„ 19. The apex of the inner ramus of the second pair of uropoda, ♂. „ „ A. M. Westergren).
„ 20. The female from the side. „ „ the author).

Xiphocephalus Lilljeborgi, n. sp.

Fig. 21. The female from the side. (Drawn by the author).
„ 22. The first pair of antennæ, ♀. „ „ „ „
„ 23. The „ „ „ peræopoda, ♀. „ „ „ „
„ 24. The second „ „ „ ♀. „ „ „ „

W. Meyer sculp.

Lith. Inst. Lithographique de Weber. Fig. 21— Aut. Nat. Wahlus Liljeborgi.

17

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ VOL. XIV.

FASCICULUS POSTERIOR.

LAPUFLIED

UPSALIÆ,
EXCUDIT ED. BERLING REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.
MDCCCXCI.

INDEX

HUJUS FASCICULI.

		Pag.	Tab.
	Introductio	I—XVII.	
I.	Söderblom, A.: De la convergence du développement analytique de la fonction elliptique $p(u)$ et du calcul de la valeur de l'argument u, la valeur de la fonction $p(u)$ étant donnée	1—67.	
II.	Pfannenstiel, E.: Eine Methode zur Berechnung des Integrals $\int_{-x}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z_3 - g_2 z - g_3}}$	1—24.	
III.	Solander, E.: Die magnetische Inklination in Upsala und Stockholm	1—15.	
IV.	Solander, E.: Ueber den Einfluss der Fadentorsion bei magnetischen Ablenkungsversuchen	1—10.	
V.	Juhlin, J.: Sur la température nocturne de l'air à différentes hauteurs	1—24.	
VI.	Solander, E.: Modificierte Lloydsche Wage	1—15.	
VII.	Solander, E.: Konstantenbestimmung mit einem Lamontschen Theodolit	1—32.	
VIII.	Berger, A.: Déduction des propriétés principales de la fonction elliptique générale du second ordre	1—50.	
IX.	Dunér, N. C.: Recherches sur la rotation du Soleil	1—78.	I.

DE LA CONVERGENCE DU DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE DE LA FONCTION ELLIPTIQUE $p(u)$ ET DU CALCUL DE LA VALEUR DE L'ARGUMENT u, LA VALEUR DE LA FONCTION $p(u)$ ÉTANT DONNÉE;

PAR

AXEL SÖDERBLOM.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 17 Décembre 1887).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1889.

Table des matières.

§ 1. Réduction du cercle de convergence du développement analytique de la fonction elliptique $p(u\,;\,g_2\,;\,g_3)$, nécessaire pour le calcul direct de la valeur de $p(u\,;\,g_2\,;\,g_3)$, la valeur de l'argument u étant donnée . . . p. 2.

§ 2. Chercher les conditions pour que l'espace de convergence du développement analytique de $p(u) = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{2^2 . 5} u^2 + \ldots\ldots$ comprenne les points $u = \omega$ et $u = \omega'$ . . . . . p. 6.

§ 3. Déterminer pour laquelle des valeurs ω et ω' le développement $p(u) = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{2^2 . 5} u^2 + \ldots$ (1) n'est pas convergent, si les coefficients g_2 et g_3 ne satisfont pas aux conditions de convergence complète du développement (1) . . . . . p. 20.

§ 4 Calculer la valeur de la fonction $p(u)$, la valeur de l'argument u étant donnée, si les coefficients g_2 et g_3 ne satisfont pas aux conditions de convergence complète du développement $p(u) = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{2^2 . 5} u^2 + \ldots$ p. 22.

§ 5. Chercher le lieu des arguments u auxquels correspondent des valeurs réelles de la fonction $p(u)$ . . . . . p. 26.

§ 6. Simplification de l'équation $p(u) = a$, a étant une quantité réelle . . . p. 28.

§ 7. Calculer numériquement la valeur de l'argument u, la valeur de la fonction $p(u)$, et celle de $p'(u)$, étant donnée . . . . . p. 35.

§ 8. Division de l'argument u qui correspond à une valeur de la fonction elliptique $p(u)$ . . . . . p. 45.

§ 9. Autre méthode nouvelle de division de l'argument u de la fonction elliptique $p(u)$ . . . . . p. 51.

§ 10. Rectification de la courbe qui est le lieu d'un point mobile P, le rectangle des distances duquel de deux points fixes F et F_1 est égal au carré a^2 . . . . . p. 55.

De la convergence du développement analytique de la fonction elliptique $p(u\,;\,g_2\,;\,g_3)$ et du calcul de la valeur de l'argument u, la valeur de la fonction $p(u)$ étant donnée.

Le but principal de ce mémoir étant d'exposer une nouvelle méthode de calculer approximativement la valeur de l'argument u, à l'aide seulement du développement analytique de la fonction $p(u\,;\,g_2\,;\,g_3)$, il faut commencer par chercher les limites de l'espace de convergence de ce développement, c'est à dire les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients mêmes g_2 et g_3, afin que le développement suffise pour calculer la valeur de la fonction $p(u)$, lorsque l'on connaît la valeur de l'argument u. En effet, nous ferons voir, que le développement analytique de la fonction $p(u)$ est aussi commode pour le calcul indirect de la valeur de l'argument u, la valeur de la fonction $p(u)$ étant donnée, que pour le calcul direct de la valeur de la fonction $p(u)$ elle-même, lorsque l'on connaît la valeur de l'argument u. Ainsi, le développement analytique de $p(u\,;\,g_2\,;\,g_3)$ étant une série ordinaire de g_2, g_3 et de l'argument u, plus la valeur de u est petite, plus la série est commode pour calculer la valeur de $p(u)$ — et *vice versâ*. D'ailleurs, l'espace de convergence étant dépendant des pôles de la fonction $p(u)$, plus on saura restreindre l'espace du développement analytique nécessaire pour le calcul direct ou indirect, plus le calcul sera commode. Voilà pourquoi la réduction du cercle de convergence du développement analytique de la fonction $p(u)$ doit précéder la recherche des conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients g_2 et g_3, afin que le calcul suivant soit commode.

§ 1.

Réduction du cercle de convergence du développement analytique de la fonction elliptique $p(u\,;\,g_2\,;\,g_3)$ nécessaire pour le calcul direct de la valeur de $p(u\,;\,g_2\,;\,g_3)$, la valeur de l'argument u étant donnée.

Soit

$$(1)\quad u = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E}}\ .$$

Cette intégrale est immédiatement transformée dans la forme spéciale

$$(2)\qquad u = -\int_{+\infty}^{s} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

d'où

$$(3)\qquad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3\ .^{1})$$

La transformation de l'intégrale (1) dans la forme (2) se fait en employant les trois formules données par M. WEIERSTRASS dans le cours de sa théorie des fonctions elliptiques

$$s = \frac{\sqrt{R_4(x_0)}\sqrt{R_4(x)} + R_4(x_0) + {}^1\!/_2\, R'_4(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)^2} + \frac{R''_4(x_0)}{24}$$

$$g_2 = AE + 3C^2 - 4BD$$

$$g_3 = ACE + 2BCD - AD^2 - B^2E - C^3\ .$$

Par la première de ces formules on trouve la valeur de la limite supérieure de l'intégrale (2), en y substituant pour x la valeur de la limite supérieure de l'intégrale (1). La deuxième et la troisième des formules donnent immédiatement les valeurs des constantes g_2 et g_3.

---

1) *Voir: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Professor* K. WEIERSTRASS *bearbeitet und herausgegeben von* H. A. SCHWARZ. *Göttingen* 1881, 2.... — Page 12.

L'avantage précieux de cette méthode de transformation des intégrales elliptiques, donnée par M. Weierstrass, consiste en ce qu'elle dispense de la solution numérique de l'équation $R_4(x) = 0$, travail ordinairement très-tédieux. La méthode donnée par M. Weierstrass pour calculer la valeur u de l'intégrale (2), et dont nous citerons plus tard les formules, exige la solution de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, ce qui est naturellement beaucoup plus commode que de résoudre l'équation $R_4(x) = 0$.

L'objet principal de ce mémoir sera de proposer une nouvelle méthode de calculer la valeur u de l'intégrale elliptique (2), méthode qui dispense même de la solution numérique de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, et d'examiner dans quels cas cette méthode sera applicable et à préférer.

De même que u est une fonction de la limite supérieure s de l'intégrale elliptique (2), s est une fonction de la quantité u. Cette fonction elliptique de u, $s = p(u)$, introduite dans l'analyse par M. Weierstrass et définie par les *équations normales* (2) et (3), est la plus simple et la plus importante de toutes les fonctions elliptiques, et par laquelle on peut exprimer toutes les autres fonctions elliptiques, celles de plus haut degré par l'équation [1])

$$\varphi(u, u_1, u_2, \ldots u_n) = \begin{vmatrix} 1 & p(u) & p'(u) & \ldots & p^{(n-1)}(u) \\ 1 & p(u_1) & p'(u_1) & \ldots & p^{(n-1)}(u_1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & p(u_n) & p'(u_n) & \ldots & p^{(n-1)}(u_n) \end{vmatrix} .$$

M. Weierstrass, à l'aide de l'équation différentielle (3), a donné le développement analytique de la fonction elliptique $s = p(u)$ [2])

$$(4) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \ldots + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \ldots$$

ou [3])

$$(5) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \ldots + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \ldots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \ldots$$

1) Voir Schwarz: Formeln und Lehrs. p. 16. 2) p. 10. 3) (7) p. 11.

d'où

$$(6) \qquad p'(u) = -\frac{2}{u^3} + \circ + \frac{g_2}{2 \cdot 5} u + \frac{g_3}{7} u^3 + \cdots$$

avec la formule de récursion pour les coefficients $c_\lambda - \{\lambda > 3\}$

$$(7) \quad c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda + 1)(\lambda - 3)} \Sigma_\nu c_\nu c_{\lambda-\nu} \qquad \{\nu = 2, 3, \ldots (\lambda - 2)\} \; .$$ [1]

Au besoin, le développement analytique (4) peut être complété à l'aide de la formule de récursion (7). —

La formule (4) donne la valeur de la fonction elliptique $p(u)$, quand le point représentant la valeur de l'argument u est situé dans l'intérieur de l'espace de convergence de la série (4). — L'espace de convergence étant la même pour la série (4) et pour la série (6), qui en est la dérivée, la formule (6) donne la valeur de $p'(u)$ pour les mêmes valeurs de l'argument u pour lesquelles la formule (4) donne les valeurs de la fonction elliptique principale $p(u)$.

A cause du premier terme $\frac{1}{u^2}$ qui figure dans le développement analytique (4) de la fonction $p(u)$, l'espace de convergence de ce développement est d'une forme annulaire, limité de deux cercles concentriques, décrits de l'origine comme centre, le rayon du cercle intérieur étant aussi petit qu'on le veut — pour exclure le pôle $u = 0$.

La fonction elliptique $p(u)$ étant doublement périodique, $p(u)$ reprend la même valeur aux points homologues des parallelogrammes des périodes. Ainsi, pour le calcul de la valeur de $p(u)$, il suffit d'avoir le développement de la fonction $p(u)$ pour le parallelogramme des périodes dont les sommets sont les points 0, 2ω, $2\omega + 2\omega'$ et $2\omega'$.

En désignant par $2\omega''$ la période $2\omega + 2\omega'$, ω'' est le centre du parallelogramme des périodes. Donc, on a [2]

$$p(u) = p(2\omega'' - u)$$

la fonction $p(u)$ étant une fonction paire. Ainsi, pour le calcul de la valeur de $p(u)$, il suffit d'avoir le développement de la fonction $p(u)$

1) Voir SCHWARZ: (13), (8) p. 11.

2) Voir SCHWARZ: § 9, p. 10.

pour la moitié la plus prochaine de l'origine du parallelogramme des périodes: pour le triangle dont les sommets sont dans les points 0 , 2ω et $2\omega'$.

De plus, si l'on prend les côtés 0 , 2ω et 0 , $2\omega'$ pour axes des coordonnées v et w , on a $u = v + w$. — Pour éviter la substitution de $v + w$ dans le développement de $p(u)$, on n'a qu'à employer quelqu'une des équations par lesquelles on exprime le théorème d'addition de la fonction $p(u)$ [1]), p. ex.

$$p(v \pm w) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(v) \mp p'(w)}{p(v) - p(w)}\right] - p(v) - p(w) \ .$$

Ainsi, pour calculer la valeur de $p(u)$, il suffit d'avoir les développements des fonctions $p(u)$ et $p'(u)$ pour les arguments dont les points correspondants sont situés le long des côtés 0 , 2ω et 0 , $2\omega'$ du parallelogramme des périodes.

De plus, 2ω et $2\omega'$ étant les périodes de la fonction $p(u)$, on a

$$p(v) = p(2\omega - v) \ , \ p(w) = p(2\omega' - w) \ .$$

Donc, si

$$| v | > | \omega | \text{ ou } | w | > | \omega' |$$

on a

$$| 2\omega - v | < | \omega | \text{ et } | 2\omega' - w | < | \omega' | \ .$$

Dans ce cas, si l'on pose

$$v = \omega + v_1 \text{ et } w = \omega' + w_1$$

on aura

$$p(v) = p(\omega - v_1) \text{ et } p(w) = p(\omega' - w_1)$$

où

$$| \omega - v_1 | < | \omega | \text{ et } | \omega' - w_1 | < | \omega' | \ .$$

Ainsi, pour calculer la valeur de la fonction elliptique $p(u)$ à l'aide du développement analytique (4), il faut et il suffit, que le rayon

1) Voir SCHWARZ: § 12, pp. 13, 14.

du cercle extérieur de l'espace annulaire de convergence du développement analytique de $p(u)$ soit plus grand que la plus grande des deux quantités $|\omega|$ et $|\omega'|$. Donc, si le cercle de convergence de la série (4) ne comprend pas les points $u = \omega$ et $u = \omega'$, il faut développer la fonction $p(u)$ dans une série ordonnée suivant les puissances entières de $(u - \alpha)$, (α étant un point sur la ligne droite $0, \omega$, ou sur la ligne droite $0, \omega'$).

§ 2.

Chercher les conditions pour que l'espace de convergence du développement analytique de $p(u)$,

$$(1)\quad p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \ldots$$

comprenne les points $u = \omega$ et $u = \omega'$.

Les coefficients g_2 et g_3 étant réels, soit

1^0 $$g_2^3 - 27 g_3^2 > 0 .$$

Alors les racines e_λ, e_μ, e_ν de l'équation

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

sont réelles: $e_1 > e_2 > e_3$. — Dans ce cas le parallelogramme des périodes primitif est un rectangle, 2ω étant réel et positif, et $2\omega'$ étant imaginaire, de sorte que $2\omega_3 = \frac{2\omega'}{i}$ est réel et positif.

Dans ce cas la série

$$(2)\qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \ldots + c_\lambda u^{2\lambda - 2} + \ldots$$

suffit pour le calcul de la valeur de la fonction $p(u)$ — à l'aide du théorème d'addition (voir p. 5), lorsque l'argument u est complexe — si elle est convergente pour

$$u = \omega$$

et pour

$$|u| = \omega_3 .$$

Parce que, en vertu de l'equation (2),

$$u^2 \,.\, p(u) = 1 + c_2 u^4 + c_3 u^6 + c_4 u^8 + \ldots + c_\lambda u^{2\lambda} + \ldots$$

est une fonction *régulaire,* la série du membre à droite ne peut cesser d'être convergente que dans le point le plus prochain de l'origine où le produit $u^2 \,.\, p(u)$ devient infini, c'est à dire pour

$$u = 2\omega$$

ou pour

$$u = 2i\omega_3 \ .$$

Ainsi, les conditions pour que la série (1) suffise pour calculer directement — sans transformation analytique du développement — la valeur de la fonction elliptique $p(u)$, la valeur de l'argument y étant réprésentée par un point quelconque du premier quart du rectangle des périodes, c'est à dire situé sur ses côtés, sont que

$$|\, 2\omega' \,| > \omega \quad \text{et} \quad 2\omega > |\, \omega' \,|$$

c'est à dire que

$$\frac{\omega_3}{\omega} > \frac{1}{2} \tag{3}$$

et que

$$\frac{\omega_3}{\omega} < 2 \tag{4}$$

conditions qui sont bien d'accord.

Pour que l'une des racines de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ soit zéro, il faut que $g_3 = 0$. Dans ce cas la série (1) devient

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_4 u^6 + \ldots + c_{2\lambda} u^{4\lambda-2} + \ldots \tag{5}$$

Parce que $e_1 > e_2 > e_3$ et $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, il faut que $e_2 = 0$, et que $e_1 = -e_3$. — De plus, puisque [1])

$$p(\omega) = e_1 \quad p(\omega'') = e_2 \quad p(\omega') = e_3$$

1) Voir SCHWARZ: (16) p. 12.

on voit de la formule (5), que, dans ce cas,

$$p(\omega') = p(i\omega_3) = -p(\omega)$$

ou

$$(\alpha) \qquad \omega_3 = \omega \ .$$

Alors, le parallelogramme des périodes étant un carré, et les conditions (3) et (4) étant satisfaites, la série (1) suffit bien pour le calcul direct de la valeur de la fonction $p(u)$, quelque grande que soit la valeur de l'argument u — mais réduite en la valeur de l'argument correspondant du premier quart du carré des périodes. —

Le calcul des périodes 2ω et $2\omega'$ étant ordinairement fort pénible, il nous reste à chercher les relations entre les coefficients g_2 et g_3 équivalentes aux conditions (3) et (4), pour savoir d'avance, si la série (1) suffit pour la calcul de la valeur de la fonction $p(u)$, ou s'il faut en faire une transformation analytique.

Pour trouver de la manière la plus commode les relations entre les coefficients g_2 et g_3, équivalentes aux conditions (3) et (4), il faut employer celles des formules de la théorie des fonctions elliptiques de M. WEIERSTRASS qui lient le plus directement les périodes 2ω et $2\omega'$ aux coefficients g_2 et g_3.

D'abord, on a [1])

$$(6) \qquad \begin{aligned} h &= e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i} \\ &= e^{-\frac{\omega_3}{\omega}\pi} = \frac{1}{e^{\frac{\omega_3}{\omega}\pi}} \ . \end{aligned}$$

Parce que, en vertu de la condition (4), $\frac{\omega_3}{\omega} < 2$, d'où $e^{\frac{\omega_3}{\omega}\pi} < e^{2\pi}$, ou $\frac{1}{e^{\frac{\omega_3}{\omega}\pi}} > \frac{1}{e^{2\pi}}$, il faut que

$$(7) \qquad h > \frac{1}{e^{2\pi}}$$

pour que la série (1) soit convergente pour $u = \omega'$.

1) Voir: SCHWARZ p. 42.

Parce que, en vertu de la condition (3), $\frac{\omega_3}{\omega} > \frac{1}{2}$ il faut aussi que

$$h < \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi}} \tag{8}$$

pour que la série (1) soit convergente pour $u = \omega$.

Aïnsi les deux conditions (3) et (4) peuvent être remplacées par les conditions (7) et (8): $h > \frac{1}{e^{2\pi}}$ et $h < \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi}}$, c'est à dire par les conditions

$$h > 0.0018\,67442\ldots = h_1 \tag{9}$$

et

$$h < 0.207\,879514 = h_2 \tag{10}$$

De plus, on a [1])

$$l = \frac{2h^{1\cdot 1} + 2h^{3\cdot 3} + 2h^{5\cdot 5} + \cdots}{1 + 2h^{2\cdot 2} + 2h^{4\cdot 4} + \cdots} .$$

En substituant dans cette expression de la quantité l la valeur h_1 de h, la condition pour que la série (1) soit convergente pour $u = \omega'$ est que [2])

$$l > 0.0037\,34884 . \tag{11}$$

1) Voir SCHWARZ: p. 56.

2) Pour la continuation de la déduction de la relation définitive entre g_2 et g_3 c'est d'importance de savoir, si la valeur de l croît d'une manière continuée avec la valeur croissante de h, ou si, pour une valeur quelconque de h entre h_1 et h_2, il y ait une valeur correspondante de l plus grande que la valeur de l qui correspond à la valeur h_2 de h. Mais h étant > 0, le dénominateur ne peut s'évanouir. Donc, l'expression de l se comporte en fonction entière. Les petites valeurs de h, et surtout la petitesse de l'espace $h_1 h_2$ suggestent, que la valeur accroît d'une manière continuée avec la valeur de h dans le dit espace. — Du reste, la valeur de l croît avec la valeur de h jusqu'à la valeur de h qui rend $\frac{dl}{dh} = 0$. Donc, il faut seulement démontrer que l'espace de h_1 à h_2 est comprise dans l'espace de h dans laquelle la valeur de $\frac{dl}{dh}$ reste positive; ce qui est la conséquence immédiate du suivant

En substituant dans l'expression de la quantité l la valeur h_2 de h, la condition pour que la série (1) soit convergente pour $u = \omega$ est que

$$l < 0.4142\,1337 \quad . \tag{12}$$

Ainsi, (11) et (12) sont les conditions pour que la série (1) suffise pour calculer directement la valeur de la fonction $p(u)$, quelque grande que soit la valeur de l'argument u, mais réduite en la valeur (ou les valeurs) de l'argument correspondant sur les côtés du premier quart du rectangle des périodes.

De plus, on a [1])

$$l = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}}$$

d'où

$$\sqrt{k'} = \frac{1 - l}{1 + l} \quad .$$

Tableau des valeurs de l et de $\frac{dl}{dh}$ *qui correspondent à des valeurs différentes de h:*

h	l	$\frac{dl}{dh}$
0.001	0.0020 0000	2.0000 0000
0.002	0.0040 0000	2.0000 0000
0.003	0.0059 9999	1.9999 9999
0 004	0.0079 9999	1.9999 9999
0.005	0.0099 9999	1.9999 9998
0.010	0.0199 9999	1.9999 9980
0.015	0.0299 9999	1.9999 9898
0.020	0.0399 9998	1.9999 9680
0.030	0.0599 9990	1.9999 8963
0.040	0.0799 9959	1.9999 4880
0.050	0.0999 9875	1.9998 7500
0.060	0.1199 9689	1.9997 4080
0.070	0.1399 9327	1.9996 1584
0.080	0.1599 8689	1.9991 8081
0.090	0.1799 7638	1.9986 8811
0.100	0.1999 6001	1.9980 0089
0.150	0.2996 9634	1.9899 2781
0.200	0.3987 2540	1.9682 2890
0.250	0.4961 3130	1.9232 3444

1) Voir: SCHWARZ p. 56.

En substituant dans cette expression de la quantité k' la valeur de l, il faut que

$$\sqrt{k'} < \frac{0.9962\,6511\,4}{1.0037\,3488\,6}$$

d'où

$$k'^2 < 0.9705\,6297\,3 \tag{13}$$

afin que la série (1) soit convergente pour $u = \omega'$.

Parce que, outre cela [1])

$$k'^2 = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$$

d'où

$$(1 - k'^2)e_1 - e_2 + k'^2 e_3 = 0$$

et [2]) $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, on a

$$e_3 = -\frac{2 - k'^2}{1 + k'^2} \cdot e_1 = -k_3 \cdot e_1 \ . \tag{14}$$

De même, on aura

$$e_2 = -\frac{2k'^2 - 1}{1 + k'^2} \cdot e_1 = k_2 \cdot e_1 \ . \tag{15}$$

Parce que [3])

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = \frac{1}{2} g_2$$

on aura des trois dernières équations

$$e_1^2 = \frac{g_2}{2(1 + k_2^2 + k_3^2)} \ . \tag{16}$$

Parce que aussi [3])

$$e_1^2 e_2^2 e_3^2 = \frac{1}{16} g_3^2 \tag{17}$$

---

1) Voir: SCHWARZ (1) p. 31. 2) p. 12. 3) (18) p. 12.

on aura des équations (14) . . . (17)

$$\frac{k_2^2 k_3^2 g_2^3}{8(1+k_2^2+k_3^2)^3} = \frac{g_3^2}{16}$$

ou

$$\frac{\dfrac{g_2^3}{(1+k_2^2+k_3^2)^3}}{2k_2^2k_3^2} = g_3^2 \ . \tag{18}$$

Maintenant, pour trouver la condition pour que la série (1) soit convergente pour $u = \omega'$, il ne faut que substituer dans cette équation les valeurs de k_2^2 et de k_3^2, déduites de la valeur de k'^2, de la relation (13).

Pour savoir immédiatement [1]) dans quelle inégalité se change alors la dernière égalité, on n'a qu'à se rappeler ce que nous avons dit, (α) p. 8, de la convergence de la série (1), si le parallelogramme des périodes de la fonction $p(u)$ devient un carré, c'est à dire, lorsque $g_3 = 0$, $g_2 > 0$.

Ainsi, on voit qu'il faut que

$$g_2^3 > \frac{(1+k_2^2+k_3^2)^3}{2k_2^2k_3^2} \cdot g_3^2 \tag{19}$$

afin que la série (1) soit convergente pour $u = \omega'$.

1) En effet, les relations générales (14) et (15), substituées dans les équations (16) et (17), conduisent à la relation générale

$$g_2^3 : g_3^2 = 108 \frac{(1-k'^2+k'^4)^3}{(1+k'^2)^2(2-5k'^2+2k'^4)^2}$$

$$= 108 \frac{(1-x+x^2)^3}{(1+x)^2(2-5x+2x^2)^2} \qquad x = k'^2 \ ;$$

d'où

$$\frac{d(g_2^3 : g_3^2)}{dx} = 108{\cdot}27 \frac{x(1-x)(1-x+x^2)^2}{(1+x)^3(2-5x+2x^2)^3} \ .$$

Parce que $k'^2 = \dfrac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3}$, la valeur de $x = k'^2$ peut varier de $0 < k'^2 < 1$.

Donc, dans l'espace de $k'^2 > 0.0294\,373$ (voir p. 13) jusqu'à $k'^2 < 0.9705\,62973$ (13), la valeur de $g_2^3 : g_3^2$ va en croissant continuellement depuis la valeur (21), correspondant à $k'^2 > 0.0294\,343$ jusqu'à *l'infini*, pour $k'^2 = \dfrac{1}{2}$, c'est à dire pour $g_3 = 0$; et puis en diminuant continuellement de *l'infini* jusqu'à la valeur (20); correspondant à $k'^2 < 0.9705\,62973$.

Parce que, selon les équations (15) et (14),

$$k_2 = \frac{0.9411\,2593\,8}{1.9705\,6296\,9} \qquad k_3 = \frac{1.0294\,3702\,7}{1.9705\,6296\,9}$$

d'où

$$k_2^2 = 0.2280\,945 \quad k_3^2 = 0.2729\,097 \quad 1 + k_2^2 + k_3^2 = 1.5010\,042$$

il faut que

$$(20) \qquad g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.16\,32\,65\,..$$

pour que la série (1) *soit convergente pour* $u = \omega'$.

Pour trouver de l'équation (18) la condition de convergence de la série (1) pour $u = \omega$, il faut y substituer pour k_2^2 et k_3^2 ses valeurs déduites de l'équation de condition (12).

Ainsi, pour $l \leq 0.4142\,1337$, on trouve

$$k'^2 \geq 0.0294\,373\,.$$

En vertu des équations (15) et (14) on trouve

$$k_2^2 = 0.8357\,8606 \quad k_3^2 = 3.6642\,132 \quad 1 + k_2^2 + k_3^2 = 5.4999\,9926\,.$$

En substituant ces valeurs de k_2^2, de k_3^2 et de $1 + k_2^2 + k_3^2$ dans l'équation (18), on trouvera *qu'il faut que*

$$(21) \qquad g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.16\,32\,67\,..$$

pour que la série (1) *soit convergente pour* $u = \omega$.

Le calcul précédent approximatif donnant presque absolument la même valeur des coefficients des équations de condition pour que la série (1) soit convergente pour $u = \omega$ et pour $u = \omega'$, on en peut conclure, qu'il n'existe en réalité plus *d'une* condition pour que la série (1) soit convergente pour toutes les valeurs de l'argument sur les côtés du premier quart du rectangle des périodes de la fonction $p(u)$, et que cette condition est que

$$(a) \qquad g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.16\,32\,66\ldots$$

Plus tard, nous donnerons une démonstration théorique de ce théorème important. — Nous n'avons fait le double calcul des valeurs (20) et (21) que pour vérifier l'exactitude du résultat (a).

La condition (*a*) diffère si peu de la condition de réalité des trois racines e_1 , e_2 , e_3 de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$

$$g_2^3 \geq g_3^2 \cdot 27$$

qu'il ne sera que dans des cas exceptionnels que le développement analytique (1) de la fonction $p(u)$ ne suffira pas pour calculer directement la valeur de $p(u)$, quelque grande que soit la valeur de l'argument u, mais réduite, s'il le faut, en la valeur de l'argument du premier quart du rectangle des périodes.

Les coefficients g_2 et g_3 étant réels, soit

2° $$g_2^3 - 27\, g_3^2 < 0$$

de sorte que deux racines de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$ soient complexes.

Que la racine *réelle* soit désignée par e_2. Pour employer les formules de M. WEIERSTRASS du calcul des périodes [1]), il faut choisir les indices des autres racines de telle manière que $e_1 - e_3$ soit *positivement* imaginaire.

Donc, la période $2\omega_2$ est réelle et positive; $p(\omega_2) = e_2$. L'autre période $2\omega_3$ est [1])

$$2\omega_3 = \omega_2 + \omega_2' \qquad \omega_2' = \frac{2\omega_2 i}{\pi} \cdot \log \text{ nat} \left(\frac{1}{h_2}\right)$$

où ω_2' est *positivement* imaginaire. Ainsi, le sommet $2\omega_2$ du parallelogramme des périodes est sur l'axe réelle, et le sommet $2\omega_3$ est perpendiculairement *au-dessus* du point ω_2 .

Ainsi, la dernière équation fait voir, que $h_2 < 1$.

Pour que le développement (1) de la fonction $p(u)$ suffise pour le calcul direct des valeurs de $p(u)$ qui correspondent à des valeurs réelles de l'argument u, il faut seulement qu'il soit convergent pour $u = \omega_2$. — De la même manière que dans le cas 1°, on trouvera, que la condition de la convergence de $p(\omega_3)$ est que

$$| 2\omega_3 | > \omega_2 \ .$$

1) Voir: SCHWARZ: § 46 pp. 63, 64.

Si l'on désigne $2\omega_2'$ par $2\omega i$, de sorte que $\omega > 0$, la condition de convergence de $p(\omega_2)$ sera que

$$|\omega_2 + \omega i| > \omega_2$$

ou

$$\omega_2^2 + \omega^2 > \omega_2^2$$

c'est à dire que

$$\omega^2 > 0$$

ce qui est toujours le fait.

Ainsi, chez les fonctions elliptiques $p(u)$ au parallelogramme des périodes, tout comme chez celles au rectangle des périodes, il n'y a plus *d'une* condition pour que le développement (1) de $p(u)$ suffise pour calculer directement la valeur de $p(u)$, si grande que soit la valeur de l'argument u, mais réduite, s'il le faut, en la valeur de l'argument correspondant du premier quart du parallelogramme des périodes. — Donc, il ne nous reste qu'à chercher cette condition.

Chaque argument du premier quart du parallelogramme des périodes peut être représenté par $u = v + w$, où v est un point du côté $0, \omega_2$, et w un point du côté $0, \omega_3$. — Donc, $p(\omega_2)$ étant convergent, il faut seulement que $p(\omega_3)$ le soit aussi.

La condition théorique de ceci est que la longueur de la ligne $0, \omega_3$ soit plus petite que la longueur de la ligne $0, 2\omega_2$, c'est à dire que

$$\sqrt{\frac{\omega_2^2}{4} + \frac{\omega^2}{4}} < 2\omega_2 \ . \tag{22}$$

C'est la relation (22) qu'il faudrait transformer dans une relation entre g_2 et g_3, analogue à la relation (a), p. 13.

La valeur w de chaque argument situé sur la ligne droite $0, 2\omega_3$ est une quantité complexe. L'emploi du développement (1) de la fonction $p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \ldots$ n'étant pas commode, si l'on y substitue une valeur *complexe* de u, il vaut mieux de remplacer la valeur de $p(w) = p(x + iy)$, où $0 < x \leq \omega_2$, et $0 < y \leq \omega$, par [1])

$$p(x + iy) = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{p'(x) - p'(iy)}{p(x) - p(iy)}\right]^2 - p(x) - p(iy) \ .$$

1) Voir: Schwarz (5) p. 14.

La valeur de $p(x)$ se donne immédiatement à l'aide du développement (1), ainsi que la valeur de $p'(x)$ à l'aide du développement [(6) p. 4] de $p'(u) = -\frac{2}{u^3} + \frac{g_2}{2 \cdot 5} u + \ldots$ — Donc, la seule condition de la possibilité de calculer les valeurs de $p(iy)$ et de $p'(iy)$ à l'aide des développements cités est que

$$\omega < 4\omega_2 \ . \tag{23}$$

Ainsi, c'est la condition (23) que nous employerons au lieu de la condition (22), seulement parce que les calculs des valeurs de $p(x) \ldots p'(iy)$ sont beaucoup plus commodes que le calcul de la valeur de $p(x+iy)$; — quoique la relation (22) théoriquement soit la stricte condition de convergence de $p(\omega_3)$. — Du reste, la différence des conditions (22) et (23) n'est que très-petite.

En comparant les relations

$$\omega < 4\,\omega_2 \quad \omega i = \omega_2' \quad \omega_2' = \frac{2\,\omega_2 i}{\pi} \cdot \log \text{ nat} \left(\frac{1}{h_2}\right) \quad \text{[p. 14]}$$

la condition définitive de convergence de $p(iy)$ devient

$$\log \text{ nat} \left(\frac{1}{h_2}\right) < 2\pi$$

ou

$$h_2 > \frac{1}{e^{2\pi}} \ . \tag{24}$$

Sans la dernière réduction de la partie imaginaire de l'argument complexe, la condition de convergence aurait été $h_2 > e^{-\frac{\sqrt{15}}{2}\pi}$ selon (22). — Donc, c'est bien la condition (24) qui jouit d'une symmétrie formelle complète avec la condition (7) $h > e^{-2\pi}$, p. 8.

Ainsi, il faut que (voir p. 9)

$$h_2 = 0.0018\,67442\ldots \tag{(9)}$$

et (voir p. 9)

$$l_2 = 0.0037\,34884 \tag{(11)}$$

afin que $\omega = 4\omega_2$.

De plus, on a [1]) généralement

$$e_2 - e_3 = \varrho e^{\psi i} \ , \ e_2 - e_1 = \varrho e^{-\psi i} \ , \ (0 < \psi < \pi)$$

$$(25) \qquad il_2 = \frac{\sqrt[4]{e_2 - e_3} - \sqrt[4]{e_2 - e_1}}{\sqrt[4]{e_2 - e_3} + \sqrt[4]{e_2 - e_1}} = i\, tg\, \frac{\psi}{4}$$

d'où

$$(26) \qquad \frac{e_2 - e_1}{e_2 - e_3} = \frac{(1 - il_2)^8}{(1 + l_2^2)^4} = cos\, 2\psi - i\, sin\, 2\psi = \alpha - i\beta \ .$$

A cause de ((11)), (25), (26) on trouve $\frac{\psi}{4} = 0^0\, 12'\, 50'',374$, d'où

$$(27) \qquad \log\, \alpha = 0.9998\,0612 - 1 \quad \log\, \beta = 0.4753\,0173 - 2$$

afin que $\omega = 4\omega_2$.

En combinant la relation (26) et l'équation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, on trouve

$$e_1 = -\left(\frac{2 + \alpha - \alpha^2 - \beta^2}{1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2} - \frac{3\beta}{1 + 2\alpha + \alpha^2 + \beta^2}\, i\right) e_2$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \delta i\right) e_2$$

$$e_3 = -\left(\frac{1}{2} + \delta i\right) e_2$$

où

$$(28) \qquad \delta = \frac{3\beta}{2(1 + \alpha)} = \frac{3}{2} \cdot tg\, \psi \ .$$

Donc, on a, voir p. 11,

$$\frac{1}{2} g_2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$$

$$= \left(\frac{3}{2} - 2\delta^2\right) e_2^2$$

1) Voir: Schwarz pp. 63, 64.

et

$$\frac{1}{16}\, g_3^2 = e_1^2 e_2^2 e_3^2$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \delta^2\right) e_2^6 \ .$$

La combinaison de ces deux équations donne la relation générale

$$(29) \qquad g_2^3 = \frac{(3 - 4\delta^2)^3}{(1 + 4\delta^2)^2} \cdot g_3^2 = 27\, \frac{(1 - 3\, tg^2\psi)^3}{(1 + 9\, tg^2\psi)^2} \cdot g_3^2$$

et la combinaison des équations (27), (28), (29), conduit à la condition

$$(30) \qquad g_2^3 = g_3^2 \cdot 26.837844\ldots$$

pour que $\omega = 4\omega_2$.

Parce que simultanément [1]) $g_3 \gtrless 0$, $e_2 \gtrless 0$, $\psi \lessgtr \frac{\pi}{2}$ et selon (29)

$$\frac{d(g_2^3 : g_3^2)}{d\psi} = -\,4374\, \frac{(1 - 3\, tg^2\psi)^2 tg\,\psi}{(1 + 9\, tg^2\psi)^3 \cos^4\psi}$$

la valeur de $\frac{g_2^3}{g_3^2}$ diminue — de $\frac{g_2^3}{g_3^2} < 27$ jusqu'à $\frac{g_2^3}{g_3^2} = 26.837844\ldots$, et — de $\frac{g_2^3}{g_3^2} < 26.837844\ldots$ jusqu'à $\frac{g_2^3}{g_3^2} = -\infty$, quand ψ croît — de $\psi > 0$ jusqu'à $\frac{\psi}{4} = 0^0 12' 50'', 374$, et — de $\frac{\psi}{4} > 0^0 12' 50'', 374$ jusqu'à $\psi = \frac{\pi}{2}$; simultanément $\frac{\omega}{\omega_2}$ diminue continuellement — de $\frac{\omega}{\omega_2} < \infty$ jusqu'à $\frac{\omega}{\omega_2} = 4$, et — de $\frac{\omega}{\omega_2} < 4$ jusqu'à $\frac{\omega}{\omega_2} = 1$.

Ainsi, pour $g_3 > 0$, la condition (23) est remplie, si

$$(31) \qquad g_2^3 < g_3^2 \cdot 26.837844\ldots \qquad g_3 > 0 \ .$$

Lorsque $g_3 < 0$, de sorte que $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$, on a [2])

$$l_3 = tg\,\frac{1}{4}(\pi - \psi) \ , \ h_3 = \frac{l_3}{2} + 2\left(\frac{l_3}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_3}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_3}{2}\right)^{13} + \cdots ,$$

$$(32) \qquad \omega_2 = \frac{2\omega_2'}{\pi i}\ \text{log nat}\left(\frac{1}{h_3}\right) = \frac{2\omega}{\pi}\ \text{log nat}\left(\frac{1}{h_3}\right) .$$

1) Voir SCHWARZ p. 66. 2) Voir SCHWARZ p. 65.

Les équations (25) et (32) font voir: que, pour $\psi = \frac{\pi}{2}$, $l_3 = l_2$, $h_3 = h_2$ et $\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{\omega}{\omega_2}$; que, pour $\frac{\pi}{2} < \psi < \pi$, $\omega < \omega_2$; de sorte que la condition (23) est toujours remplie, lorsque $g_3 < 0$.

Le coefficient 26.837844... diffère si peu de 27, dans la condition de la réalité *d'une* des racines e_1, e_2, e_3, qu'il ne sera que dans des cas exceptionnels que le développement (1) de $p(u)$ ne suffira pas pour calculer la valeur de $p(u)$, u étant un point quelconque du premier quart du parallelogramme des périodes.

Le *résumé* de la recherche de ce paragraphe est:

1° *si* $g_2^3 > 27\, g_3^2$, *il faut aussi que*

(*a*) $$g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.163266\ldots$$

2° *si* $g_2^3 < 27\, g_3^2$, *que*

(*b*) $$g_3 < 0\ ,$$

ou (*c*) $$g_2^3 < g_3^2 \cdot 26.837844\ldots\ ,\ g_3 > 0$$

pour que le développement (1) *de* $p(u)$ *suffise pour calculer directement la valeur de* $p(u)$, *u étant un point quelconque du premier quart du parallelogramme des périodes.*

Si les coefficients g_2 et g_3 satisfont à l'une quelconque des conditions (*a*), (*b*), (*c*), nous dirons que le développement (1) de $p(u)$ est *complètement convergent;* et les relations (*a*), (*b*), (*c*) seront appelées *conditions de convergence complète* du développement (1) de $p(u)$.

Plus le quotient $g_2^3 : g_3^2$ est $> 27.163266\ldots$, lorsque $g_2^3 : g_3^2 > 27$, et que $g_2^3 : g_3^2$ est $< 26.837844\ldots$, lorsque $g_2^3 : g_3^2 < 27$, plus le développement (1) de $p(u)$ est convergent, et plus il est commode pour le calcul pratique; p. ex. pour $g_2^3 = g_3^2 \cdot 26.837722$, qui diffère si peu de la condition (*c*), le développement (1) de $p(u)$ est très commode pour le calcul pratique.

§ 3.

Déterminer pour laquelle des valeurs ω et ω' le développement

$$(1)\quad p(u)=\frac{1}{u^2}+*+\frac{g_2}{2^2\cdot 5}u^2+\frac{g_3}{2^2\cdot 7}u^4+\frac{g_2^2}{2^4\cdot 3\cdot 5^2}u^6+\frac{3g_2g_3}{2^4\cdot 5\cdot 7\cdot 11}u^8+\cdots$$

n'est pas convergent, si les coefficients g_2 et g_3 ne satisfont pas à l'une ou à l'autre des conditions de convergence complète du développement (1).

Si $g_2^3<27\,g_3^2$, nous avons fait voir, que le développement (1) est convergent pour $u=\omega_2$, $2\omega_2$ étant la période réelle. Donc, si les coefficients g_2 et g_3 ne satisfont pas à la condition (b), ni à la condition (c) non plus, p. 19, de convergence complète du développement (1), c'est bien pour $u=\omega'$ que le développement (1) n'est pas convergent.

Ainsi, il ne nous reste qu'à déterminer pour laquelle des valeurs ω et ω' le développement (1) de $p(u)$ n'est pas convergent, si les coefficients g_2 et g_3 ne satisfont pas à la condition de convergence complète (a) p. 19 de $p(u)$, lorsque $g_2^3>27\,g_3^2$, les périodes 2ω et $2\omega'$ formant un rectangle.

Dans ce cas, le développement est convergent ou pour $u=\omega$, ou pour $u=\omega'$. — Car la valeur de $u^2\,.\,p(u)$ ne devient infinie que pour $u=2\omega$, ou pour $u=2\omega'$. Donc, si $|\omega'|>2\omega$, c'est nécessairement $p(\omega)$ qui est finie. — Si, au contraire, $\omega>|2\omega'|$, c'est la valeur de $p(\omega')$ qui est finie.

Par conséquent, si $g_2^3>27\,g_3^2$, sans que $g_2^3>g_3^2\cdot 27.1632\,66\ldots$, c'est pour la plus grande des ω et $|\omega'|$ que le développement (1) de $p(u)$ n'est pas convergent. — Ainsi, il ne nous reste qu'à examiner, s'il soit possible de juger des valeurs des coefficients g_2 et g_3, laquelle des quantités ω et $|\omega'|$ est la plus grande; ou, si l'on fait $\omega'=i\bar{\omega}_3$, laquelle des ω et $\bar{\omega}_3$ est la plus grande.

Parce que $e_1+e_2+e_3=0$, $e_1>e_2>e_3$, deux des racines e ont nécessairement le même signe. Si e_1 et e_2 sont positifs, le produit des racines est négatif, de sorte que g_3 est aussi négatif. — De même, si e_2 est négatif, g_3 est positif.

Si g_3 est positif, on a [1]) $h<h_1$; si g_3 est négatif, on a [1]) $h>h_1$, h et h_1 etant définis par les équations [2])

$$h=e^{\frac{\omega'}{\omega}\pi i}=\frac{1}{e^{\frac{\bar{\omega}_3}{\omega}\pi}}\qquad h_1=e^{-\frac{\omega}{\omega'}\pi i}=\frac{1}{e^{\frac{\omega}{\bar{\omega}_3}\pi}}\ .$$

1) Voir SCHWARZ § 45 p. 63. 2) Voir SCHWARZ (2) p. 61.

Par conséquent, si g_3 est *positif*, on aura

$$\frac{1}{e^{\frac{\bar{\omega}_3}{\omega}\pi}} < \frac{1}{e^{\frac{\omega}{\bar{\omega}_3}\pi}}$$

d'où

$$\omega < \bar{\omega}_3 \ ;$$

mais, si g_3 est *négatif*, on aura

$$\omega > \bar{\omega}_3 \ .$$

Résumé: Si $g_2^3 > 27 g_3^2$, *mais* $g_2^3 < g_3^2 \cdot 27.163266\ldots$ *de sorte que le développement* (1) *de* $p(u)$ *ne peut pas être convergent pour l'une et l'autre des valeurs* $u = \omega$ *et* $u = \omega' = i\bar{\omega}_3$, *c'est pour*

$$u = \omega$$

que le développement (1) *de* $p(u)$ *est convergent, lorsque*

$$g_3 > 0 \ ;$$

et c'est pour

$$u = \omega'$$

que le développement (1) *de* $p(u)$ *est convergent, lorsque*

$$g_3 < 0 \ .$$

Si $g_2^3 < 27 g_3^2$, *mais* $g_2^3 > g_3^2 \cdot 26.837844\ldots$, *les périodes étant désignées par* $2\omega_2$ et $2\omega_3 = \omega_2 + \omega'_2$, *c'est pour*

$$u = \omega_2$$

que le développement (1) *de* $p(u)$ *est convergent.*

§ 4.

Calculer la valeur de la fonction $p(u)$, la valeur de l'argument u étant donnée, si les coefficients g_2 et g_3 ne satisfont pas à l'une ou à l'autre des conditions de convergence complète du développement

$$(1)\quad p(u) = \frac{1}{u^2} + * + \frac{g_2}{2^2 \cdot 5} u^2 + \frac{g_3}{2^2 \cdot 7} u^4 + \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11} u^8 + \cdots$$

Quelque grande que soit $|u_1|$, on en calculera *immédiatement* la valeur correspondante de la fonction $p(u_1)$, si l'on connaît le développement de $p(u)$ en série ordonnée suivant les puissances de $(u - a)$, et que u_1 soit situé en dedans du cercle de convergence de cette série.

Ce développement, de la forme

$$(2)\qquad p(u) = p(a) + \frac{u-a}{1} p'(a) + \frac{(u-a)^2}{1 \cdot 2} p''(a) + \cdots$$

dépend d'abord du terme $p(a)$. Mais calculer la valeur de $p(a)$ n'est pas plus facile que de calculer la valeur de $p(u)$, si a est situé en dehors du cercle extérieur de l'espace de convergence du développement (1) de $p(u)$, exceptées $p(\omega_1) = e_1$, $p(\omega_2) = e_2$ et $p(\omega_3) = e_3$.

Ainsi, c'est seulement en employant le développement (1) de $p(u)$, le développement (6), p. 4, de $p'(u), \ldots$, en point de départ, qu'il sera possible de développer la fonction $p(u)$ en une série de la forme (2), c'est à dire, en en faisant une »*transformation analytique*». Pour cela il faut, que le point a soit situé en dedans de l'espace de convergence du développement (1) de $p(u)$ [1]). Si le point u_1 n'est pas situé en dedans du cercle de convergence de la nouvelle série, il faut en faire une nouvelle transformation analytique, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on aura obtenu un développement de la forme (2) dans l'intérieur du cercle de convergence duquel sera situé le point u_1.

En faisant les transformations analytiques du développement (1) de $p(u)$ le long de l'axe des arguments *réels*, les coefficients des nouvels développements de $p(u)$ sont toujours réels.

En effet, une valeur réelle de u, située dans l'intérieur de l'espace de convergence du développement analytique (1) de $p(u)$, donne une valeur réelle de $p(u)$. Le développement analytique (6), p. 4, de $p'(u)$,

1) Comparer la dernière partie de ce paragraphe.

ayant le même espace de convergence que (1), donne aussi une valeur réelle de $p'(u)$. — D'ailleurs, comme [2]) chaque dérivée d'ordre pair de $p(u)$ est une fonction entière de $p(u)$, $\frac{d^{2m}p(u)}{du^{2m}} = F_{ent.}\{p(u)\}$, on a aussi $\frac{d^{2m+1}p(u)}{du^{2m+1}} = F'_{ent.}\{p(u)\} \cdot p'(u)$. — Ainsi, tous les coefficients de (2) sont réels, tout comme les quantités $(u-a)$, $(u-a)^2, \ldots$; et ainsi de suite.

Soit k un point sur l'axe positif des arguments *imaginaires*, et qu'il soit en dedans de l'espace de convergence du développement (1) de $p(u)$. Alors

$$p(u, k) = p(k) + \frac{u-k}{1} p'(k) + \frac{(u-k)^2}{1 \cdot 2} p''(k) + \ldots$$

Les fonctions $p(k)$, $p''(k), \ldots$ étant *paires*, les valeurs en sont *réelles*. Les fonctions $p'(k)$, $p'''(k), \ldots$ étant *impaires*, leurs valeurs sont *imaginaires*. — Ainsi, en substituant, dans le dernier développement, une valeur imaginaire de u, la valeur de $p(u, k)$ sera réelle. Car une puissance paire de $(u-k)$ est réelle et se multiplie par une fonction réelle; une puissance impaire de $(u-k)$ étant imaginaire est multipliée par une fonction imaginaire, de sorte que chaque terme du développement de $p(u, k)$ est réel.

En substituant, dans ce développement de $p(u, k)$, $(u-l)+l$ pour u, où l est imaginaire, $|l| > |k|$, et l est situé en dedans du cercle de convergence de la série de $p(u, k)$, on aura un troisième développement de $p(u)$, $p(u, k, l)$, en forme d'une série ordonnée suivant les puissances de $(u-l)$, dont les termes sont exactement de la même nature que ceux de la série de $p(u, k)$; et ainsi de suite, tant qu'il soit possible de faire des transformations analytiques des développements déjà obtenus de la fonction $p(u)$; ce qui est d'une grande importance pour le calcul pratique.

Que a soit un argument en dedans de l'espace de convergence du développement (1) de $p(u)$. Que b soit la valeur de la fonction $p(a)$, de sorte que

$$b = p(a) .$$

1) Voir: Schwarz p. 12.

Alors, a est aussi en dedans de l'espace de convergence de $p'(a)$. Que c soit la valeur de $p'(a)$, de sorte que

$$c = p'(a) = \mp\sqrt{4b^3 - g_2 b - g_3}$$

$$= -\frac{2}{a^3} + \frac{g_2}{2\,.\,5}a + \frac{g_3}{7}a^3 + \frac{g_2^2}{2^3\,.\,5^2}a^5 + \frac{3\,g_2 g_3}{2\,.\,5\,.\,7\,.\,11}a^7 + \ldots$$

Alors, on trouve, après un calcul trop long à référer,

$$(3)\quad p(u) = b + c(u-a) + \left\{3b^2 - \frac{g_2}{2^2}\right\}(u-a)^2 + 2bc(u-a)^3 +$$

$$+\left\{5b^3 - \frac{3g_2}{2^2}b - \frac{g_3}{2}\right\}(u-a)^4 + \left\{3b^2 c - \frac{3g_2}{2^2\,.\,5}c\right\}(u-a)^5 +$$

$$+\left\{7b^4 - \frac{7g_2}{5}b^2 - g_3 b + \frac{g_2^2}{2^4\,.\,5}\right\}(u-a)^6 + \left\{4b^3 c - \frac{2g_2}{5}bc - \frac{g_3}{7}c\right\}(u-a)^7 +$$

$$+\left\{9b^5 - \frac{9g_2}{2^2}b^3 + \frac{3^2\,.\,5\,g_3}{2^2\,.\,7}b^2 + \frac{3g_2^2}{2^3\,.\,5}b + \frac{3\,.\,11\,.\,g_2 g_3}{2^4\,.\,5\,.\,7}\right\}(u-a)^8 + \ldots$$

L'espace de convergence de ce développement est un cercle, décrit du point a comme centre et dont la périphérie ne surpasse pas le plus prochain des pôles de la fonction $p(u)$.

Si d est un point en dedans du cercle de convergence du développement (3) de $p(u)$, (3) donne immédiatement les valeurs de $p(d)$, $p'(d), \ldots,$ de sorte que l'on pourra en déduire directement un nouvel développement de $p(u)$ en forme d'une série ordonnée suivant les puissances de $(u-d)$, $p(u) = P(u \mid d)$; et ainsi de suite.

De même, si

$$d = a = \omega_1\ ,\ \omega_2\ ,\ \omega_3$$

on a [1])

$$p(a) = e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3$$

et

$$p'(a) = 0\ .$$

1) Voir SCHWARZ: (16), p. 12, (12), p. 11.

Ainsi, dans le voisinage d'un point ω, on a pour la fonction $p(u)$ le développement

$$(4) \quad p(u) = e + \left\{3e^2 - \frac{g_2}{2^2}\right\}(u-\omega)^2 + \left\{\frac{g_2}{2}e + \frac{3g_3}{2^2}\right\}(u-\omega)^4 +$$

$$+ \frac{1}{4}\left\{\frac{7}{5}g_2e^2 + 3g_3e + \frac{g_2^2}{4\,.\,5}\right\}(u-\omega)^6 + \frac{3}{7}\left\{9g_3e^2 + \frac{7g_2^2}{2^3\,.\,5}e + \frac{11g_2g_3}{2^4\,.\,5}\right\}(u-\omega)^8 + \ldots$$

Si le point correspondant à la valeur de l'argument u, étant en dehors de l'espace de convergence du développement (1) de $p(u)$, est en dedans du cercle de convergence du développement (4) de $p(u)$, ou en dedans du cercle de convergence du développement (3), ou enfin en dedans du cercle de convergence de quelqu'une des transformations analytiques $P(u \mid d)$ du développement (3) de $p(u)$, la valeur correspondante de la fonction $p(u)$ peut être immédiatement calculée. — Mais, si la forme du parallelogramme des périodes de la fonction $p(u)$ est telle, que le point u soit en dehors des cercles de convergence de chaqu'un des développements (1), (3), (4), cette méthode de calculer la valeur de $p(u)$ n'est pas commode. Dans ce cas, on obtiendra plus facilement la valeur de $p(u)$ de la manière suivante:

Quelque grand que soit u par rapport au rayon du cercle extérieur de l'espace de convergence du développement (1) de $p(u)$, il faut, qu'en partant d'une certaine valeur du nombre entier n, le point $\frac{u}{2^n}$, et tous les points suivants, à partir du point $\frac{u}{2^n}$,

$$\frac{u}{2}, \frac{u}{4}, \ldots, \frac{u}{2^n}, \frac{u}{2^{n+1}}, \ldots$$

soient en dedans de l'espace de convergence du développement (1) de $p(u)$.

D'ailleurs, on a [1])

$$(5) \qquad p(2u) = \frac{\left\{\overline{p(u)}^2 + \frac{1}{4}g_2\right\}^2 + 2g_3p(u)}{4\overline{p(u)}^3 - g_2p(u) - g_3}\,.$$

1) Voir Schwarz: (15) p. 14.

Le développement (1) de $p(u)$, au besoin complété à l'aide de la formule de récursion (7) p. 4, donne la valeur exacte de la fonction $p(u)$, si u est un point »dans le voisinage» de l'origine. La valeur de $p(u)$ étant calculée, la formule (5) donne la valeur de $p(2u)$, et ainsi de suite.

Cette méthode n'exige que l'emploi répété de la formule (5); elle dispense même du calcul pénible des périodes de la fonction $p(u)$.

§ 5.

Chercher le lieu des arguments u auxquels correspondent des valeurs réelles de la fonction $p(u)$.

1° *Soit* $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$.

Dans le rectangle des périodes de la fonction $p(u)$, aux côtés $0, 2\omega$ et $0, 2\omega'$, où $\omega' = i\omega_3$, $\omega_3 > 0$, des valeurs *réelles* de la fonction $p(u)$ correspondent

1) aux valeurs réelles x de u $\quad (0 < x < 2\omega)$

2) aux valeurs imaginaires iy de u $\quad (0 < y < 2\omega_3)$.

S'il y a encore des valeurs de l'argument u dans le rectangle des périodes auxquelles correspondent des valeurs réelles de la fonction $p(u)$, il faut que ces arguments soient complexes: $u = x + iy$ $(0 < x < 2\omega,$ $0 < y < 2\omega_3)$. Alors, on a [1])

$$(1) \qquad p(x+iy) = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{p'(x) - p'(iy)}{p(x) - p(iy)}\right]^2 - p(x) - p(iy) \ .$$

Les valeurs des fonctions $p(x)$, $p(iy)$, $p'(x)$ sont réelles. — $p'(u)$ étant *impaire* [2]), la valeur de $p'(iy)$ est *imaginaire*. Afin que la valeur de $[p'(x) - p'(iy)]^2$ soit *réelle*, il faut nécessairement que

$$p'(x) = 0$$

ou que

$$p'(iy) = 0 \ .$$

1) Voir SCHWARZ: p. 14. 2) Voir (6) p. 4.

En dedans du rectangle des périodes on a seulement [1])

$$p'(\omega) = 0 \qquad p'(\omega'') = p'(\omega + \omega') = 0 \qquad p'(\omega') = 0 \ .$$

Ainsi, il faut, ou que

$$x = \omega$$

ou que

$$iy = \omega' \ .$$

Donc, le lieu des points, appartenant au rectangle des périodes principal de la fonction $p(u)$, auxquels correspondent des valeurs *réelles* de $p(u)$, est: le côté $0\,,2\omega$; le côté $0\,,2\omega'$; le diamètre horizontal $y = \omega_3$; le diamètre vertical $x = \omega$. — Dans tous les points situés en dehors du rectangle des périodes principal, mais homologues aux dits points, la valeur de $p(u)$ est aussi réelle.

Parce que $p(\omega) = e_1$, $p(\omega'') = e_2$, $p(\omega') = e_3$, $e_1 > e_2 > e_3$, la valeur de $p(u)$ décroît de $+\infty$ à e_1 , quand u accroît de 0 à ω , et accroît de e_1 à $+\infty$, quand u accroît de ω à 2ω . — Quand u se meut de 0 à ω', la valeur de $p(u)$ accroît de $-\infty$ à e_3 , et décroît de e_3 à $-\infty$, quand u se meut de ω' à $2\omega'$. — $p(u)$ décroît de e_1 à e_2 , quand u se meut de ω à ω'', et accroît de e_2 à e_1 , quand u se meut de ω'' à $\omega + 2\omega'$. — Enfin, $p(u)$ accroît de e_3 à e_2, quand u se meut de ω' à ω'', et décroît de e_2 à e_3, quand u se meut de ω'' à $2\omega + \omega'$.

2° *Soit* $g_2^3 - 27g_3^2 < 0$.

Les côtés du parallelogramme des périodes sont $0\,,2\omega_2$ $(\omega_2 > 0)$ et $0\,,2\omega_3$ $(2\omega_3 = \omega_2 + i\,\omega$, $\omega > 0)$. — Dans ce parallelogramme, aux arguments réels u $(0 < u < 2\omega_2)$ correspondent des valeurs *réelles* de $p(u)$. — Aux arguments iy $(0 < y < \omega)$ correspondent aussi des valeurs réelles de $p(u)$. Mais les arguments iy $(0 < y < \omega)$ sont situés en dehors du parallelogramme des périodes principal. Les arguments $2\omega_2 + iy$ $(0 < y < \omega)$ étant homologues aux arguments iy et situés en dedans du parallelogramme des périodes principal, il faut que des valeurs *réelles* de $p(u)$ correspondent aux arguments complexes $u = 2\omega_2 + iy$ $(0 < y < \omega)$.

---

1) Voir p. 26.

Si $u = x + iy$ $(0 < x < 2\omega_2\ ;\ 0 < y < \omega)$, on a [1])

$$p(x+iy) = \frac{2\left\{p(x)p(iy) - \frac{1}{4}g_2\right\}\left\{p(x)+p(iy)\right\} - g_3 - p'(x)p'(iy)}{2\{p(x)-p(iy)\}^2}.$$

Donc, $p(x+iy)$ n'est réelle que si

$$p'(x)p'(iy) = 0$$

c'est à dire, si $p'(x) = 0$, ou $p'(iy) = 0$. — Parce que $p'(\omega_2) = 0$, on voit, que $p(\omega_2 + iy)$ est réelle pour tous les $0 \leq y < \omega$. — Pour $u = iy$ $(0 < y < \omega)$ $p'(iy)$ ne peut pas être $= 0$; car alors $p'(u)$ aurait un zéro sur la droite de $2\omega_2$ à $2\omega_2 + i\omega$, où aucun des points ω_2, ω'', ω' n'est situé.

Ainsi, le lieu des arguments u, appartenant au parallelogramme des périodes principal, auxquels correspondent des valeurs *réelles* de $p(u)$ est: le côté $0, 2\omega_2$, la droite verticale $\omega_2, 2\omega_3$ et la droite verticale $2\omega_2$, $2\omega_2 + i\omega$.

$p(u)$ décroît de $+\infty$ à e_2, quand u accroît de 0 à ω_2, pour accroître de e_2 à $+\infty$, quand u accroît de ω_2 à $2\omega_2$. — $p(u)$ décroît de e_2 à $-\infty$, quand u se meut le long de la droite verticale de ω_2 à $\omega_2 + i\omega$. Enfin $p(u)$ accroît de $-\infty$ à e_2, quand u se meut le long de la droite verticale de $2\omega_2$ à $2\omega_2 + i\omega$.

§ 6.

Simplification de l'équation

$$p(u) = a$$

a étant une quantité réelle.

Dans le paragraphe 1 nous avons vu, que chaque intégrale

$$(1)\quad J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E}} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}}$$

1) Voir SCHWARZ: (4) p. 14.

par la substitution de M. Weierstrass

$$(2) \quad s = \frac{\sqrt{R_4(x_0)}\sqrt{R_4(x)} + R_4(x_0) + {}^1/_2 R'_4(x_0)(x - x_0)}{2(x - x_0)^2} + \frac{R''_4(x_0)}{24}$$

est immédiatement transformée en

$$(3) \quad J = -\int_{\infty}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

où

$$(4) \quad g_2 = AE + 3C^2 - 4BD$$

$$g_3 = ACE + 2BCD - AD^2 - B^2E - C^3 \ .$$

et que la limite supérieure s_1 de l'intégrale J se donne par la substitution de $x = x_1$ dans la formule (2).

L'équation différentielle

$$(5) \quad \left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3$$

donnant

$$du = -\frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}}$$

l'intégrale J se transforme en

$$J = \int_0^{u_1} du$$

$$= u_1$$

u_1 étant la valeur de l'argument u auquel correspond la valeur s_1 de $s = p(u)$.

Ainsi la résolution de l'équation $p(u) = a$ est une des questions les plus importantes. — Dans ce paragraphe, nous supposerons que a est une quantité *réelle*, comme l'est ordinairement le cas dans la pratique.

1° *Soit* $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$.

Pour faciliter la question, nous traiterons distinctement les quatre cas

1) $+\infty > a > e_1$ $(a > 0)$

2) $e_1 > a > e_2$

3) $e_2 > a > e_3$

4) $e_3 > a > -\infty$ $(a < 0)$.

Dans le cas 1) la valeur principale de l'argument u est réelle, et $0 < u < \omega$. — Dans les trois derniers cas u est complexe ou imaginaire. Néanmoins nous ferons voir, comment les arguments complexes ou imaginaires des cas 2), 3), 4) puissent être calculés de la même manière que l'argument réel du cas 1).

2) *Soit* $e_1 > a > e_2$. Donc, une valeur de l'argument est situé entre ω et ω''. Ainsi u est de la forme

$$u = \omega_1 + v \qquad (v = iy\ ,\ |v| < |\omega_3|)$$

et

$$p(\omega_1 + v) = a\ .$$

D'ailleurs on a [1])

$$(6) \qquad p(u \pm \tilde{\omega}) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{p(u) - e_\lambda}$$

d'où

$$p(\omega_1 + v) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(v) - e_1}$$

et

$$p(v) = -\frac{a e_1 + e_1^2 + e_2 e_3}{e_1 - a}\ .$$

Parce-que $|v| < |\omega_3|$, $e_3 > p(v) > -\infty$. Ainsi le cas 2) peut être traité de la même manière que le cas 4).

---

1) Voir: SCHWARZ (5) p. 23.

3) *Soit* $e_2 > a > e_3$. Donc, une valeur de l'argument u est située entre ω_3 et ω_2. Ainsi u est de la forme

$$u = \omega_3 + x \qquad (0 < x < \omega_1) .$$

En vertu de l'équation (6), on a

$$a - e_3 = p(\omega_3 + x) - e_3$$

$$= \frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{p(x) - e_3}$$

d'où

$$p(x) = \frac{a e_3 + e_1 e_2 + e_3^2}{a - e_3} .$$

Parceque $0 < x < \omega_1$, $+\infty > p(x) > e_1$. — Ainsi le cas 3) peut être traité de la même manière que le cas 1).

4) *Soit* $e_3 > a > -\infty$. Dans ce cas la valeur principale de u est positivement imaginaire et $0 < |u| < |\omega_3|$.

Posons

$$u = iw .$$

Donc, l'équation différentielle (4) se change en

$$-\left(\frac{ds}{dw}\right)^2 = 4s^3 - g_2 s - g_3 .$$

Parceque on aura

$$s = a < 0$$

posons aussi

$$s = -\sigma .$$

L'équation différentielle se change en

$$\left(\frac{d\sigma}{dw}\right)^2 = 4\sigma^3 - g_2\sigma + g_3 \tag{7}$$

avec

$$\sigma = -a .$$

Pour trouver, où est situé l'argument w dans le parallelogramme des périodes de la nouvelle fonction elliptique

$$\sigma = p(w\ ;\ g_2\ ;\ -g_3)$$

on a d'abord à résoudre l'équation

$$4\sigma^3 - g_2\sigma + g_3 = 0\ .$$

Les racines de cette équation sont les mêmes que celles de l'équation $4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$, mais de signe contraire:

$$-e_1\ ,\ -e_2\ ,\ -e_3\ .$$

Les racines de $4\sigma^3 - g_2\sigma + g_3 = 0$ étant *réelles*, le parallelogramme des périodes de $\sigma = p(w\ ;\ g_2\ ;\ -g_3)$ est un rectangle. — Parceque $e_1 > 0$, et $e_3 < 0$, et $e_1 > e_2 > e_3$, $-e_3$ est la plus grande des racines, et $-e_1$ en est la plus petite; $-e_3 > -e_2 > -e_1$.

Parceque $a < e_3$, on a

$$+\infty > -a > -e_3$$

et

$$0 < w < \text{demi-période réelle.}$$

Ayant fait voir plus haut, comment le cas 3) peut être traité de la même manière que le cas 1), et le cas 2) de la même manière que le cas 4); ayant fait voir maintenant, comment le cas 4) peut aussi être traité de la même manière que le cas 1), les arguments de tous les cas 1) . . 4) peuvent être calculés de la même manière que celui du cas 1).

2° *Soit* $g_2^3 - 27g_3^2 < 0$.

Alors, nous aurons à traiter distinctement les deux cas

5) $$+\infty > a > e_2$$

6) $$e_2 > a > -\infty\ .$$

Dans le cas 5) la valeur principale de u étant réelle, et $0 < u < \omega_2$, elle se trouve de la même manière que l'argument u du cas 1).

Dans le cas 6) la valeur principale de u est située entre ω_2 et $\omega_2 + \omega'_2$. Donc, on a

$$u = \omega_2 + v \qquad (v = iy\ ,\ 0 < y < a)\ .$$

En vertu de l'équation (6) on a

$$a - e_2 = p(\omega_2 + v) - e_2$$

$$= \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{p(v) - e_2}$$

d'où

$$p(v) = e_2 - \frac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{e_2 - a} = b\ .$$

e_1 , e_2 , e_3 ayant la forme

$$e_1 = \alpha + i\beta \qquad e_2 = -2\alpha \qquad e_3 = \alpha - i\beta$$

le produit $(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)$ est réel et positif. $e_2 - a$ étant positif, l'avant-dernière équation donne

$$p(v) < e_2\ .$$

En faisant, comme dans le cas 4), $v = iy$ et $s = p(v) = -\sigma$, on aura

$$\left(\frac{d\sigma}{dy}\right)^2 = 4\sigma^3 - g_2\sigma + g_3 \tag{8}$$

d'où

$$\sigma = p\{y\ ;\ -e_3\ ;\ -e_2\ ;\ -e_1\}\ . \tag{9}$$

Parceque $\sigma = -p(v)$, on aura aussi

$$p(y) > -e_2$$

d'où

$$0 < y < \bar{\omega}_2$$

$2\bar{\omega}_2$ étant la période réelle de $p\{y\ ;\ -e_3\ ;\ -e_2\ ;\ -e_1\}$.

De cette manière le cas 6) peut aussi être traité comme le cas 1).

Maintenant c'est à propos de revenir à ce que nous avons dit, p. 13, de la convergence complète du développement analytique de la fonction $s = p(u)$

$$(10)\quad p(u\,;g_2\,;g_3) = \frac{1}{u^2} + * \frac{g_2}{2^2.5}u^2 + \frac{g_3}{2^2.7}u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}u^6 + \\ + \frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11}u^8 + \cdots$$

Si les coefficients g_2 et g_3 satisfont à la condition $g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.163267\ldots$, (21), p. 13, la série est convergente pour $0 < u \leq \omega_1$, $2\omega_1$ étant la période réelle de $p(u\,;g_2\,;g_3)$. De substituer, dans le développement (10), une valeur imaginaire $u = iy$, c'est, en vertu des équations (8) et (9), la même chose que de substituer l'argument réel $u = y$ dans le développement

$$(11)\quad p(u\,;g_2\,;-g_3) = \frac{1}{u^2} + * \frac{g_2}{2^2.5}u^4 - \frac{g_3}{2^2.7}u^4 + \frac{g_2^2}{2^4.3.5^2}u^6 + \\ - \frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11}u^8 + \cdots$$

les coefficients g_2 et g_3 de la série (11) ayant les *mêmes* valeurs que les coefficients g_2 et g_3 de la série (10). — La condition de convergence complète du développement de $p(u)$, $g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.1632\,65..$, (20) p. 13, ne contenant que les coefficients de l'équation différentielle $\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4s^3 - g_2s - g_3$, et le coefficient g_3 n'y entrant que par sa deuxième puissance, (20) est indépendante du signe du coefficient g_3^2. Ainsi, le développement (11) est convergent pour $u = \bar{\omega}_1$, si le développement (10) est convergent pour $u = \omega_1$, $2\bar{\omega}_1$ et $2\omega_1$ étant les périodes réelles des fonctions $p(u\,;g_2\,;-g_3)$ et $p(u\,;g_2\,;g_3)$; D'ailleurs

$$|\,\omega_3\,| \text{ de } p(u\,;g_2\,;g_3) = \bar{\omega}_1 \text{ de } p(u\,;g_2\,;-g_3)$$

d'où il suit, que le développement (10) de $p(u\,;g_2\,;g_3)$ est aussi convergent pour $u = \omega_3$, si $g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.1632\,67\ldots$, de sorte qu'il est convergent pour $u = \omega_1$.

Ainsi, dans le cas $g_2^3 > 27g_3^2$, la fonction $p(u)$ ayant un rectangle des périodes, il ne peut y avoir plus *d'une* condition de convergence complète du développement de $p(u)$.

§ 7.

Calculer numériquement la valeur de l'argument u, la valeur de la fonction $p(u)$, et celle de $p'(u)$, étant donnée.

La méthode de M. Weierstrass de calculer la valeur de l'argument u, la valeur de $s = p(u)$, et celle de $p'(u)$, étant donnée, est si soigneusement exposée par M. Schwarz dans »Formeln und Lehrsätze»[1]) qu'il n'est nécessaire d'en citer que les formules capitales, nécessaires pour le calcul pratique.

La méthode exige:

1° la résolution de l'équation

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

2° le calcul des quantités

$$(1) \qquad \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}} = l$$

$$(2) \qquad \frac{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt{s - e_\mu} - \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{s - e_\nu}}{\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu}\sqrt{s - e_\mu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\sqrt{s - e_\nu}} = lt \qquad (s = a)$$

3° le calcul des quantités

$$L_0 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 l^{12} + \ldots$$

$$L_{0,1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 l^{12} + \ldots$$

$$L_{0,2} = \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 l^8 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 l^{12} + \ldots$$

$$L_{0,3} = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 l^{12} + \ldots$$

. . . . . .

1) Voir: Schwarz pp. 67—73.

4° . . alors la formule

$$(3)\quad \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{e_\lambda - e_\nu} + \sqrt[4]{e_\lambda - e_\mu}\right)^2 . u = \frac{1}{i} L_0\, {}^e log\left(t + i\sqrt{1-t^2}\right) + \\ + \sqrt{1-t^2}\left\{ L_{0,1} t + \frac{2}{3} L_{0,2} t^3 + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} L_{0,3} t^5 + \dots \right\}$$

donne toujours une valeur de u qui satisfait à l'équation $s = p(u)$.

Certainement, cette méthode de calcul est toujours applicable, mais elle est aussi un peu pénible, l'exactitude de la valeur définitive dépendant de l'exactitude de toutes les quantités auxiliaires, intermédiaires.

D'un autre côté, la méthode de M. WEIERSTRASS de transformer une intégrale $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{R_4(x)}}$ en l'intégrale $-\int_{\infty}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}} = u$ (voir p. 29), à l'aide de (2) p. 29 et des formules

$$g_2 = AE + 3C^2 - 4BD$$

$$g_3 = ACE + 2BCD - AD^2 - B^2E - C^3$$

étant *la plus commode* que l'on puisse désirer, on voit combien est d'importance le calcul numérique de la valeur de l'argument u, la valeur de la fonction $s = p(u)$, et celle de $p'(u)$, étant donnée. Voilà pourquoi nous nous sommes occupés de chercher une simplification du calcul numérique de la valeur de l'argument u. Le but pratique de notre recherche a été d'éviter le calcul de toutes les quantités auxiliaires; le but théorique en a été de rendre le calcul indépendant de toutes autres fonctions (les fonctions $\xi(u)$, $\vartheta(u)$) que de la fonction $p(u)$.

Nouvelle méthode de calculer la valeur de u.

La méthode que nous proposons est basée sur les résultats obtenus dans le § 2. Dans ce paragraphe nous avons prouvé, que le développement (1) p. 6 est convergent pour $u = \omega$ et $u = \omega'$, si

$$(a)\qquad g_2^3 > g_3^2\, 27.1632\,66\dots$$

quand $g_2^3 > g_3^2\, 27$, et si

$$(c)\qquad g_2^3 < g_3^2\, 26.837844\dots \qquad g_3 > 0$$

quand $g_2^3 < g_3^2\, 27$; ou si

$$(b)\qquad g_3 < 0\ .$$

La méthode que nous proposons pour calculer la valeur de l'argument u est directement applicable, si les coefficients g_2 et g_3 satisfont à l'une ou à l'autre des conditions (a), (b), (c), ce qui est le plus souvent le cas. — Nous ferons voir après, comment il faut opérer, si les coefficients g_2 et g_3 ne satisfont à aucune des conditions (a), (b), (c).

D'abord nous compléterons le développement de la fonction $p(u)$ à l'aide de la formule de récursion (7) p. 4. On obtient

$$(4)\quad p(u) = \frac{1}{u^2} + k_2 g_2 u^2 + k_3 g_3 u^4 + k_4 g_2^2 u^6 + k_5 g_2 g_3 u^8 + (k_{6,1} g_2^3 + k_{6,2} g_3^2) u^{10}$$
$$+ k_7 g_2^2 g_3 u^{12} + (k_{8,1} g_2^4 + k_{8,2} g_2 g_3^2) u^{14} + (k_{9,1} g_2^3 g_3 + k_{9,2} g_3^3) u^{16}$$
$$+ (k_{10,1} g_2^5 + k_{10,2} g_2^2 g_3^2) u^{18} + (k_{11,1} g_2^4 g_3 + k_{11,2} g_2 g_3^3) u^{20} + \cdots$$

où

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} \log k_2 = 0.6989\,700 - 2 & \log k_3 = 0.5528\,420 - 2 \\ \log k_4 = 0.9208\,188 - 4 & \log k_5 = 0.6875\,406 - 4 \\ \log k_{6,1} = 0.8068\,754 - 6 & \log k_{6,2} = 0.9917\,405 - 5 \\ \multicolumn{2}{c}{\log k_7 = 0{\cdot}7332\,981 - 6} \\ \log k_{8,1} = 0.6733\,364 - 8 & \log k_{8,2} = 0.1970\,202 - 6 \\ \log k_{9,1} = 0.6780\,603 - 8 & \log k_{9,2} = 0.2658\,289 - 7 \\ \log k_{10,1} = 0.4972\,452 - 10 & \log k_{10,2} = 0.2850\,667 - 8 \\ \log k_{11,1} = 0.5814\,119 - 10 & \log k_{11,2} = 0.5672\,628 - 9 \end{array}\right.$$

Nous avons donné les valeurs de tant de coefficients k, quoique ce n'est qu'en des cas exceptionnels qu'il faut employer plus de 6 à 7 termes du développement (4).

Pour le calcul de la valeur de l'argument u on a, à l'aide du développement (4), si l'on y introduit les substitutions $p(u) = a$ et $u^2 = x$,

$$a x \cdot \left\{1 - \frac{k_3 g_3}{a} x^2 - \frac{k_5 g_2 g_3}{a} x^4 - \frac{k_7 g_2^2 g_3}{a} x^6 - \cdots\right\} = k_2 g_2 x^2 + k_4 g_2^2 x^4 + \cdots$$

d'où

$$(6)\qquad x = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \cdots}{1 + c_3 x^2 + c_5 x^4 + c_7 x^6 + \cdots}$$

où

$$c_2 = k_2 g_2 \ , \ \ldots\ldots\ldots \ , \ c_3 = -\frac{k_3 g_3}{a} \ , \ \ldots\ldots$$

L'équation (6) est la formule qui donne la valeur cherchée de $x = u^2$, si l'on y introduit une valeur approximée de x dans le membre droit. — Comme par d'autres méthodes d'approximation, on obtient un nouvel chiffre décimal exact, chaque fois que l'on emploie la formule (6). Le plus simple est d'employer pour première valeur approximée de x $x_0 = \frac{1}{a}$. —

La méthode est très commode, quand a est grand, ou les coefficients c sont petits.

D'un autre côté, la méthode est aussi très avantageuse parce que, en qualité de méthode d'approximation pure, elle n'exige pas un calcul sans défaut au commencement du calcul, la valeur du départ $\frac{1}{a}$ étant tout à fait arbitraire.

Applications des deux méthodes.

1° *Calculer par la méthode de* M. WEIERSTRASS *la valeur de l'intégrale de* LÉGENDRE [1]) $F(c,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \varphi}}$, où

$$c = \sin 75^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \qquad tg\,\varphi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}} \ .$$

En substituant dans cette intégrale $\sin\varphi = z$, on obtient

$$F(c,\varphi) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-c^2 z^2)}}$$

et en comparant cette intégrale à [2])

$$\int_0^{\xi_{0\lambda}(u)} \frac{d\xi_{0\lambda}(u)}{\sqrt{\{1-(e_\mu - e_\lambda)\xi_{0\lambda}^2(u)\}\{1-(e_\nu - e_\lambda)\xi_{0\lambda}^2(u)\}}} = u$$

1) Voir: LÉGENDRE Traité de Fonct. Ell. I, p. 91, 92.
2) Voir: SCHWARZ p. 29.

on voit, que l'on obtient immédiatement

$$F(c\ ,\ \varphi) = u$$

par les substitutions

$$sin\ \varphi = z = \xi_{03}(u)$$

$$e_1 - e_3 = 1\ ,\ e_2 - e_3 = c^2\ ,\ e_1 + e_2 + e_3 = 0\ .$$

Parce que [1])

$$\xi_{03}^2(u) = \frac{1}{p(u) - e_3}$$

on voit, que la valeur de l'intégrale proposée est la valeur de l'argument u qui correspond à la valeur de

$$s = p(u) = e_3 - \frac{1}{sin^2\ \varphi}\ .$$

Donc, la formule (1) donne

$$\log l = 0.5126\,939 - 1$$

et la formule (2)

$$lt = \frac{1 - \sqrt{cos\ 75^0}\ \sqrt{\frac{s - e_3}{s - e_2}}}{1 + \sqrt{cos\ 75^0}\ \sqrt{\frac{s - e_3}{s - e_2}}}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{2\ cos\ 75^0}}{1 + \sqrt{2\ cos\ 75^0}}$$

d'où

$$log\ (lt) = 0.2125\,834 - 1 \qquad log\ t = 0.6998\,895 - 1\ .$$

1) Voir: SCHWARZ p. 28.

Ainsi, on aura

$$log\left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4 = 0.4487\,156 - 3 \qquad log\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 l^8 = 0.2496\,137 - 5$$

$$log\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 l^{12} = 0.1420\,268 - 7$$

d'où (voir p. 35)

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 l^4 = 1.0028\,1006 \qquad L_{0,1} = 0.0028\,2797$$

$$\left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 l^8 = 0.0000\,1776\,7 \qquad L_{0,2} = 0.0000\,179$$

$$\left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 l^{12} = 0.0000\,0013\,868 \qquad L_{0,3} = 0.0000\,001$$

$$L_0 = 1.0028\,2796\,568\,.$$

Parce que

$$\frac{1}{i}\,{}^e log\,(t + i\sqrt{1-t^2}) = arc\,tg\,\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} = V$$

on a $V = \frac{59^0\,55'\,47'',5}{180^0}\,\pi$, d'où

$$\frac{1}{i}\,L_0\,{}^e log\,(t + i\sqrt{1-t^2}) = 1.0489\,315\,.$$

Les valeurs calculées de t , L_0 , $L_{0,1}$, ... donnent

$$log\ L_{0,1}\,t = 0.1513\,6428 - 3 \qquad L_{0,1}\,t = 0.0014\,1698$$

$$log\,\frac{2}{3}\,L_{0,2}\,t^3 = 0.1764\,302 - 6 \qquad \frac{2}{3}\,L_{0,2}\,t^3 = 0.0000\,0150$$

$$L_{0,1}\,t + \frac{2}{3}\,L_{0,2}\,t^3 = 0.0014\,1848\,.$$

De plus, on trouve $log\sqrt{1-t^2} = 0.9372\,2324 - 1$, d'où

$$\sqrt{1-t^2}\left\{L_{0,1}\,t + \frac{2}{3}\,L_{0,2}\,t^3 + \ldots\right\} = 0.0012\,2757$$

et, selon la formule (3) p. 36,

$$\frac{1}{2}\left\{1+\sqrt{\cos 75^0}\right\}^2 \cdot u = 1.0501\,5907$$

d'où $\log u = 0.9650\,547 - 1$ et

$$u = F(c\ ,\ \varphi) = 0.9226\,877\ .$$

Calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-6x^3+5x^2+14x-4}}$.

Parce que $A = 1$, $B = -\frac{3}{2}$, $C = \frac{5}{6}$, $D = \frac{7}{2}$, $E = -4$, les formules (4) p. 29 donnent

$$g_2 = \frac{229}{12}\ ,\ g_3 = -\frac{3437}{216}$$

et la formule (2) p. 29 donne la valeur de la limite supérieure

$$s = \sqrt{30} + \frac{83}{12}\ .$$

Donc, le résultat de la transformation est que

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-6x^3+5x^2+14x-4}} = -\int_\infty^{\sqrt{30}+\frac{83}{12}} \frac{ds}{\sqrt{4s^3-\frac{229}{12}s+\frac{3437}{216}}} = u$$

où u est la valeur de l'argument qui rend

$$p\left(u\ ;\ \frac{229}{12}\ ;\ -\frac{3437}{216}\right) = \sqrt{30}+\frac{83}{12} = a\ ,$$

à calculer par la formule ($x = u^2$)

$$(3) \qquad x = \frac{1}{a}\cdot\frac{1+c_2x^2+c_4x^4+c_6x^6+\cdots}{1+c_3x^2+c_5x^4+c_7x^6+\cdots}$$

$$c_2 = k_2g_2\ ,\ \ldots\ ,\ c_3 = -\frac{k_3g_3}{a}\ ,\ \ldots$$

voir p. 38. —

Parce que $log\ g_2 = 1.2806\,543$, $log\,|\,g_3\,| = 1.2017\,257$, $log\,\frac{1}{a} = 0.9067\,9229 - 2$, on obtient immédiatement

$$log\ c_2 = 0.9796\,243 - 1 \quad log\ c_4 = 0.4821\,274 - 1 \quad log\ c_6 = 0.8413\,052 - 2$$

$$log\ c_3 = 0.6613\,600 - 2 \quad log\ c_5 = 0.0767\,129 - 2\ .$$

La première valeur approximée de x étant par ex. $x_0 = \frac{1}{a}$, on a

$$log\ x_0 = 0.9067\,923 - 2$$

de sorte que $log\ c_2 x_0^2 = 0.7932\,101 - 3$, $log\ c_3 x_0^2 = 0.4749\,458 - 4$ et

$$1 + c_2 x_0^2 = 1.0062\,12 \qquad 1 + c_3 x_0^2 = 1.0002\,99$$

d'où $\log\ (1 + c_2 x_0^2) = 0.0026\,8936$, $\log\ (1 + c_3 x_0^2) = 0.0001\,2762$

$$\therefore\ \log\ x_1 = 0.9093\,540\,..\ - 2\ .$$

De la même manière on trouve

$$1 + c_2 x_1^2 + c_4 x_1^4 = 1.0062\,99 \qquad 1 + c_3 x_1^2 = 1.0003\,025$$

$$log\ (1 + c_2 x_1^2 + c_4 x_1^4) = 0.0027\,2685$$

$$log\ \frac{1}{a} = 0.9067\,9229 - 2$$

$$log\ \frac{1}{a} \cdot (1 + c_2 x_1^2 + c_4 x_1^4) = 0.9093\,8779 - 2$$

$$log\ (1 + c_3 x_1^2) = 0.0001\,3135$$

$$\therefore\ log\ x_2 = 0.9093\,8779 - 2$$

$$1 + c_2 x_2^2 + c_4 x_2^4 = 1.0062\,996 \qquad 1 + c_3 x_2^2 + c_5 x_2^4 = 1.0003\,026$$

$$log\ (1 + c_2 x_2^2 + c_4 x_2^4) = 0.0027\,2728$$

$$log\ \frac{1}{a} = 0.9067\,9229 - 2$$

$$log\ \frac{1}{a} \cdot (1 + c_2 x_2^2 + c_4 x_2^4) = 0.9095\,1957 - 2$$

$$log\ (1 + c_3 x_2^2 + c_5 x_2^4) = 0.0001\,3139$$

$$\therefore\ log\ x_3 = 0.9093\,882 - 2\ .$$

Comme cette valeur ne diffère de celle de $log\ x_2$ qu'au *septième* chiffre, on a

$$log\ x = 0.9093\,882 - 2 \qquad log\ u = 0.4546\,941 - 1\ .$$

Donc, la valeur de l'intégrale proposée est

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 14x - 4}} = u = 0.2849\,0111$$

valeur dont le calcul a été aussi commode que simple.

Calculer numériquement les valeurs de l'argument u qui satisfont à l'équation

$$p(u\ ;\ g_2\ ;\ g_3) = a + ib\ .$$

Aussi ce calcul se fait commodément en employant la dite méthode de calculer la valeur de l'argument u, lorsque la valeur de la fonction $p(u)$ est réelle. Seulement, au lieu de l'équation (3) p. 41, il faut employer la formule

$$(4) \qquad x = \frac{1 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \ldots}{(a + ib) - c_3 x^2 - c_5 x^4 - c_7 x^6 - \ldots}$$

pour calculer la valeur de $x = u^2$. La valeur de l'argument u étant de la forme $u = v + iw$, le calcul de u équivaut à la résolution de deux équations $p(u) = c$. Le x du premier membre de (4) étant une fonction rationelle de la valeur de x qu'on substitue dans le membre à droite, la méthode ne donne qu'une valeur de x, d'où deux valeurs de u, dont la positive est la valeur principale, la seule valeur, dont on ait ordinairement besoin. Si l'on a besoin des autres valeurs de l'argument, on les trouve en calculant les périodes.

Calculer la valeur de u qui satisfait à l'équation

$$p(u\,;\,53\,;\,47) = 13 - 11\sqrt{-1}\ .$$

Comme dessus, on a

$$(5) \qquad x = \frac{1 + c_2x^2 + c_4x^4 + c_6x^6 + \dots}{(13 - 11i) - c_3x^2 - c_5x^4 - c_7x^6 - \dots}$$

$log\ c_2 = 0.4232459 \quad log\ c_4 = 0.3693705 \quad log\ c_3 = 0.2249399 \quad log\ c_5 = 0.0839143\ .$

En substituant comme première valeur approximée de x

$$x_0 = \frac{1}{13 - i11} = \frac{13}{290} + i\,\frac{11}{290}$$

$$= 0.0448\dots + i\,0.0379\dots$$

on obtient

$$c_2x_0^2 = 0.0015\dots + i\,0.0090 \qquad c_3x_0^2 = 0.0009\,6 + i\,0.0057\dots$$

d'où

$$x_1 = \frac{1.0015\dots + i\,0.0090}{12.999\dots - i\,11.0057}$$

$$= 0.04447\dots + i\,0.038399\ .$$

En substituant cette nouvelle valeur de x dans le membre à droite de l'équation (5), on trouve de la même manière

$$x_2 = 0.04453\dots + i\,0.038395$$

et, en répétant le calcul deux fois, on obtient

$$x_3 = 0.044524 + i\,0.038394$$

$$x_4 = 0.0445236 + i\,0.0383935\ .$$

En comparant les valeurs de x_3 et de x_4, on voit immédiatement, que les *six* premiers chiffres des deux nombres de la valeur de x_4 sont corrects. Pour examiner, si les septièmes chiffres en sont aussi corrects,

ou pour en obtenir les corrigés, il faut substituer la valeur x_4, ce qui donne

$$x_5 = 0.0445\,236 + i\,0.0383\,935$$

d'où

$$u = 0.2272\,8293 + i\,0.0844\,6206$$

valeur principale de u qui satisfait à l'équation

$$p(u\,;\,53\,;\,47) = 13 - 11\sqrt{-1}\ .$$

Remarque: L'avantage le plus précieux de la méthode que nous avons proposée pour calculer la valeur principale de l'argument u qui satisfait à l'équation $p(u) = c$, applicable non moins lorsque c est une quantité complexe que lorsque c est réelle, c'est que l'exactitude du calcul n'est pas si indispensable que si l'on applique la méthode de M. Weierstrass. Une erreur commise dans le calcul d'une des premières valeurs approximées de x ne fait que retarder le calcul de la valeur exacte de x, une nouvelle approximation compensant l'erreur, tandis qu'une erreur commise dans le calcul de l, par exemple, rend tous les calculs suivants complètement illusoires, quelque soigneusement qu'ils soient faits.

§ 8.

Division de l'argument u qui correspond à une valeur de la fonction elliptique $p(u)$.

Le développement analytique de la fonction elliptique $p(u)$

$$(1) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + * + c_2 u^2 + c_3 u^4 + c_4 u^6 + \cdots$$

est très commode à employer pour le calcul de la valeur de la fonction $p(u)$ qui correspond à un argument dans la vicinité du point $x = 0$. Si l'argument u n'est pas situé dans la vicinité du point zéro, la valeur

correspondante de $p(u)$ peut être calculée, comme nous l'avons fait voir dans le § 4, à l'aide du développement (1) et à l'aide de l'équation

$$(2) \qquad p(2u) = \frac{\left\{ \overline{p(u)}^2 + \frac{1}{4} g_2 \right\}^2 + 2 g_3 p(u)}{4 \overline{p(u)}^3 - g_2 p(u) - g_3}$$

quelque grande que soit (le module de) la valeur de l'argument u, la dernière équation employée une fois, ou plusieurs.

Dans le paragraphe précédent nous avons aussi fait voir, comme l'équation (1) est commode à employer pour le calcul de la valeur principale de l'argument u correspondant à une valeur donnée de la fonction $p(u)$, quand la valeur de $p(u)$ est grande et en conséquence la valeur de u relativement petite. — Comme le calcul de l'argument u, la valeur de $p(u)$ étant donnée, est la question inverse du calcul de la valeur de $p(u)$, la valeur de u étant donnée, on voit *a priori*, que l'équation auxiliaire doit être l'inversion de l'équation auxiliaire pour le calcul de la valeur de $p(u)$: *l'inversion de l'équation* (2).

Parce que $p(u)$ est une fonction analytique de u, il n'y a qu'une valeur déterminée de $p(u)$ qui corresponde à la valeur donnée de u, ainsi qu'à la valeur de l'argument doublé $2u$. Aussi l'équation (2) donne-t-elle la valeur de $p(2u)$ en fonction *rationelle* de la valeur de $p(u)$.

Si une valeur déterminée u de l'argument est donnée, la valeur de la fonction $p\left(\frac{u}{2}\right)$ est aussi déterminée que $\frac{u}{2}$. — Au contraire, soit donnée seulement une valeur déterminée a de la fonction $p(2u)$, sans que la valeur correspondante de u soit donnée. Alors, si la valeur a est substituée à $p(2u)$ dans l'équation (2), et qu'il soit demandé de calculer la *moindre* valeur de u, à laide de la valeur de $p(u)$, obtenue par la résolution de l'équation (2), il faut prendre pour valeur de $p(u)$ la plus *grande* des quatre racines. — Quant à la résolution de l'équation (2), elle est facilitée par le raisonnement suivant:

Toutes les valeurs de l'argument $2u$ qui correspondent à la valeur donnée a de la fonction $p(2u)$, et à la valeur donnée de $p'(2u)$, se trouvent par la formule

$$2u = v + 2p\omega + 2q\omega'$$

et toutes les valeurs de u par la formule

$$u = \frac{v}{2} + p\omega + q\omega'$$

v étant un point en dedans du parallelogramme principal des périodes, et p et q étant des nombres entiers. Pour que ces valeurs de u soient situées dans le parallelogramme principal des périodes, il faut seulement que p et q aient les valeurs 0 ou 1. Ainsi, les quatre valeurs de u, qui appartenant au parallelogramme des périodes font $p(2u) = a$, sont

$$u \ , \ u + \omega \ , \ u + \omega + \omega' \ , \ u + \omega' \ ,$$

u étant la valeur *principale* de l'argument.

La relation réciproque des valeurs correspondantes de $p(u)$ se donne par l'équation [1])

$$(3) \qquad p(u + \omega) - e_\lambda = \frac{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}{p(u) - e_\lambda}$$

indiquant, qu'il faut transformer l'équation (2) en fonction rationelle de $p(u) - e_\lambda$, ce qui donne

$$a = \frac{\left[\{p(u) - e_\lambda\}^2 + 2e_\lambda\{p(u) - e_\lambda\} + e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right]^2 + 2g_3\{p(u) - e_\lambda\} + 2g_3 e_\lambda}{4\{p(u) - e_\lambda\}\{p(u) - e_\mu\}\{p(u) - e_\nu\}}$$

d'où, pour

$$x = p(u) - e_\lambda \ ,$$

$$(4) \qquad x^4 + 4(e_\lambda - a)x^3 + \left\{6e_\lambda^2 + \frac{1}{2}g_2 - 12e_\lambda a\right\}x^2 +$$

$$\left\{4e_\lambda\left(e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right) - 4a(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) + 2g_3\right\}x + \left(e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3 e_\lambda = 0 \ .$$

Pour la réduction des coefficients de cette équation on a, à l'aide de l'équation $4e_\lambda^3 - g_2 e_\lambda - g_3 = 0$,

$$2e_\lambda\left(2e_\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2\right) = g_3 \ ,$$

d'où

$$\left(2e_\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2\right)4e_\lambda^2 = 2g_3 e_\lambda \ ,$$

1) Voir SCHWARZ: p. 23.

d'où

$$\left(3e_\lambda^2 - \frac{1}{4}g_2\right)^2 = \left(e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3e_\lambda ,$$

le membre à droite étant le terme absolu de l'équation (4).

D'ailleurs, on a [1])

$$g_2 = -4\{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) - 3e_\lambda^2\}$$

d'où

$$\left(3e_\lambda^2 - \frac{1}{4}g_2\right)^2 = (e_\lambda - e_\mu)^2(e_\lambda - e_\nu)^2 .$$

Ainsi, on a

$$\left(e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right)^2 + 2g_3e_\lambda = (e_\lambda - e_\mu)^2(e_\lambda - e_\nu)^2 . \tag{5}$$

Quant au coefficient de x dans l'équation (4), on a, en vertu de la relation $2e_\lambda\left(2e_\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2\right) = g_3$,

$$4e_\lambda\left(e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right) + 2g_3 = 4e_\lambda\left(e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right) + 4e_\lambda\left(2e_\lambda^2 - \frac{1}{2}g_2\right)$$

$$= 4e_\lambda\left(3e_\lambda^2 - \frac{1}{4}g_2\right)$$

d'où, en vertu de la relation $g_2 = -4\{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) - 3e_\lambda^2\}$,

$$4e_\lambda\left(e_\lambda^2 + \frac{1}{4}g_2\right) + 2g_3 = 4e_\lambda(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu) . \tag{6}$$

En substituant les résultats (5) et (6) dans l'équation (4), et en y faisant

$$x = y\sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} \tag{7}$$

1) Voir: SCHWARZ (5) p. 22.

l'équation (4) se change en

$$(8) \qquad y^4 + 4\frac{e_\lambda - a}{\sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}}y^3 + \frac{6e_\lambda^2 - 12e_\lambda a + \frac{1}{2}g_2}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}y^2 +$$

$$+ 4\frac{e_\lambda - a}{\sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}}y + 1 = 0$$

ou

$$y^4 + by^3 + cy^2 + by + 1 = 0 \ ,$$

dont les racines sont

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{8 + b^2} - 4c \pm \sqrt{-\{8 - 2b^2 + 4c \pm 2b\sqrt{8 + b^2 - 4c}\}}}{4} \ .$$

Ainsi, les valeurs de $p(u)$ qui satisfont à l'équation

$$p(2u) = a = \frac{\left\{\overline{p(u)}^2 + \frac{1}{4}g_2\right\}^2 + 2g_3 p(u)}{4\overline{p(u)}^3 - g_2 p(u) - g_3}$$

se trouvent à l'aide de la formule

$$(9) p(u) = e_\lambda + \frac{-b \pm \sqrt{8 + b^2 - 4c} \pm \sqrt{-\{8 - 2b^2 + 4c \pm 2b\sqrt{8 + b^2 - 4c}\}}}{4}\sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}$$

où

$$(10) \qquad b = \frac{4(e_\lambda - a)}{\sqrt{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)}} \qquad c = \frac{6e_\lambda^2 - 12e_\lambda a + \frac{1}{2}g_2}{(e_\lambda - e_\mu)(e_\lambda - e_\nu)} \ .$$

Appl.: Calculer la valeur de l'argument u *qui satisfait à l'équation*

$$p(u\ ;\ 47\ ;\ -62) = 3\ ;\ p'(u) < 0 \ .$$

Parce que $g_2 = 47$ et $g_3 = -62$, on a

$$g_2^3 = g_3^2 \cdot 27.0091 \ldots$$

Ainsi, le parallelogramme des périodes de la fonction $p(u\,;\,47\,;\,-62)$ est un rectangle. En comparant la dernière relation à la condition de convergence complète

$$(a) \qquad g_2^3 > g_3^2 \cdot 27.1632\,66\ldots$$

(p. 19), on voit, que l'espace de convergence du développement de la fonction $p(u\,;\,47\,;\,-62)$

$$(11) \qquad p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{47}{20}u^2 - \frac{62}{28}u^4 + \ldots$$

ne peut pas comprendre les premiers demi-côtés du rectangle des périodes. En vertu des critériums donnés dans le § 3 p. 21 on voit aussi, que c'est pour $u = \omega'$ que le développement (11) est convergent, parce que

$$g_3 < 0\ ,$$

et partant que la droite $0\,,\omega$ est plus longue que le rayon du cercle extérieur de l'espace de convergence du développement (11). La plus grande racine de l'équation

$$4s^3 - 47s + 62 = 0$$

étant 2, l'argument u qui satisfait à l'équation proposée

$$p(u\,;\,47\,;\,-62) = 3\ ,\ p'(u) < 0\ ,$$

est situé entre 0 et ω, [ou en dehors du cercle de convergence du développement (11), ou] trop près de sa circonférence, pour que le développement soit commode pour le calcul de la valeur numérique de u.

En vertu des formules (7) et (10) on a

$$\sqrt{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)} = \frac{1}{2} \qquad b = -8 \qquad c = -98$$

$$\sqrt{8 + b^2 - 4c} = 4\sqrt{29} \qquad 8 + 4c - 2b^2 = -512$$

et

$$p\left(\frac{u}{2}\right) = 2 + \frac{8 \pm 4\sqrt{29} \pm 8\sqrt{8 \pm \sqrt{29}}}{8}\ .$$

Donc, la plus grande valeur de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ est

$$p\left(\frac{u}{2}\right) = 9.3511\,56\,.$$

Si l'on substituait cette valeur de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ à a dans les formules (10) et (9), on aurait la valeur de $p\left(\frac{u}{4}\right)$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on trouverait la valeur de $p\left(\frac{u}{2^n}\right)$.

La méthode de calculer la valeur de l'argument u de la fonction $p(u) = a$ étant d'autant plus commode que la valeur de a est grande, nous avons essayé d'inventer une autre méthode de division de l'argument — opération indispensable, si l'argument u est situé en dehors du cercle extérieur de convergence du développement (1) de la fonction $p(u)$ — qui conduit à des formules moins compliquées que les formules (9) et (10).

Nous en donnerons un bref exposé dans le paragraphe suivant.

§ 9.

Autre méthode nouvelle de division de l'argument u de la fonction elliptique $p(u)$.

Dans le mémoir: *Sur les fonctions elliptiques* $\xi(u)$, nous avons déduit l'équation [1])

$$(1) \qquad \xi_{\mu 0}(u) + \xi_{\nu 0}(u) = \frac{\sigma_\mu\left(\frac{u}{2}\right)\sigma_\nu\left(\frac{u}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u}{2}\right)\sigma_\lambda\left(\frac{u}{2}\right)}$$

où l'on peut attribuer à chacun des indices λ, μ, ν un des nombres 1, 2, 3.

1) Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Vol. XII, fasc. II, p. 21.

Ainsi, on a [1])

$$\xi_{\mu 0}(u) + \xi_{\nu 0}(u) = \xi_{\mu 0}\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \xi_{\nu\lambda}\left(\frac{u}{2}\right) \text{ ou } \xi_{\mu 0}(u) + \xi_{\nu 0}(u) = \xi_{\mu\lambda}\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \xi_{\nu 0}\left(\frac{u}{2}\right),$$

d'où

$$\{\xi_{\mu 0}(u) + \xi_{\nu 0}(u)\}^2 = \xi_{\mu 0}^2\left(\frac{u}{2}\right) \cdot \xi_{\nu\lambda}^2\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$(2) \qquad = \frac{\left\{p\left(\frac{u}{2}\right) - e_\mu\right\}\left\{p\left(\frac{u}{2}\right) - e_\nu\right\}}{p\left(\frac{u}{2}\right) - e_\lambda} \cdot [1])$$

De la valeur donnée $a = p(u)$ on déduit immédiatement [1])

$$\xi_{\mu 0}(u) = \sqrt{a - e_\mu} \qquad \xi_{\nu 0}(u) = \sqrt{a - e_\nu}$$

d'où

$$(3) \qquad \{\xi_{\mu 0}(u) + \xi_{\nu 0}(u)\}^2 = \{\sqrt{a - e_\mu} + \sqrt{a - e_\nu}\}^2 = k \ .$$

Ainsi, on a

$$p^2\left(\frac{u}{2}\right) - (k - e_\lambda)p\left(\frac{u}{2}\right) + (e_\mu e_\nu + k e_\lambda) = 0$$

d'où

$$(4) \qquad p\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{k - e_\lambda \pm \sqrt{k^2 + e_\lambda^2 - 6 k e_\lambda - 4 e_\mu e_\nu}}{2} \ .$$

En donnant la valeur 1 à λ, on trouve deux valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$. Ainsi, la formule (4) donne apparemment *six* valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$.

Appl.: Calculer la valeur de $p\left(\frac{u}{2}\right)$, *si*

$$p(u\ ;\ 47\ ;\ -62) = 2.01\ ,\ p'(u) < 0 \ .$$

1) Voir: SCHWARZ p. 28.

On trouve, parce que $e_1 = 2$, $e_2 = \frac{\sqrt{35} - 2}{2}$, $e_3 = -\frac{\sqrt{35} + 2}{2}$, que

$$\xi_{20}(u) = \sqrt{\frac{6.02 - \sqrt{35}}{2}} \qquad \xi_{30}(u) = \sqrt{\frac{6.02 + \sqrt{35}}{2}}$$

d'où

$$k = 6.02 + \sqrt{1.2404} \ .$$

Donc, la formule (4) donne immédiatement

$$p\left(\frac{u}{2}\right) = \frac{4.02 + \sqrt{1.2404} \pm \sqrt{-13.12399 + 12.04\sqrt{1.2404}}}{2}$$

d'où

$$p\left(\frac{u}{2}\right) = 2.833\,9453 \ .$$

Maintenant, si l'on substitue cette valeur de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ à a dans les formules (3) et (4), on trouve

$$p\left(\frac{u}{4}\right) = 8.507\,6387$$

valeur très commode pour le calcul de la valeur de $\frac{u}{4}$.

Si l'on substitue, dans la formule (6) p. 37, $g_2 = 47$, $g_3 = -62$, $a = 8.507\,6387$, on trouve, après *trois* approximations,

$$u = 1.439\,4801 \ .$$

Comme [$\omega_1 = 1.58515\ldots$ et] $2\omega_3 = i\ 1.28933\ldots$, u est situé en dehors de l'espace de convergence du développement $p(u) = \frac{1}{u^2} + * + + \frac{g_2}{20} u^2 + \ldots$

Remarque: La résolution de l'équation ((2), p. 46)

$$a = p(u) = \frac{\left\{p^2\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{1}{4} g_2\right\}^2 + 2 g_3 p\left(\frac{u}{2}\right)}{4 p^3\left(\frac{u}{2}\right) - g_2 p\left(\frac{u}{2}\right) - g_3}$$

donne *quatre* valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$, comme l'exige nécessairement le problème de division de l'argument. — La valeur de l'indice λ étant fixée, la formule (4) ne donne que *deux* valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$. Mais, comme λ peut être 1, 2 ou 3, il semble, que la méthode donne *six* valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$, deux valeurs de trop, ce qui est aussi impossible. Cependant, comme il n'y a pas de raisons, pourquoi la formule (4) donnera la valeur principale de $p\left(\frac{u}{2}\right)$, si l'on y substitue $e_\lambda = e_1$, mais non, si l'on y substitue $e_\lambda = e_2$ ou $e_\lambda = e_3$, on voit immédiatement, que la valeur principale de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ doit provenir de la formule (4), soit qu'on y substitue $e_\lambda = e_1$, e_2 ou e_3. Alors il faut, que les trois autres valeurs données par la formule (4) soient $p\left(\frac{u}{2}+\omega\right)$, $p\left(\frac{u}{2}+\omega''\right)$ et $p\left(\frac{u}{2}+\omega'\right)$. Comme il n'y pas, non plus, de raisons, pourquoi $p\left(\frac{u}{2}+\omega\right)$ serait combinée avec e_2 plus qu'avec e_3; ou $p\left(\frac{u}{2}+\omega''\right)$ avec e_1 ou e_3; ou $p\left(\frac{u}{2}+\omega'\right)$ avec e_1 ou e_2, on voit *a priori*, que la formule (4) donne les valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ et de $p\left(\frac{u}{2}+\omega\right)$, lorsqu'on y substitue $e_\lambda = e_1$; celles de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ et de $p\left(\frac{u}{2}+\omega''\right)$, si l'on y substitue $e_\lambda = e_2$; celles de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ et de $p\left(\frac{u}{2}+\omega'\right)$ pour $e_\lambda = e_3$.

D'ailleurs, si l'on *suppose* que

$$\frac{k - e_\lambda - \sqrt{k^2 + e_\lambda^2 - 6ke_\lambda - 4e_\mu e_\nu}}{2} = p\left(\frac{u}{2}+\tilde{\omega}\right)$$

on aura

$$p\left(\frac{u}{2}\right) - e_\lambda = \frac{k - 3e_\lambda + \sqrt{k^2 + e_\lambda^2 - 6ke_\lambda - 4e_\mu e_\nu}}{2}$$

$$p\left(\frac{u}{2}+\tilde{\omega}\right) - e_\lambda = \frac{k - 3e_\lambda - \sqrt{k^2 + e_\lambda^2 - 6ke_\lambda - 4e_\mu e_\nu}}{2}$$

d'où

$$\left\{p\left(\frac{u}{2}\right)-e_\lambda\right\}\left\{p\left(\frac{u}{2}+\omega\right)-e_\lambda\right\}=2e_\lambda^2+e_\mu e_\nu=(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)$$

d'accord avec la relation [1])

$$p(v+\omega)-e_\lambda=\frac{(e_\lambda-e_\mu)(e_\lambda-e_\nu)}{p(v)-e_\lambda}\quad .$$

Ainsi, c'est bien formellement prouvé, que la formule (4) donne les valeurs de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ et de $p\left(\frac{u}{2}+\omega\right)$ pour $e_\lambda=e_1$; celles de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ et de $p\left(\frac{u}{2}+\omega''\right)$ pour $e_\lambda=e_2$; celles de $p\left(\frac{u}{2}\right)$ et de $p\left(\frac{u}{2}+\omega'\right)$ pour $e_\lambda=e_3$.

§ 10.

Rectification de la courbe qui est le lieu d'un point mobile P, le rectangle des distances duquel de deux points fixes F et F_1 est égal au carré a^2.

La rectification de cette courbe est un problème aussi intéressant en général, qu'elle est spécialement une question de la plus haute importance dans la théorie des fonctions elliptiques. En effet, on sait bien, quel rôle a joué dans la théorie de ces fonctions la rectification de la courbe spéciale qu'on obtient, si l'on suppose la distance des deux points fixes F et F_1 égale à $2a$, c'est à dire la rectification de la *lemniscate de* J. BERNOULLI.

Voilà, pourquoi nous avons jugé comme fort à-propos d'employer en application des méthodes de calcul pratique que nous avons proposées dans ce mémoir la rectification de la dite courbe. Nous le ferons, non seulement parce qu'on devrait croire, que la rectification de la courbe générale conduirait à des intégrales abéliennes, mais parce que les transformations que nous employerons pour le calcul font tant ressortir la merveilleuse flexibilité des formes des fonctions elliptiques de M. WEIERSTRASS.

1) Voir SCHWARZ: (5) p. 23.

La distance des deux points fixes F et F_1 étant désignée par $2c$, l'équation de la courbe générale est

$$(1) \qquad y^4 + 2(c^2 + x^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0$$

d'où

$$(2) \qquad y^2 = -x^2 - c^2 \pm \sqrt{4c^2x^2 + a^4} \ .$$

En différentiant l'équation (2), on aura l'expression de $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2}\, dx$, mais cette expression étant impossible à transformer, il vaut mieux de transformer l'équation (1) en

$$(3) \qquad a^4 - c^4 = r^4 - 2c^2r^2 \cos 2\vartheta$$

d'où

$$(4) \qquad r^2 = c^2 \cos 2\vartheta \pm \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\vartheta} \ .$$

Si, dans l'équation (3), on fait $a = c$, on aura l'équation de la *lemniscate* de J. BERNOULLI, et dans l'équation résolue (4) il faudra employer le signe supérieur. De même, si l'on suppose $a > c$, il faut employer, dans l'équation (4), le signe supérieur, la courbe ayant la forme d'un ovale, dont les points les plus distants du centre correspondent aux valeurs $r = \sqrt{a^2 + c^2}$. — Si, au contraire, on suppose $a < c$, la courbe consiste en deux courbes distinctes autour des points F et F_1. Dans ce cas il faut employer l'un et l'autre signe dans l'équation (4). — D'abord, nous ne traiterons que le cas où $a > c$; ensuite, nous indiquerons les changements nécessaires pour calculer la longueur de la courbe, si $a < c$.

Donc, l'équation à employer sera

$$(5) \qquad r^2 = c^2 \cos 2\vartheta + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\vartheta} \ .$$

Il s'ensuit de l'équation (3), que

$$(6) \qquad \cos 2\vartheta = \frac{r^4 + c^4 - a^4}{2c^2r^2} \ .$$

En différentiant l'équation (5), on trouve, après quelques réductions,

$$r\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{c^2 r^2 \sin 2\vartheta}{\sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\vartheta}}$$

d'où

$$\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{c^2 r \sin 2\vartheta}{\sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\vartheta}} .$$

Parce que $\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + r^2\left(\frac{d\vartheta}{dr}\right)^2$, on trouve

$$\frac{ds^2}{dr^2} = \frac{a^4}{c^4 \sin^2 2\vartheta}$$

d'où

$$(7) \qquad \frac{ds}{dr} = -\frac{a^2}{c^2 \sin 2\vartheta} = -\frac{a^2}{c^2\sqrt{1 - \frac{(r^4 + c^4 - a^4)^2}{4c^4 r^4}}}$$

$$= -\frac{2a^2 r^2}{\sqrt{\{(a^2 + c^2)^2 - r^4\}\{r^4 - (a^2 - c^2)^2\}}}$$

le signe négatif étant employé, parce que nous voulons faire l'intégration du point où la courbe rencontre l'axe des x, et où r a sa plus grande valeur.

C'est l'expression (7) de ds qu'il faut transformer, d'une manière ou d'une autre, pour éviter des intégrales abéliennes, dont elle a la forme dans l'équation (7). — Nous faisons cette transformation, en introduisant la formule de substitution

$$(8) \qquad r^4 = (a^2 + c^2)^2 \cos^2\varphi + (a^2 - c^2)^2 \sin^2\varphi .$$

On voit immédiatement de cette équation, que l'angle auxiliaire φ a les valeurs 0 et $\frac{\pi}{2}$ simultanément avec l'angle ϑ. Pour des valeurs intermédiaires, les angles ϑ et φ ne coincident pas.

Il résulte de l'équation (8), que

$$(9) \quad (a^2 + c^2)^2 - r^4 = 4a^2c^2\sin^2\varphi \qquad r^4 - (a^2 - c^2)^2 = 4a^2c^2\cos^2\varphi .$$

Par la substitution des expressions (9) dans l'équation (7), on la transforme en

$$\frac{ds}{dr} = -\frac{r^2}{2c^2 \sin\varphi \cos\varphi} \quad . \tag{10}$$

En différentiant l'équation (8), on aura

$$r^3 \frac{dr}{d\varphi} = -2a^2c^2 \sin\varphi \cos\varphi \quad . \tag{11}$$

Par la combinaison des deux expressions (10) et (11), on aura

$$ds = a^2 \frac{d\varphi}{r} = a^2 \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{(a^2+c^2)^2 \cos^2\varphi + (a^2-c^2)^2 \sin^2\varphi}}$$

d'où

$$s = a^2 \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{(a^2+c^2)^2 \cos^2\varphi + (a^2-c^2)^2 \sin^2\varphi}} \quad . \tag{12}$$

En comparant les équations (7) et (12), on voit que celle-ci est plus simple, la variable indépendante n'y figurant qu'au deuxième degré, au lieu du *huitième* dans l'équation (7), tandis que la racine du dénominateur de l'expression (12) est du quatrième degré au lieu de la racine carrée de l'expression (7). Mais cet inconvenient n'est pas de conséquence, comme nous le ferons voir après.

Avant de transformer l'intégrale (12) à l'aide des fonctions elliptiques de M. WEIERSTRASS, il faut exposer les transformations nécessaires pour le calcul de la longueur de la courbe, si $a < c$. — Dans ce cas, la courbe consiste en deux contours congruents autour des points fixes F et F_1. Pour les parties plus éloignées de ces contours on a à employer l'équation (5) $r^2 = c^2 \cos 2\vartheta + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\vartheta}$, dans laquelle ϑ peut parcourir les valeurs de $\vartheta = 0$ jusqu'à $2\vartheta = \arcsin \frac{a^2}{c^2}$ du côté supérieur, et du côté inférieur, de l'axe des x.

Mais pour la partie plus prochaine du contour il faut employer, au lieu de l'équation (5), l'équation

$$r^2 = c^2 \cos 2\vartheta - \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\vartheta} \quad . \tag{13}$$

Dans cette équation, on doit faire accroître l'angle ϑ de $\vartheta = 0$ jusqu'à $2\vartheta = \arcsin \frac{a^2}{c^2}$, de l'un et de l'autre côté de l'axe des x.

Ainsi, pour la partie plus éloignée de la courbe, l'expression de la longueur de l'arc est la même que dans le cas $a > c$. — Quant à la partie plus prochaine du contour, on a

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{c^2 r \sin 2\vartheta}{\sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\vartheta}}$$

d'où

$$s = \int \frac{2a^2 r^2}{\sqrt{\{(a^2 + c^2)^2 - r^4\}\{r^4 - (c^2 - a^2)^2\}}}\, dr \tag{14}$$

la longueur s de l'arc croissant avec la valeur du rayon r.

Dans cette intégrale, on ne peut pas introduire la substitution (8). En effet, pour $\varphi = 0$, on aurait $r = \sqrt{c^2 + a^2}$ au lieu de $r = \sqrt{c^2 - a^2}$. — Au lieu de la substitution (8), on peut employer la substitution modifiée

$$r^4 = (c^2 - a^2)^2 \cos^2 \chi + (c^2 + a^2)^2 \sin^2 \chi \tag{15}$$

d'où

$$(c^2 + a^2)^2 - r^4 = 4a^2 c^2 \cos^2 \chi \qquad r^4 - (c^2 - a^2)^2 = 4a^2 c^2 \sin^2 \chi \tag{16}$$

et

$$r^3 \frac{dr}{d\chi} = 2a^2 c^2 \sin \chi \cos \chi \quad . \tag{17}$$

Par les substitutions (16) et (17), l'intégrale (14) se transforme en

$$s = a^2 \int_0^{\chi} \frac{d\chi}{\sqrt[4]{(c^2 + a^2)^2 \sin^2 \chi + (c^2 - a^2)^2 \cos^2 \chi}} \tag{18}$$

intégrale de la même forme que l'intégrale (12).

Réduction de l'intégrale $J = \int \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{(a^2+c^2)^2 \cos^2\varphi + (a^2-c^2)^2 \sin^2\varphi}}$ $(a > c)$.

D'abord on aura

$$\sqrt{a^2+c^2} \cdot J = \int \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1 - \frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}\sin^2\varphi}}$$

de sorte que c'est cette intégrale qu'il reste à transformer. Pour en faire la transformation, nous employons la substitution

$$\sin\varphi = \xi_{03}(u) \quad . \tag{19}$$

Pour fixer la fonction elliptique $\xi_{03}(u)$, il faut en déterminer les constantes $e_1 - e_2$, $e_1 - e_3$ et $e_2 - e_3$, à condition que [1]) $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Le calcul étant beaucoup plus simple à exécuter pratiquement, si les racines e_1 , e_2 , e_3 de la fonction principale correspondante $p(u)$ sont réelles, et la transformation exigeant que $e_1 - e_3$, ou $e_2 - e_3$, soit égale à $\frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}$, posons

$$e_2 - e_3 = \frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2} \quad . \tag{20}$$

Cette équation, et l'équation $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, sont les seules auxquelles les quantités e_1 , e_2 , e_3 doivent nécessairement satisfaire. Ainsi, une des racines e_1 , e_2 , e_3 reste à disposition; il faut seulement en fixer la valeur de la manière la plus avantageuse pour le reste du calcul.

Par l'emploie des équations (19) et (20), le dénominateur de l'intégrale se transforme en

$$\sqrt[4]{1 - \frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}\sin^2\varphi} = \sqrt[4]{1 - (e_2 - e_3)\xi_{03}^2(u)} \quad .$$

Si l'on divise par $\sigma_3^2(u)$ l'équation [2]) $\sigma_2^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_2 - e_3)\sigma^2(u) = 0$, on en obtient [2])

$$1 - (e_2 - e_3)\xi_{03}^2(u) = \xi_{23}^2(u) \quad .$$

1) Voir: SCHWARZ (18) p. 12. 2) Voir: SCHWARZ p. 28.

Ainsi

$$\sqrt[4]{1 - \frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}\,sin^2\varphi} = \sqrt{\xi_{23}(u)} \quad . \tag{21}$$

Quant à la transformation de $d\varphi$, on a [1]) de l'équation (19)

$$cos\,\varphi\, d\varphi = \xi_{13}(u)\,\xi_{23}(u)\,du \quad . \tag{22}$$

Ainsi, il ne s'agit que de transformer de la manière la plus avantageuse la fonction $cos\,\varphi$ en fonction de $\xi_{03}(u)$, $\xi_{13}(u)$, $\xi_{23}(u)$. — Pour cela, on a d'abord

$$cos\,\varphi = \sqrt{1 - \xi_{03}^2(u)} \quad . \tag{23}$$

Pour se défaire de la racine carrée de cette expression, on n'a pas d'autres moyens que d'employer les équations analogues à l'équation déjà citée $\sigma_2^2(u) - \sigma_3^2(u) + (e_2 - e_3)\sigma^2(u) = 0$, c'est à dire l'équation [1]) $\sigma_3^2(u) - \sigma_1^2(u) + (e_3 - e_1)\sigma^2(u) = 0, \ldots$. En la divisant par $\sigma_3^2(u)$, on obtient [1]) $\xi_{13}^2(u) = 1 - (e_1 - e_3)\xi_{03}^2(u)$. Donc, on voit immédiatement que, pour pouvoir enlever la racine carrée de l'expression (23), il ne faut que poser

$$e_1 - e_3 = 1 \quad . \tag{24}$$

Alors, on a

$$cos\,\varphi = \xi_{13}(u) \quad . \tag{25}$$

La combinaison des équations (22) et (25) conduit à la relation

$$d\varphi = \xi_{23}(u)\,du \tag{26}$$

et les équations qui déterminent les valeurs des racines e_1, e_2, e_3 sont

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \qquad e_1 - e_3 = 1 \qquad e_2 - e_3 = \frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}$$

équations compatibles et donnant des valeurs réelles aux racines $e_1 > e_2 > e_3$.

1) Voir: SCHWARZ p. 28.

En introduisant les expressions (21) et (26), l'intégrale se transforme en

$$(27) \qquad \int \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1-\frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}\sin^2\varphi}} = \int \sqrt{\xi_{23}(u)}\,du = \int \frac{du}{\sqrt{\xi_{32}(u)}} .$$

Si l'on fait, dans l'équation [1])

$$\left\{\frac{d\xi_{\mu\nu}(u)}{du}\right\}^2 = \{1-\xi_{\mu\nu}^2(u)\}\{e_\mu - e_\lambda + (e_\lambda - e_\nu)\xi_{\mu\nu}^2(u)\}$$

$\lambda = 1$, $\mu = 3$, $\nu = 2$, on aura

$$\left\{\frac{d\xi_{32}(u)}{du}\right\}^2 = \{1-\xi_{32}^2(u)\}\{(e_1-e_2)\xi_{32}^2(u) - (e_1-e_3)\} .$$

En vertu des équations de condition (20) et (24), cette équation se transforme en

$$\left\{\frac{d\xi_{32}(u)}{du}\right\}^2 = \{1-\xi_{32}^2(u)\}\left\{\left(\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\right)^2\xi_{32}^2(u) - 1\right\}$$

d'où

$$du = \frac{d\xi_{32}(u)}{\sqrt{\{1-\xi_{32}^2(u)\}\left\{\left(\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\right)^2\xi_{32}^2(u)-1\right\}}} .$$

Ainsi, à l'aide de la nouvelle substitution

$$(28) \qquad z = \xi_{32}(u)$$

l'intégrale peut être écrite

$$(29) \qquad \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1-\frac{4a^2c^2}{(a^2+c^2)^2}\sin^2\varphi}} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z(z^2-1)\left\{1-\frac{(a^2-c^2)^2}{(a^2+c^2)^2}z^2\right\}}}$$

intégrale calculée par *Legendre* dans *Fonctions Elliptiques* (III pp. 334,...).

1) Voir: SCHWARZ (6) p. 29.

Par la substitution de *Legendre*

$$1 + kz^2 = zt \tag{30}$$

où

$$k = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2} \tag{31}$$

l'intégrale proposée se transforme en

$$\sqrt{a^2 + c^2} \cdot J = -\frac{1}{2\sqrt{k}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{(t + 2\sqrt{k})\{(1+k)^2 - t^2\}}} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{k}} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{\sqrt{(t - 2\sqrt{k})\{(1+k)^2 - t^2\}}} .$$

Si, dans la première de ces intégrales, on substitue

$$t = \sigma - \frac{2}{3}\sqrt{k} \tag{32}$$

et dans la dernière

$$t = s + \frac{2}{3}\sqrt{k} \tag{33}$$

on obtient

$$\sqrt{a^2 + c^2} \cdot J = - \tag{34}$$

$$- \frac{1}{i\sqrt{k}} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{4\left\{\sigma - \left(1 + k + \frac{2}{3}\sqrt{k}\right)\right\}\left\{\sigma + \frac{4}{3}\sqrt{k}\right\}\left\{\sigma + \left(1 + k - \frac{2}{3}\sqrt{k}\right)\right\}}}$$

$$+ \frac{1}{i\sqrt{k}} \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{4\left\{s - \left(1 + k - \frac{2}{3}\sqrt{k}\right)\right\}\left\{s - \frac{4}{3}\sqrt{k}\right\}\left\{s + \left(1 + k + \frac{2}{3}\sqrt{k}\right)\right\}}} .$$

Maintenant, les expressions sous les racines carrées ont la même forme que celles de l'intégrale normale de M. WEIERSTRASS $\int du = \pm \int \frac{ds}{\sqrt{4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}}$, $e_1+e_2+e_3=0$. Donc, on n'a qu'à substituer

$$\sigma = p(v\,;\,e_1\,;\,e_2\,;\,e_3) \qquad s = p(w\,;\,\bar{e}_1\,;\,\bar{e}_2\,;\,\bar{e}_3)$$

afin que l'intégrale se transforme immédiatement en

$$\sqrt{a^2+c^2}\cdot J = -\frac{1}{i\sqrt{k}}\Big|_{v_0}^{v_1} v + \frac{1}{i\sqrt{k}}\Big|_{w_0}^{w_1} w \tag{35}$$

et il ne reste qu'à déterminer les limites de l'intégration. Nous supposerons, qu'il s'agit de la longueur du *quart* de la courbe ($a > c$).

Selon les équations (1), (8), (12), les limites de l'angle φ sont 0 et $\frac{\pi}{2}$. — L'équation (19) fait voir, que u doit varier, de sorte que $\xi_{03}(u)$ accroisse de $\xi_{03}(u_0)=0$ jusqu'à $\xi_{03}(u_1)=1$. — Parce que[1]) $\xi_{03}(u) = \frac{1}{\sqrt{p(u)-e_3}}$, et, voir p. 61, $e_1 - e_3 = 1$, il faut que u varie continuellement de $u_0 = 0$ jusqu'à $u_1 = \omega$. — Alors, l'équation (28) fait voir, que[1]) $z = \xi_{32}(u) = \sqrt{\frac{p(u)-e_3}{p(u)-e_2}}$ varie de $z_0 = 1$ jusqu'à $z_1 = \frac{1}{k}$, voir p. 61 et (31).

Maintenant, si dans l'équation (30), on fait successivement

$$z_0 = 1 \qquad z' = \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad z_1 = \frac{1}{k}$$

on trouve selon l'équation (32)

$$\sigma_0 = 1 + k + \frac{2}{3}\sqrt{k} \qquad \sigma' = \frac{8}{3}\sqrt{k} \qquad \sigma_1 = 1 + k + \frac{2}{3}\sqrt{k}$$

et selon (33)

$$s_0 = 1 + k - \frac{2}{3}\sqrt{k} \qquad s' = \frac{4}{3}\sqrt{k} \qquad s_1 = 1 + k - \frac{2}{3}\sqrt{k}\,.$$

1) Voir: SCHWARZ p. 28.

Ainsi, dans la formule (34), $\sigma_0 = \sigma_1 = e_1$, et $e_1 > \sigma' > e_2$; et $s_0 = s_1 = \bar{e}_1$, et $s' = \bar{e}_2$. — Donc, les variables v et w partent de ω et de $\bar{\omega}$ perpendiculairement à l'axe horizontale; v retournant à ω avant d'être parvenue à ω'', mais w allant jusqu'à $\bar{\omega}''$, avant de retourner à $\bar{\omega}$. Ainsi, on trouve, selon l'équation (35), que

$$(36) \qquad \sqrt{a^2 + c^2} \cdot J = -\frac{2}{i\sqrt{k}} \cdot (\omega + v - \omega) + \frac{2}{i\sqrt{k}} (\bar{\omega} + \bar{\omega}' - \bar{\omega})$$

$$= -\frac{2v}{i\sqrt{k}} + \frac{2\bar{\omega}'}{i\sqrt{k}}$$

où v est la valeur de la variable qui rend

$$(37) \qquad p(v\,;\, e_1\,;\, e_2\,;\, e_3) = \frac{8}{3}\sqrt{k}$$

et $\bar{\omega}'$ est

$\bar{\omega}' =$ la demi-période imaginaire de $p(w\,;\, \bar{e}_1\,;\, \bar{e}_2\,;\, \bar{e}_3)$.

Application numérique.

Calculer la longueur Q du quart de la courbe, si $a = 7$ et $c = 3$.

Selon l'équation (31) on trouve

$$k = \frac{20}{29}$$

d'où pour la fonction $p(v)$

$$e_1 = 1 + k + \frac{2}{3}\sqrt{k} \qquad e_2 = -\frac{4}{3}\sqrt{k} \qquad e_3 = -\left(1 + k - \frac{2}{3}\sqrt{k}\right)$$

$$= 2.2432\,917 \qquad = -1.1072\,731 \qquad = -1.1360\,186$$

$$\sigma' = \frac{8}{3}\sqrt{k} = 2.2145\,462 = p(\omega + v) \ .$$

Parce que (voir p. 30)

$$p(\omega + v) - e_1 = \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{p(v) - e_1}$$

on trouve que

$$p(v) = -391.6477\,719 = -b$$

de sorte que v est une quantité *imaginaire*, située entre 0 et ω'. — En introduisant la substitution $v^2 = -w'$, on trouve (voir p. 37)

$$w' = \frac{1}{b} \cdot \frac{1 + k_2 g_2 w'^2 + \dots}{1 - \frac{k_3 g_3}{b} w'^2 - \dots} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1 + c_2 w'^2 + \dots}{1 + c_3 w'^2 + \dots} .$$

A cause des valeurs des e, on trouve (voir pp. 11, 12)

$$g_2 = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) \qquad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3$$

$$= 15.0979\,002 \qquad = 11.28719$$

$$\therefore \log c_2 = 0.8778\,853 - 1 \qquad \log c_3 = 0.0125\,322 - 3 .$$

En partant de la valeur $w'_0 = \frac{1}{b}$, d'où $\log w'_0 = 0.4071\,044 - 3$, on trouve immédiatement

$$\log w' = 0.4071\,065 - 3$$

$$\therefore \log |v| = 0.7035\,5325 - 2$$

$$\frac{v}{i} = 0.0505\,3046 .$$

Parce que, selon l'équation (34), pour la fonction $p(w' ; \bar{e}_1 ; \bar{e}_2 ; \bar{e}_3)$

$$\bar{e}_1 = -e_3 \qquad \bar{e}_2 = -e_2 \qquad \bar{e}_3 = -e_1$$

on a [1])

$$\sqrt{\frac{2\bar{\omega}'}{\pi i}} = \frac{1}{1.3543\,892}$$

1) Voir: SCHWARZ p. 62.

et

$$\frac{\tilde{\omega}'}{i} = 0.8563\,1394$$

$$\frac{v}{i} = 0.0505\,3046$$

$$0.8057\,8348\ .$$

Donc, les formules (12) et (36) donnent immédiatement

$$Q = \frac{49}{\sqrt{10}}\ .\ 0.8057\,8348$$

$$= 12.4857\,465\ .$$

EINE METHODE

ZUR

BERECHNUNG DES INTEGRALS

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z_3 - g_2 z - g_3}}$$

VON

ERNST PFANNENSTIEL.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 16 Febr. 1889).

UPSALA, 1889,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

Bekanntlich wird die Gleichung

$$\int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}} = u \ , \qquad r_1 + r_2 + r_3 = 0$$

durch die eindeutige doppeltperiodische Funktion zweiter Ordnung $z = \wp(u)$ befriedigt. Werden die Perioden dieser Funktion durch w , w_1 bezeichnet, so hat man

$$r_1 = \wp\left(\frac{w}{2}\right) \ , \ r_2 = \wp\left(\frac{w+w_1}{2}\right) \ , \ r_3 = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right) \ .$$

Der Kürze wegen nennen wir die Grössen r_1 , r_2 , r_3 Wurzeln des $\wp$-integrals.

Es sei $\wp_1(u)$ eine andere $\wp$-funktion mit den Perioden $2w, w_1$. Es gilt dann die Gleichung

$$(1) \qquad \wp(u) = \frac{[\wp_1(u) - \wp_1(\alpha)]\,[\wp_1(u) - \wp_1(\alpha + w)]}{\wp_1(u) - \wp_1(w)} \ ,$$

wenn $\pm\alpha$ die beiden Nullstellen der Funktion $\wp(u)$ sind.

Diese Gleichung kann folgendermassen geschrieben werden

$$(2) \qquad \wp(u) = \wp_1(u) + K + \frac{L}{\wp_1(u) - \wp_1(w)} \ .$$

Weil

$$\lim_{u=0} \left[\wp(u) - \frac{1}{u^2}\right] = 0$$

ist, muss

$$K = 0$$

sein.

Wird ferner $u = w + \delta$ gesetzt und die Gleichung (2) mit δ^2 multiplicirt, so erhält man durch Grenzübergang für $\delta = o$

$$1 = \frac{2L}{\wp_1''(w)} ,$$

folglich

$$\wp(u) = \wp_1(u) + \frac{\wp_1''(w)}{2[\wp_1(u) - \wp_1(w)]} = \wp_1(u) + \wp_1(u+w) - \wp_1(w) ,$$

woraus

$$\wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = \wp_1\left(\frac{w_1}{2}\right) + \wp_1\left(w + \frac{w_1}{2}\right) + \wp_1(w) - 2\wp_1(w)$$

oder

$$\wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = -2\wp_1(w) .$$

Man hat demnach

$$\wp(u) = \wp_1(u) + \wp_1(u+w) + \frac{1}{2}\wp\left(\frac{w_1}{2}\right)$$

und folglich für $u = -\frac{w}{2}$

$$\wp_1\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1}{2}\wp\left(\frac{w}{2}\right) - \frac{1}{4}\wp\left(\frac{w_1}{2}\right) .$$

Schliesslich ist

$$[\wp(u) - \wp_1(u)][\wp_1(u) - \wp_1(w)] = L ,$$

also für $u = \frac{w}{2}$

$$\frac{\left[2\wp\left(\frac{w}{2}\right) + \wp\left(\frac{w_1}{2}\right)\right]^2}{16} = L .$$

Setzen wir dann

$$\wp\left(\frac{w+w_1}{2}\right) + \wp\left(\frac{w}{2}\right) = -\wp\left(\frac{w_1}{2}\right) = s ,$$

$$\wp\left(\frac{w+w_1}{2}\right)\wp\left(\frac{w}{2}\right) = p ,$$

so ergiebt sich

$$\wp(u) = \wp_1(u) + \frac{\frac{s^2 - 4p}{16}}{\wp_1(u) - \frac{s}{2}} ,$$

und die Wurzeln des $\wp_1$-integrals werden

$$\wp_1(w) = \frac{s}{2} \ , \ \wp_1\left(w + \frac{w_1}{2}\right) \Bigg| = -\frac{s}{4} \pm \sqrt{\frac{2s^2 + p}{4}} \ .$$
$$\wp_1\left(\frac{w_1}{2}\right) \Bigg|$$

Das Resultat der vorigen Untersuchung kann zu folgendem Theoreme zusammengefasst werden:

Durch die Substitution

$$z = \zeta_1 + \frac{\frac{s^2 - 4p}{16}}{\zeta_1 - \frac{s}{2}} \tag{3}$$

wird

$$u = \int_x^z \frac{dz}{\sqrt{4(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)}} = \int_x^{\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{4(\zeta_1 - r_1')(\zeta_1 - r_2')(\zeta_1 - r_3')}} \ ,$$

woselbst r_1' , r_2' , r_3' die Werthe

$$\frac{s}{2} \ , \ -\frac{s}{4} \pm \sqrt{\frac{2s^2 + p}{4}}$$

haben. Es bezeichnet dann $-s$ eine der Wurzeln r_1 , r_2 , r_3 und p das Produkt der beiden übrigen. Hat ferner $z = \wp(u)$ die Perioden w , w_1 und ist $-s = \wp\left(\frac{w_1}{2}\right)$, so hat $\zeta_1 = \wp_1(u)$ die Perioden $2w$, w_1 .

Im Folgenden seien die Wurzeln des $\wp$-integrals entweder alle reell oder sei eine reell und die beiden übrigen konjugirt imaginär. Im ersten Falle nehmen wir $r_1 > r_2 > r_3$ an , im zweiten Falle

$$r_1 = \frac{s}{2} + \beta i \ , \ r_2 = \frac{s}{2} - \beta i \ , \ \beta = \text{pos.}$$

und in beiden Fällen wird

$$r_3 = -s$$

gesetzt. Dadurch werden immer die Wurzeln des $\wp_1$-integrals sämmtlich reell. Werden diese Wurzeln durch r_1', r_2', r_3 derart bezeichnet, dass man

$$r_1' > r_2' > r_3'$$

hat, so wird

$$r_3' = -\frac{s}{4} - \sqrt{\frac{2s^2+p}{4}} .$$

Wird nun die Substitution wiederholt, indem man

$$\zeta_1 = \zeta_2 + \frac{\frac{s_1^2-4p_1}{16}}{\zeta_2 - \frac{s_1}{2}} , \quad \zeta_2 = \zeta_3 + \frac{\frac{s_2^2-4p_2}{16}}{\zeta_3 - \frac{s_2}{2}} , \text{ u. s. f.}$$

setzt, so wird

$$s_1 = \frac{s}{4} + \sqrt{\frac{2s^2+p}{4}} , \quad p_1 = \frac{s}{2}\left[-\frac{s}{4} + \sqrt{\frac{2s^2+p}{4}}\right] ,$$

und

$$s_2 = \frac{s}{4} + \sqrt{\frac{2s_1^2+p_1}{4}} ,$$

woraus durch Elimination von p und p_1

$$s_2 - \frac{s_1}{4} = \sqrt{\frac{\left(s_1 - \frac{s}{4}\right)\left(s_1 + \frac{s}{2}\right)}{2}}$$

und im Allgemeinen

$$(4) \qquad s_k - \frac{s_{k-1}}{4} = \sqrt{\frac{\left(s_{k-1} - \frac{s_{k-2}}{4}\right)\left(s_{k-1} + \frac{s_{k-2}}{2}\right)}{2}} .$$

Weil s_1 immer positiv und $s_1^2 > 4p_1$ ist, hat man

$$2s_1^2 + p < \frac{9s_1^2}{4} \quad \therefore \quad s_2 - \frac{s_1}{4} < \frac{3s_1}{4} ,$$

demnach

$$0 < s_2 < s_1 .$$

Wir haben folglich

$$s_1 > s_2 > s_3 > \ldots\ldots > s_k > \ldots\ldots > 0 \ .$$

Diese unendliche Zahlenmenge hat also einen Grenzwerth σ. Aus der Formel

$$s_k - \frac{s_{k-1}}{4} = \sqrt{\frac{2s_{k-1}^2 + p_{k-1}}{4}}$$

folgt

$$\lim_{k=\infty} [s_{k-1}^2 - 4p_{k-1}] = 0 \ .$$

Man sieht hieraus, dass die beiden grössten Wurzeln des φ_k-integrals für unendlich wachsende k gegen einen gemeinsamen Werth, nämlich $\frac{\sigma}{2}$, konvergiren. Gleichzeitig wächst die eine Periode der Funktion $\varphi_k(u)$ ins Unendliche, die andere bleibt $= w_1$, wenn $s = \varphi\left(\frac{w_1}{2}\right)$ gesetzt wird.

Um die Geschwindigkeit zu untersuchen, womit die S_k gegen ihre Grenze konvergiren, bemerken wir, dass

$$s_k > \frac{s_{k-1}}{4} \quad \therefore \quad s_{k-1} - s_k < \frac{3}{4} s_{k-1}$$

ist, und dass man identisch

$$\frac{\left(s_{k-1} + \frac{s_{k-2}}{2}\right)\left(s_{k-1} - \frac{s_{k-2}}{4}\right)}{2} = \frac{9s_{k-1}^2}{16} - \frac{1}{16}[s_{k-1} - s_{k-2}]^2$$

hat. Dann folgt aus der Formel (4)

$$(5) \qquad s_{k-1} - s_k = \frac{\frac{1}{16}[s_{k-1} - s_{k-2}]^2}{s_k + \frac{s_{k-1}}{2}} \ ,$$

woraus

$$s_{k-1} - s_k < \frac{1}{4}[s_{k-2} - s_{k-1}] \ .$$

Man zieht hieraus leicht

$$\frac{3}{4}\,\sigma > s_2 - \frac{s_1}{4}\ ,$$

folglich

$$\sigma > 0\ .$$

Weil die beiden grössten Wurzeln des φ_k-integrals gegen die gemeinsame Grenze $\frac{\sigma}{2}$ konvergiren, so leuchtet ein, dass man nach einer endlichen Anzahl von Substitutionen ein φ_k-integral erhalten muss, dessen beide grössten Wurzeln positiv ausfallen. Dann wird φ_k positiv und

$$s_{k+1} - \frac{s_k}{4} > \frac{s_k\sqrt{2}}{2}\ ,$$

d. h.

$$s_{k+1} > s_k\, 0{,}9571067$$

und demnach

$$\frac{(s_{k-1} - s_k)^2}{16} = (s_k - s_{k+1})\left(\frac{s_k}{2} + s_{k+1}\right) > (s_k - s_{k+1})\, s_k \ .\ 1{,}4571067$$

$$> (s_k - s_{k+1})^2\, \frac{1{,}4571067}{0{,}0428933}\ ,$$

folglich

$$(s_k - s_{k+1}) < 0{,}043\,(s_{k-1} - s_k)\ .$$

Setzt man

$$\int_k^z \frac{dz}{\sqrt{4\,(z - r_1)\,(z - r_2)\,(z - r_3)}} = u = J_k^z\ ,$$

so erhält dieses Integral bekanntlich verschiedene Werthe, jenachdem die Integrationswege von k bis z verschieden gewählt werden. Wenn u_1 irgend einen Werth des Integrals bezeichnet, so ist der allgemeine Werth von u mit der Bedingung, dass u_1 sein Zeichen behält,

$$u = u_1 \pm 2\,l\,J_{r_2}^{r_1} \pm 2\,m\,J_{r_3}^{r_1} \pm 2\,n\,J_{r_3}^{r_2}\ ,\ l\ ,\ m\ ,\ n\ ,\ =\ \text{ganze Zahlen}\ ,$$

wobei die Integrationswege der Integralen der rechten Seite willkürlich gewählte, sich selbst nicht schneidende endliche Kurven sind, welche die

Grenzpunkte der Integralen verbinden. Wählt man den Integrationsweg des Integrals $J_{r_3}^{r_2}$ willkürlich, so kann man immer die Integrationswege von $J_{r_2}^{r_1}$, $J_{r_3}^{r_1}$ derart bestimmen, dass

$$J_{r_3}^{r_1} - J_{r_2}^{r_1} = J_{r_3}^{r_2}$$

wird, wodurch der allgemeine Ausdruck von u zu

$$u = u_1 \pm 2l J_{r_2}^{r_1} \pm 2m J_{r_3}^{r_2}$$

vereinfacht wird. Wir können diesem Ausdrucke eine andere Form geben. Wir denken uns nämlich zwei Wege von r_2 zu r_1 , welche zusammen eine geschlossene Kurve bilden, die r_3 einschliesst.

Werden nun die diesen beiden Wegen entsprechenden Integralwerthe mit $J_{r_2}^{r_1}$, $J_{r_2}^{'r_1}$ bezeichnet, so findet man leicht, dass

$$J_{r_2}^{r_1} - J_{r_2}^{'r_1} = \pm 2 J_{r_2}^{r_3} \ ,$$

wodurch der allgemeine Werth von u sich folgendermassen schreiben lässt

$$u = u_1 \pm 2l J_{r_2}^{r_1} \pm m \left[J_{r_2}^{r_1} - J_{r_2}^{'r_1} \right]$$

oder ebensogut

$$u = u_1 \pm 2l J_{r_2}^{r_1} \pm m \left[J_{r_2}^{r_1} + J_{r_2}^{'r_1} \right] \ .$$

Sind nun die Wurzeln r_1 , r_2 , r_3 sämmtlich reell und $r_1 > r_2 > r_3$, so ist das Integral längs einer geschlossenen Kurve, die r_1 r_2 einschliesst, vom Zeichen abgesehen, gleich dem doppelten Integral längs der reellen Achse von $-\infty$ nach r_3, und das Integral längs einer geschlossenen Kurve um r_2 , r_3 gleich dem doppelten Integral von r_1 längs der reellen Achse nach $+\infty$, also

$$2 J_{r_2}^{r_1} = \pm 2 J_{-\infty}^{r_3} \ , \ 2 J_{r_3}^{r_2} = \pm 2 J_{r_1}^{\infty} \ .$$

Man hat also

$$u = u_1 \pm 2l J_{-\infty}^{r_3} \pm 2m J_{r_1}^{\infty}$$

und die Ecken des Parallelogrammnetzes der Funktion $\varphi(u)$ werden folglich durch

$$\pm 2l J_{-\infty}^{r_3} \pm 2m J_{r_1}^{\infty}$$

representirt, wobei $J_{-\infty}^{r_3}$ rein imaginär , $J_{r_1}^{\infty}$ reell wird.

Schreiben wir dann

$$w_1 = i \cdot \text{pos.} = \pm 2 J_{-\infty}^{r_3} \ , \ w = \text{pos.} = \pm 2 J_{r_1}^{z} \ .$$

so werden die Perioden von $\wp(u)$

$$w \ , \ w_1 \ .$$

Sind aber die Wurzeln r_1 , r_2 komplex, so werden $J_{r_2}^{r_1}$, $J_{r_2}^{(r_1)}$, vom Zeichen abgesehen, gleich je einem der Integralen $J_{-\infty}^{r_3}$, $J_{r_3}^{\infty}$, von welchen das erste rein imaginär, das zweite reell ist.

Setzen wir

$$w_1 = i \cdot \text{pos.} = \pm 2 J_{-\infty}^{r_3} \ ; \ w = \text{pos.} \pm 2 J_{r_3}^{\infty} \ ,$$

so hat in diesem Falle $\wp(u)$ die Perioden

$$w_1 \ , \ \frac{w + w_1}{2}$$

oder ebensogut

$$\frac{w + w_1}{2} \ , \ w \ .$$

Wir können folglich annehmen, dass $\wp(u)$ eine reelle Periode hat, sei es, dass sämmtliche Wurzeln reell oder dass zwei von ihnen komplex sind. Im ersten Falle hat $\wp(u)$ ein Periodenrechteck, im zweiten ein schiefwinkliges Parallelogramm, das von der kürzeren Diagonale in zwei gleichschenklige Dreiecke getheilt wird.

In der nächstfolgenden Untersuchung nehmen wir an, dass das Radikal unter dem Integralzeichen positiv oder negativ imaginär ist, wenn sich z längs der reellen Achse bewegt.

Aus der Gleichung

$$z = \zeta_1 + \frac{\frac{s^2 - 4p}{16}}{\zeta_1 - \frac{s}{2}} \ .$$

folgt

$$\zeta_1 = \frac{z}{2} + \frac{s}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{(z - r_1)(z - r_2)} \ ,$$

weil nämlich ζ_1 gleichzeitig mit $\zeta = -\infty$ sein soll. Bewegt sich ζ längs der reellen Achse von $-\infty$ nach $-s$, so bewegt sich ζ_1 längs der reellen Achse von $-\infty$ nach $-s_1$; folglich ist

$$\frac{w_1}{2} = \overline{J}^{s}_{-\infty}(\zeta) = \overline{J}^{s_1}_{-\infty}(\zeta_1) = \ldots\ldots = \int_{-\infty}^{-\sigma} \frac{d\zeta}{\sqrt{4\left(\zeta-\frac{\sigma}{2}\right)^2(\zeta+\sigma)}} = \frac{\pi i}{2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}}\,.$$

Haben nun ferner s', s_1', s_2' .... σ' dieselbe Bedeutung für

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4(z+r_1)(z+r_2)(z+r_3)}}\,,$$

wie s, s_1, s_2 ..... σ für

$$\int \frac{dz}{\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}}\,,$$

so ist $s' = r_1$ oder $s' = r_3$, je nachdem r_1, r_2 reell oder komplex sind.

Demnach hat man

$$\frac{w}{2} = \int_{s'}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}} = \pm i \int_{-\infty}^{-s'} \frac{dz}{\sqrt{4(z+r_1)(z+r_2)(z+r_3)}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{3\sigma'}{2}}}\,.$$

Wir haben also folgende Ausdrücke für die Halbperioden gefunden:

a) r_1, r_2, r_3 reell

$$\frac{w_1}{2} = \frac{\pi i}{2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}}\,,\quad \frac{w}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{3\sigma'}{2}}}$$

b) r_1, r_2 konjugirt komplex, r_3 reell

$$\frac{w}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{3\sigma'}{2}}}\,,\quad \frac{w+w_1}{4} = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{\frac{3\sigma'}{2}}} + \frac{i}{\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}}\right].$$

Ehe wir zu den praktischen Anwendungen der im Anfang dieser Abhandlung dargestellten Substitution schreiten, ist unsere nächste Aufgabe, theils auf eine eindeutige Weise das Integral als Funktion der oberen Grenze zu bestimmen, theils ein Gesetz festzustellen, nach welchem man bei jeder Substitution die obere Grenze des umgeformten Integrals zu wählen hat.

Wir behandeln zuerst den Fall, wo die Wurzeln des $\wp$-integrals sämmtlich reell sind.

Wir ziehen von r_1 aus durch r_2, r_3 nach $-\infty$ eine Gerade und stellen fest, dass die Integrationskurve diese Gerade nirgends schneiden darf. Ferner nehmen wir an, dass der Ausdruck

$$\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}$$

dieselbe Bedeutung hat, wie

$$2\sqrt{z-r_1}\sqrt{z-r_2}\sqrt{z-r_3}\ ,$$

und dass für $k = 1, 2, 3$

$$\sqrt{z-r_k} = \sqrt{R_k}\, e^{\frac{\theta_k i}{2}},\ \pi \geqq \theta_k > -\pi\ ,\ \sqrt{R_k} = \text{pos.}$$

Bestimmen wir endlich, dass die Integrationskurve ihren Anfangspunkt in $-\infty$ hat, welcher Punkt als oberhalb der reellen Achse und unendlich nahe an derselben liegend gedacht wird, so ist hierdurch das Integral

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}}$$

als eindeutige Funktion der oberen Grenze bestimmt. Was die Substitution betrifft, schreiben wir sie folgendermassen

$$\zeta_1 = \frac{z}{2} + \frac{s}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{z-r_1}\sqrt{z-r_2}$$

oder

$$\zeta_1 = \frac{z}{2} + \frac{s}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2}\, e^{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}i}\ , \tag{6}$$

wodurch auch diese eindeutig bestimmt ist.

Wir wollen nun die Grenzen des durch die Gleichung (6) bestimmten Funktionszweiges ζ_1 aufsuchen. Während z von $-\infty$ sich längs der reellen Achse nach r_2 bewegt, ist $\theta_1 = \theta_2 = \pi$, demnach

$$\zeta_1 = \frac{z}{2} + \frac{s}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2}$$

und ζ_1 geht auf der reellen Achse von $-\infty$ nach $\frac{r_2}{2} + \frac{s}{4}$, wobei z und ζ_1 gleichzeitig die betreffenden Punkte $-s$, $-s_1$ passiren. Bewegt sich z von r_2 nach r_1, so beschreibt ζ_1 die obere Hälfte des Kreises

$$\left(\xi - \frac{s}{2}\right)^2 + \eta^2 = \frac{s^2 - 4p}{16} \tag{7}$$

und zwar in negativer Winkelrichtung nach der Formel

$$\zeta_1 = \frac{z}{2} + \frac{s}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{R_1 R_2}\ .$$

Für $z = r_1$ hat man $\zeta_1 = \frac{r_1}{2} + \frac{s}{4}$. Wenn z, nachdem der Punkt r_1 in einem unendlich kleinen Kreis herumgegangen ist, dem Weg auf der unteren Seite der reellen Achse nach $-\infty$ folgt, so beschreibt der Punkt ζ_1 die untere Hälfte des genannten Kreises um nachher ebenfalls längs derselben Achse nach $-\infty$ seinen Weg zu verfolgen.

Die beiden grössten Wurzeln des ζ_1 entsprechenden $\wp_1$-integrals sind

$$\frac{s}{2}\ ,\ -\frac{s}{4} + \sqrt{\frac{2s^2 + p}{4}}\ .$$

Wie man leicht findet, liegen diese Punkte innerhalb des Kreises (7), und es folgt aus der obigen Auseinandersetzung, dass der einem gegebenen z-werth entsprechende Punkt ζ_1 immer ausserhalb dieses Kreises genommen werden muss.

Wir schreiten nun zum Studium des Integrals. So lange sich z auf der oberen Seite der reellen Achse und unendlich nahe an derselben befindet, so ist

$$\sqrt{(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)} = \sqrt{R_1 R_2 R_3}\, e^{\frac{k\pi i}{3}}\ ,$$

wo $k = 3, 2, 1$ ist, je nachdem man

$$z < r_3\ ,\quad r_3 < z < r_2\ ,\quad r_2 < z < r_1$$

hat. Setzen wir dann

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4\,(z-r_1)\,(z-r_2)\,(z-r_3)}} = u \ ,$$

so erhellt, dass, während z auf die oben beschriebene Weise sich bewegt, der Punkt u vom Koordinatenanfang ausgehend zuerst in positiv imaginärer Richtung nach nächstliegender Halbperiode, d. h. $\frac{w_1}{2}$, ferner in negativer Richtung nach $\frac{w_1 - w}{2}$ und dann in negativ imaginärer Richtung nach $-\frac{w}{2}$ läuft. Gelangt nun z bis an die untere Seite der reellen Achse, so wird das Zeichen des Integrals geändert und während der Bewegung auf dieser Seite geht u successive und immer geradlinig nach $-\frac{w + w_1}{2}$, $-\frac{w_1}{2}$ und 0 .

Das Parallelogramm

$$\frac{w_1}{2} \ , \ \frac{w_1 - w}{2} \ , \ -\frac{w_1 + w}{2} \ , \ 0 \ ,$$

das die Hälfte des zur Funktion $\wp(u)$ gehörigen Periodparallelogramms ausmacht, ist also der Funktionszweig des auf die oben angegebene Weise eindeutig bestimmten Integrals, und innerhalb desselben liegt nothwendig ein jeder einem gegebenen Werth von z entsprechender Punkt u .

Da ζ_1 weder in den Kreis (7) eindringen noch die reelle Achse an der linken Seite des Punktes r_1 schneiden kann, so leuchtet ein, dass die den folgenden Substitutionen entsprechenden Werthe $\zeta_2 , \zeta_3 \ldots$ ebenso wie die Integralen sämmtlich eindeutig bestimmt sind, und dass $\zeta_2 \zeta_3 \ldots .$ gleichzeitig mit z den Werth $-\infty$ annehmen. Zwischen je zwei nacheinander folgenden ζ-werthen gilt die Beziehung

$$(\zeta_k - \zeta_{k+1}) \left(\zeta_{k+1} - \frac{s_{k+1}}{2}\right) = \frac{s_k^2 - 4p_k}{16} = \left(s_k + \frac{s_{k+1}}{2}\right)(s_k - s_{k+1}) \ .$$

Weil

$$\left| \zeta_{k+1} - \frac{s_k}{2} \right| > \sqrt{\frac{s_k^2 - 4p_k}{16}}$$

sein muss, hat man

$$\left| \zeta_k - \zeta_{k+1} \right| < \sqrt{\frac{s_k^2 - 4p_k}{16}} < \sqrt{\frac{3\,s_k}{2}(s_k - s_{k+1})}$$

d. h.

$$\left| \zeta_k - \zeta_{k+1} \right| < \frac{s_{k-1} - s_k}{3{,}94},$$

woraus die Konvergenz der Zahlenreihe $\zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \ldots$ bewiesen ist.

Wir setzen dann

$$\zeta = \lim \zeta_k$$

und erhalten folglich

$$(8)\quad u = \int_{-\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}} = \int_{-\infty}^{\zeta} \frac{d\zeta}{2\left(\zeta - \frac{\sigma}{2}\right)\sqrt{\zeta + \sigma}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\frac{3\sigma}{2}}} \log \left[\frac{\sqrt{\zeta + \sigma} - \sqrt{\frac{3\sigma}{2}}}{\sqrt{\zeta + \sigma} + \sqrt{\frac{3\sigma}{2}}} \right],$$

woselbst $\sqrt{\zeta + \sigma}$ positiv imaginär oder komplex mit reell positivem Theil sein soll. Weil ζ die Gerade von $\frac{\sigma}{2}$ nach $-\infty$ nie überschreiten darf, wird der Logarithmus eindeutig. Für $\zeta = -\infty$ hat man $u = o$; folglich ist der Logarithmus principal.

Wir nehmen jetzt an, dass r_1 , r_2 komplex sind und dass r_3 einen reellen negativen Werth hat. Mit r_3 als Centrum schlagen wir einen Kreisbogen durch r_1 und r_2 und bestimmen, dass der Punkt z in seiner Bewegung ebensowenig diesen Bogen wie die reelle Achse an der konkaven Seite desselben schneiden darf. Ferner definiren wir

$$\sqrt{z - r_1} = \sqrt{R_1}\, e^{\frac{\theta_1 i}{2}} \quad , \sqrt{z - r_2} = \sqrt{R_2}\, e^{\frac{\theta_2 i}{2}}$$

folgendermassen: jedesmal, wenn z die durch r_1 der reellen Achse parallel und in positiver Richtung gezogene Gerade von oben nach unten passirt, geht der Winkel θ_1 durch Null und ändert das Zeichen von $+$ zu $-$, und jedesmal, wenn z die durch r_2 der reellen Achse parallel

und in positiver Richtung gezogene Gerade von oben nach unten passirt, geht der Winkel θ_2 durch Null und ändert das Zeichen von + zu −. Uebrigens sei wie zuvor

$$\sqrt{z-r_3} = \sqrt{R_3}\, e^{\frac{\theta_3 i}{2}},\ \pi \geqq \theta_3 > -\pi$$

$$\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)} = 2\sqrt{z-r_1}\sqrt{z-r_2}\sqrt{z-r_3}\ .$$

Wir wollen zuerst dem Integral, dessen Werth mit u bezeichnet wird, eine Untersuchung widmen.

Bewegt sich z an der oberen Seite der reellen Achse und derselben unendlich nahe von $-\infty$ nach demjenigen Punkt c, wo der Kreisbogen diese Achse schneidet, so bleibt $\theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ und θ_3 wird anfänglich $=\pi$, später $= 0$. Demnach ist für $-\infty < z < r_3$ und $r_3 < z < c$ bezw.:

$$\frac{dz}{\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}} = \frac{idz}{\sqrt{4R_1R_2R_3}},$$

$$\frac{dz}{\sqrt{4(z_1-r_1)(z_1-r_2)(z_1-r_3)}} = -\frac{dz}{\sqrt{R_1R_2R_3}}\ .$$

Der Punkt u bewegt sich also gleichzeitig vom Koordinatenanfang zuerst in positiv imaginärer Richtung nach $\frac{w_1}{2}$ und dann in negativer Richtung nach einem Punkt, den wir vorläufig durch $\frac{w_1}{2} - A$ bezeichnen.

Wir lassen jetzt z sich zuerst von c nach r_1 längs der konkaven Seite des Kreisbogens, nachher von r_1 nach r_2 längs der konvexen Seite und endlich von r_2 nach c längs der konkaven Seite bewegen. Bezeichnet dz das Bogendifferential, so findet man diesen drei Theilen der von z zu beschreibenden Bahn entsprechend

$$\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2} = \pi + \theta_3\ ,\ dz = e^{(\theta_3+\frac{\pi}{2})i}\, ds\ ,\ \theta_3 = \text{pos}\ .$$

$$\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2} = \theta_3\ ,\ dz = e^{(\theta_3-\frac{\pi}{2})i}\, ds\ ,\ \theta_3 = \text{pos. o. neg.}$$

$$\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3}{2} = -\pi + \theta_3\ \ dz = e^{(\theta_3+\frac{\pi}{2})i}\, ds\ ,\ \theta_3 = \text{neg.}$$

und folglich immer

$$\frac{dz}{\sqrt{4(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)}} = -\frac{ids}{\sqrt{4R_1R_2R_3}} .$$

Während des ganzen Verlaufs bewegt sich demnach u beständig in negativ imaginärer Richtung von $\frac{w_1}{2} - A$ zuerst nach der Halbperiode $-\frac{w}{4} + \frac{w_1}{4}$, woraus man $A = \frac{w}{4}$ findet, und dann der Reihe nach bis nach $-\frac{w}{4} - \frac{w_1}{4}$ und $-\frac{w}{4} - \frac{w_1}{2}$.

Während z endlich längs der negativen Seite der reellen Achse nach $-\infty$ läuft, kehrt u nach $-\frac{w_1}{2}$ und dann nach dem Koordinatenanfang zurück. Das Parallelogramm

$$\frac{w_1}{2}, \frac{w_1}{2} - \frac{w}{4}, -\frac{w_1}{2} - \frac{w}{4}, -\frac{w_1}{2}$$

macht die Hälfte des Parallelogramms der Funktion $\wp(u)$ aus. Innerhalb desselben fällt der einem gegebenen z-werth entsprechende Punkt u.

Indem wir nun schliesslich zum Studium der Substitution übergehen, wollen wir zuerst untersuchen, welche Kurve von ζ_1 beschrieben wird, wenn sich der Punkt z auf dem Kreisbogen durch r_1, r_2 bewegt.

Setzen wir zu diesem Zweck

$$r_1 = \alpha + \beta i , \; r_2 = \alpha - \beta i , \; s = 2\alpha ,$$

so wird die Substitution

$$(\zeta_1 - z)(\zeta_1 - \alpha) = \frac{\beta^2}{4} ,$$

woraus, wenn man ferner

$$\zeta_1 = \xi + \eta i , \; z = x + yi$$

setzt,

$$(\xi - x)(\xi - \alpha) - \eta(\eta - y) = \frac{\beta^2}{4} , \; (\eta - y)(\xi - \alpha) + \eta(\xi - x) = 0$$

und folglich

$$y = \frac{\eta}{R}\left[R + \frac{\beta^2}{4}\right] , \; x - \alpha = \frac{\xi - \alpha}{R}\left[R - \frac{\beta^2}{2}\right] ,$$

wo

$$R = (\xi - \alpha)^2 + \eta^2 .$$

Der Kreis durch $r_1\, r_2$ hat die Gleichung

$$(x-\alpha)^2 + 6\alpha\,(x-\alpha) + y^2 = \beta^2 \ .$$

Durch Elimination von x und y erhält man

$$\left[R + 3\alpha\,(\xi-\alpha) - \frac{\beta^2}{4}\right]^2 = (9\alpha^2+\beta^2)\,(\xi-\alpha)^2$$

oder die Gleichung zweier Kreise, die einander in den beiden Punkten

$$\left(\alpha\ ,\ \pm\frac{\beta}{2}\right)$$

schneiden. Der eine dieser Kreise

$$(9) \qquad \left[\xi - \frac{\varrho-\alpha}{2}\right]^2 + \eta^2 = \frac{\varrho^2 - 3\varrho\alpha}{2}\ ,\ \varrho = \sqrt{9\alpha^2+\beta^2}\ ,$$

schneidet die Abscissenachse in den beiden Punkten

$$A)\quad \xi = \frac{\varrho-\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\varrho^2-3\varrho\alpha}{2}}\ ,\quad B)\ \xi = \frac{\varrho-\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\varrho^2-3\varrho\alpha}{2}}\ .$$

Setzt man nun $\zeta_1 = \wp_1(u)$, so sind die Wurzeln des $\wp_1$-integrals

$$-\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\varrho}{2}\ ,\ \alpha\ .$$

Die beiden grössten von diesen liegen zwischen A und B und folglich innerhalb des Kreises (9); die kleinste Wurzel liegt ausserhalb desselben Kreises.

Wir definiren wie zuvor

$$\sqrt{(z-r_1)(z-r_2)} = \sqrt{z-r_1}\,\sqrt{z-r_2} = \sqrt{R_1 R_2}\, e^{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}i}$$

und setzen

$$\zeta_1 = \frac{z}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2}\, e^{\frac{\theta_1+\theta_2}{2}i}\ .$$

Bewegt sich nun z von $-\infty$ nach $-2\alpha+\varrho$ (= Punkt c) oberhalb und unendlich nahe an der reellen Achse, so ist $\theta_1+\theta_2 = 2\pi$ und ζ_1 bewegt sich gleichzeitig von $-\infty$ an dem Punkt $-s_1$ vorbei nach B, weil

$R_1 R_2$ für $z = -2\alpha + \varrho$ den Werth $2\varrho(\varrho - 3\alpha)$ erhält, welcher Werth der grösste ist, den $R_1 R_2$ für Punkte auf dem Bogen $r_1 r_2$ erhalten kann. Während der Bewegung des Punktes z auf diesem Bogen hat man

$$z = -2\alpha + \varrho e^{\theta_3 i}, \quad \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = k\pi + \frac{\theta_3}{2},$$

wobei k nacheinander die Werthe $1, 0, -1$ annimmt, während z um den Bogen $r_1 r_2$ herumgeht.

Liegt z an der konkaven Seite des Bogens und unendlich nahe an demselben, so hat man

$$\zeta_1 = \left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\varrho}{2}\operatorname{Cos}\varrho_3 - \frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2}\operatorname{Cos}\frac{\theta_3}{3}\right) + \frac{i}{2}\operatorname{Sin}\frac{\theta_3}{2}\left[2\varrho\operatorname{Cos}\frac{\theta_3}{2} - \sqrt{R_1 R_2}\right].$$

Für die konvexe Seite gilt dieselbe Formel mit geändertem Zeichen vor der Wurzel $\sqrt{R_1 R_2}$. Weil $2\varrho > \sqrt{R_1 R_2}$ ist, so leuchtet ein, dass z und ζ_1 gleichzeitig die reelle Achse verlassen, um nach derselben Seite zu gehen. Für $z = -2\alpha + \varrho$, wenn man sich diesen Punkt als an der konvexen Seite des Bogens liegend denkt, hat man

$$\zeta_1 = \frac{\varrho - \alpha}{2} + \sqrt{\frac{\varrho^2 - 3\varrho\alpha}{2}}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn z von $-2\alpha + \varrho$ nach r_1 auf der konkaven Seite, von da nach r_2 auf der konvexen und endlich nach $-2\alpha + \varrho$ auf der konkaven Seite läuft, der Punkt ζ_1 währenddessen den Kreis (9) in negativer Winkelrichtung beschreibt und auf diese Weise um die beiden grössten Wurzeln des φ_1-integrals herumgeht. Kehrt endlich z auf der unteren Seite der reellen Achse nach $-\infty$ zurück, so thut der Punkt ζ_1 dasselbe.

Aus der vorhergehenden Untersuchung folgt jetzt die Identität

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4(z - r_1)(z - r_2)(z - r_3)}} = \int_{-\infty}^{\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\sqrt{4(\zeta_1 - r_1)(\zeta_1 - r_2')(\zeta_1 - r_3')}},$$

wenn das rechte Integral auf die oben dargestellte Weise definirt wird.

Wir können jetzt auf das schon dargestellte die Fälle zurückführen, wo $\alpha \gtrless 0$ ist.

Ist nämlich α negativ und setzen wir in das Integral $-\zeta$ statt z, so erhalten wir

$$\pm\int_{-\infty}^{-\zeta}\frac{d\zeta}{\sqrt{4(\zeta-2\alpha)[(\zeta+\alpha)^2+\beta^2]}}=ui\ .$$

Wir können daher den Principalwerth des ersten Integrals derart bestimmen, dass

$$\int_{\infty}^{z}\frac{dz}{\sqrt{4(z+2\alpha)(z-\alpha^2+\beta^2)}}=-i\int_{-\infty}^{-z}\frac{dz}{\sqrt{4(z-2\alpha)[z+\alpha^2+\beta^2]}}\ .$$

Ist $\alpha=o$, können wir auf dieselbe Weise

$$\int_{\infty}^{z}\frac{dz}{\sqrt{4z(z^2+\beta^2)}}=\int_{-\infty}^{\frac{z}{i}}\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}dz}{\sqrt{4z(z^2-\beta^2)}}$$

setsen.

Eingehende Untersuchungen über diese Fälle sind von weniger Interesse. Sobald irgend ein Werth eines gegebenen Integrals definirt und berechnet ist, erhält man ohne Schwierigkeit jeden anderen Werth.

Nachdem wir also die theoretische Seite der Methode auseinandergesetzt, bleibt uns nur übrig, eine Darstellung der praktischen Behandlung zu geben.

Will man also den Werth u des Integrals

$$\int_{-\infty}^{z}\frac{dz}{\sqrt{4z^2-g_2z-g_3}}=u$$

einem gegebenen Werth der oberen Grenze z entsprechend berechnen, so sucht man zuerst eine Wurzel der Gleichung dritten Grades

$$4z^3-g_2z-g_3=o$$

und zwar die reelle, oder, wenn deren mehrere vorhanden sind, die kleinste unter ihnen. Diese Wurzel wird $-s$ genannt.

Dann ist

$$-4s^3+g_2s-g_3=o\ .$$

Bezeichnet p das Produkt der beiden übrigen, so hat man

$$p = -\frac{g_3}{4s}$$

und folglich

$$p + 2s^2 = \frac{g_2}{2} - \frac{3g_3}{4s} .$$

Nun sucht man mit grösster Genauigkeit den Werth von $\sqrt{p + 2s^2}$ und erhält so den Werth von s_1 nämlich

$$s_1 = \frac{s}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{2s^2 + p} .$$

Wir können jetzt mit weniger Genauigkeit die Werthe von s_2, s_3 u. s. w. mittelst der Formel (4) berechnen. Als Kontrolle und zur Verbesserung dient die Formel (5); im Nenner der rechten Seite derselben kann man statt s_k den soeben erhaltenen Werth dieser Grösse einsetzen.

Die Grösse $\frac{s^2 - 4p}{16}$ kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\frac{s^2 - 4p}{16} = \frac{A_o^2}{4} ,$$

wo

$$A_o^2 = 4(s - s_1)\left(s_1 + \frac{s}{2}\right) .$$

Wir haben also

$$(z - \zeta)\left(\zeta - \frac{s}{2}\right) = \frac{A_o^2}{4}$$

und im Allgemeinen

$$10) \qquad (\zeta_{k-1} - \zeta_k)\left(\zeta_k - \frac{s_{k-1}}{2}\right) = \frac{A_{k-1}^2}{4} ,$$

wo

$$A_{k-1}^2 = 4(s_{k-1} - s_k)\left(s_k + \frac{s_{k-1}}{2}\right) ,$$

folglich für $k \geqq 2$

$$A_{k-1} = \frac{1}{2}(s_{k-1} - s_{k-2}) . \qquad (5)$$

Dann ergiebt sich

$$\zeta_k = \frac{\zeta_{k-1}}{2} + \frac{s_{k-1}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\zeta_{k-1} - \frac{s_{k-1}}{2} + A_{k-1}\right)\left(\zeta_{k-} - \frac{s_{k-1}}{2} - A_{k-1}\right)} \ ,$$

wobei das Zeichen der obigen Theorie gemäss gewählt wird.

Als Kontrolle hat man die Formel (10), in deren linken Seite der rechte Faktor als bekannt angesehen werden kann, wodurch man einen besseren Werth von ζ_k erhält.

Bezeichnen σ und ζ die betreffenden Grenzen von s_k und ζ_k, so erhält man den Werth des Integral mittelst der Formel (8).

Beispiel I. Man suche die Perioden der durch die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + z + 3}} = u$$

bestimmten Funktion $z = \varphi(u)$.

Offenbar hat $4z^3 + z + 3 = 0$ eine reelle und zwei komplexe Wurzeln. Die reelle ist

$$-0{,}817182648 = -s \ .$$

Ferner ist

$$2s^2 + p = 2{,}25336242826 \quad \sqrt{2s^2 + p} = 1{,}501120391$$

$$\therefore \quad s_1 = 0{,}954855857 \ .$$

Setzt man nun annähernd

$$s_1 + \frac{s}{2} = 1{,}3634472 \ , \quad s_1 - \frac{s}{4} = 0{,}7505602 \ ,$$

so erhält man mit 7-stelligen Tabellen

$$\log\left(s_1 + \frac{s}{2}\right) = 0{,}1346383 \ , \quad \log\left(s_1 - \frac{s}{4}\right) = 0{,}8753855{-}1 \ ,$$

$$\text{woraus} \quad \log\left(s_2 - \frac{s_1}{4}\right) = 0{,}8544969{-}1 \quad \therefore \quad s_2 = 0{,}9540283 \ .$$

$$\text{Ferner:} \quad \log\left(s_2 + \frac{s_1}{2}\right) = 0{,}1557781 \quad \therefore \quad \log\left(s_3 - \frac{s_2}{4}\right) = 0{,}8546225{-}1$$

und

$$s_3 = s_2 = 0{,}9540283$$

Um genauere Werthe zu erhalten, setzen wir

$$s_1 - s_2 = \frac{\frac{1}{16}\ (s - s_1)^2}{s_2 + \frac{s_1}{2}} = \frac{1}{16}\left[\frac{(0{,}1376732)^2}{1{,}4314563}\right] .$$

$\therefore$ $\log\ (s_1 - s_2) = 0{,}9178001 - 4$ $\therefore$ $s_1 - s_2 = 0{,}000827561$

und

$$s_2 = 0{,}954028296 .$$

Ferner

$$s_2 - s_3 = \frac{1}{16}\left[\frac{(s_1 - s_2)^2}{s_3 + \frac{s_2}{2}}\right] = \frac{1}{16}\left[\frac{(0{,}000827561)^2}{1{,}4310424}\right]$$

$\therefore$ $\log\ (s_2 - s_3) = 0{,}4758279 - 8$, $s_2 - s_3 = 0{,}000000029910$

$$s_3 = s_4 = 0{,}954028266 = \sigma$$

und

$$\sqrt{\frac{3\sigma}{2}} = 1{,}196261844 .$$

Des späteren Gebrauchs wegen werden hier die Werthe von A_i angegeben.

$A_o^2 = -4 . 0{,}1877101487$, $A_1 = \frac{1}{2}(s_1 - s_0) = -0{,}068836105$.

$A_2 = \frac{1}{2}(s_1 - s_2) = 0{,}00041378$, $A_3 = \frac{1}{2}(s_2 - s_3) = 0{,}0000000015$,

---

Um nun auch σ' zu berechnen, setzen wir $s' = -0{,}8171827$, wobei $\sqrt{2s'^2 + p'} = 1{,}5011204$ und $s_1' = 0{,}5462645$ wird.

Man findet ferner

$s_2' = 0{,}3638676$, $s_3' = 0{,}3600310$, $s_4' = 0{,}3600293 = s_5' = \sigma'$

und

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\frac{3\sigma'}{2}}} = 2{,}1374965 .$$

Die Halbperioden werden demnach

$$\frac{w}{2} = 2{,}1374965 \ , \ \frac{w + w_1}{4} = 1{,}0687482 + 0{,}6565441\, i \ .$$

Beispiel II. Man suche den Werth des Integrals

$$\int_{-\infty}^{6+2i} \frac{dz}{\sqrt{4z^3 + z + 3}} = u \ .$$

Wir haben dann

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{s}{2} \pm A_0 \ , \ s = 6 + 2i \ ,$$

folglich

$$z - \frac{s}{2} + A_0 = 5{,}5914087 + 2{,}8665106\, i = R_1 e^{\theta_1 i}$$

$$z - \frac{s}{2} - A_0 = 5{,}5914087 + 1{,}1334894\, i = R_2 e^{\theta_2 i}$$

$$\theta_1 = 27^0 8' 33'',1 \ , \ \log \operatorname{Cos} \theta_1 = 9{,}9493288 - 10$$

$$\theta_2 = 11^0 27' 34'',9 \ , \ \log \operatorname{Cos} \theta_2 = 9{,}9912547 - 10$$

$$\log 5{,}5914087 = 0{,}7475213$$

$$\log \sqrt{\operatorname{Cos}\theta \operatorname{Cos}\theta_1} = 9{,}9702918 - 10 \ , \ 5{,}5914087 = \sqrt{R_1 R_2}\, \sqrt{\operatorname{Cos}\theta_1 \operatorname{Cos}\theta_2}$$

$$\therefore \quad \log \frac{1}{2} \sqrt{R_1 R_2} = 0{,}4761995$$

$$\log \operatorname{Cos} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 9{,}9748774 - 10 \ , \ \log \operatorname{Sin} \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 9{,}5192144 - 10$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \sqrt{R_1 R_2}\, e^{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} i} = 2{,}825381 + 0{,}9894957\, i$$

und

$$\zeta_1 = \frac{z}{2} + \frac{s}{4} + \frac{1}{2} \sqrt{R_1 R_2}\, e^{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} i} = 6{,}029676 + 1{,}9894957\, i \ .$$

Zur Verbesserung:

$$(\zeta - \zeta_1)\left(\zeta_1 - \frac{s}{2}\right) = \frac{A_0^2}{4}$$

$$z - \zeta_1 = -\frac{0{,}187710}{5{,}621085 + 1{,}9894957\ i} = -\frac{0{,}187710}{\varrho e^{\vartheta i}}$$

$$\vartheta = 19^0\,29'\,26'',2 \quad \log \mathrm{Cos}^2\,\vartheta = 0{,}9487434 - 1 \ , \ \log \frac{\mathrm{Sin}\,2\,\vartheta}{2} = 0{,}4976660 - 1$$

$$\zeta_1 - z = \frac{0{,}187710}{5{,}621085}\left[\mathrm{Cos}^2\,\vartheta - i\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\,\vartheta}{2}\right] ,$$

woraus

$$\zeta_1 = 6{,}02967636 + 1{,}98949641\ i \ .$$

Ferner ist

$$\zeta_1 - \frac{s_1}{2} + A_1 = 5{,}483412 + 1{,}989496\ i = R_1\, e^{\theta_1 i}$$

$$\zeta_1 - \frac{s_1}{2} - A_1 = 5{,}621084 + 1{,}989496\ i = R_2\, e^{\theta_2 i}$$

$$\log (R_1\,\mathrm{Cos}\,\theta_1) = 0{,}7390509 \ , \ \log (R_2\,\mathrm{Cos}\,\theta_2) = 0{,}7498201$$

$$\theta_1 = 19^0\,56'\,30'',6 \quad \log \mathrm{Cos}\,\theta_1 = 9{,}9731460 - 10$$

$$\theta_2 = 19^0\,29'\,26'',2 \quad \log \mathrm{Cos}\,\theta_2 = 9{,}9743717 - 10$$

$$\log \frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2} = 0{,}4696467 \ , \ \log \mathrm{Cos}\,\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 9{,}9737627 - 10$$

$$\log \mathrm{Sin}\,\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = 9{,}5280959 - 10$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{R_1 R_2}\ e^{\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} i} = 2{,}775936 + 0{,}9948157\ i$$

und

$$\zeta_2 = 6{,}029488 + 1{,}9895639\ i \ .$$

Zur Verbesserung:

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \frac{(0{,}0688361)^2}{4\,[5{,}552060 + 1{,}9895639\ i]} = \frac{(0{,}034418)^2}{\varrho e^{\vartheta i}}$$

$\vartheta = 19^0\,42'\,50'',4 \quad \log \mathrm{Cos}^2\,\vartheta = 0{,}9475374-1 \;,\; \log \dfrac{\mathrm{Sin}\,2\,\vartheta}{2} = 0{,}5018176-1$

$$\zeta_1 - \zeta_2 = \frac{(0{,}034418)^2}{5{,}55206}\left[\mathrm{Cos}^2\,\vartheta - i\,\frac{\mathrm{Sin}\,2\,\vartheta}{2}\right]$$

$\therefore$

$$\zeta_1 - \zeta_2 = 0{,}000189084 - 0{,}000067754\,i$$

und

$$\zeta_2 = 6{,}02948727 + 1{,}98956416\;i = \zeta_1$$

weil ζ_3 bis auf 7 Decimalstellen mit ζ_2 übereinstimmt .

Wir haben dann endlich

$$t = \sqrt{\zeta} + \sigma = 2{,}668792 + 0{,}327649\,i$$

und

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{3\,\sigma}{2}}} \log_e\left[\frac{1{,}472530 + 0{,}327649\,i}{3{,}865054 + 0{,}327649\,i}\right]$$

d. h.

$$u = \frac{-\,0{,}410483}{2\sqrt{\dfrac{3\,\sigma}{2}}\,\log_{10} e} + \frac{\pi}{2\sqrt{\dfrac{3\,\sigma}{2}}} \cdot \frac{7{,}6102}{180}\,i \;.$$

DIE MAGNETISCHE INKLINATION

IN UPSALA UND STOCKHOLM

VON

E. SOLANDER.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 16 Febr. 1889).

UPSALA, 1889,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

DIE MAGNETISCHE INKLINATION IN UPSALA UND STOCKHOLM.

Als ich im Herbste vorigen Jahres (1888) einige Inklinationsmessungen mit dem bei der schwedischen Polarstation auf Cap Thordsen angewandten vorzüglichen Inklinatorium Dover N:o 60 vornehmen wollte, war ich im Anfang sehr betroffen zu finden, dass beide Nadeln in der nämlichen Lage verschiedene Gleichgewichtsstellungen zu haben schienen. Mein erster Gedanke war, ganz natürlich, dass die Axen beschädigt, etwa verbogen seien. Da aber eine wahrnembare Biegung nicht vorhanden war, und die Axen auch unter dem Mikroskop keine Unebenheiten zeigten, kam ich zuletzt glücklicher Weise auf die Idée zu versuchen, ob der genannte Uebelstand auch da sich zeigen würde, wenn die Nadel, anstatt mit dem Aufheber, durch Näherung eines schwachen Beruhigungsmagnets in Schwingungen versetzt würde. Es zeigte sich aber dann eine fast vollständige Uebereinstimmung der einzelnen Ablesungen, und somit war auch dargelegt, dass der genannte Fehler in der Aufhebevorrichtung zu suchen sei. In der That; es waren die Zangen des Aufhebers nicht ganz rein (ich pflegte sie zuvor nur durch Abpinseln zu reinigen) und dies muss bewirkt haben, dass die Nadel beim Loslassen zufälliger Weise aus dem Meridiane gedreht wurde. Durch eigens angestellte Versuche fand ich, dass die Abweichung zweier konsekutiven Ablesungen in dieser Weise ungünstigsten Falles sogar $21',5$ betragen konnte, was einer Abweichung von $11°,5$ vom Meridiane entsprechen würde. Eine so grosse Drehung erscheint wohl kaum wahrscheinlich; vielleicht wird die Bewegung der Nadel etwas unregelmässig, wenn sie dermassen gedreht wird, dass die Axe nicht mehr auf den Achatscheiben senkrecht steht.

Es wurden nunmehr die Gabeln des Aufhebers durch anhaltendes Reiben mit sämischem Leder gereinigt, und nachher konnte wieder eine gute Einstellung erlangt werden, wenn man, wie es wohl immer geschehen muss, die Nadel mehrmals aufhebt und wieder so sanft als möglich niederlegt, bevor die definitiven Einstellungen vorgenommen werden. Wenigstens wurde auf diese Weise für die Nadel N:o 1 eine gute Einstellung erreicht; die Nadel N:o 2 will gern auch bei der sanftesten Niederlegung in grössere Schwingungen gerathen und ist dann für gewöhnlich aus der senkrechten Lage gedreht, was wahrscheinlich darauf beruht, dass die dickeren Theile der Axen, welche von dem Aufheber gefangen werden, nicht mit der gleichen grossen Sorgfalt wie die Axen selber gearbeitet sind. Die beiden mitgetheilten Bestimmungen mit dieser Nadel möchten doch wohl als brauchbare zu bezeichnen sein. Gut wäre es, wenn eine Vorrichtung angegeben werden könnte, welche die Nadel ganz automatisch genau senkrecht auf die Achatscheiben niederlegte, denn die Reibung übt gewiss einen viel geringeren Einfluss aus als die mehrgenannte Drehung der Nadel.

Die Bestimmungen sind an drei verschiedenen Orten angestellt worden; im magnetischen Observatorium zu Upsala; in dem kleinen Magnethäuschen nördlich vom astronomischen Observatorium zu Upsala und in dem kleinen magnetischen Observatorium zu Stockholm, nachdem dasselbe von den vielen Eisennägeln und sonstigen Eisengeräthen, die sich daselbst in neuerer Zeit angehäuft hatten, befreit worden war. Ein Regenmesser aus Eisenblech von der in Schweden gewöhnlichen Konstruktion, welcher 16 Schritte vom Platze aufgestellt war, hat hoffentlich keine wahrnehmbare Veränderung der Inklination hervorgerufen.

Die Messungen sind theils im Meridiane, theils in zwei auf einander senkrechten Azimuthen vorgenommen worden; die letzteren sind nach der allbekannten Formel

$$\cot^2 i = \cot^2 i_1 + \cot^2 i_2 \qquad (1)$$

berechnet worden, wo i_1 und i_2 die in den bezüglichen Azimuthen beobachteten Neigungen bezeichnen. Sind i_1 und i_2 einander nahe gleich, das heisst, werden diese Beobachtungen in (magnetischen) Azimuthen gemacht, welche nur sehr wenig von $\pm 45^0$ verschieden sind, so nimmt die Formel (1), wie leicht zu beweisen ist, die einfachere Gestalt an:

$$\cot i = \sqrt{2} \cot \tfrac{1}{2}(i_1 + i_2) = \sqrt{2} \cot i^1 , \qquad (2)$$

wo $i^1 = \frac{1}{2}(i_1 + i_2)$ zur Abkürzung gesetzt ist. Im allgemeinen ist man wohl geneigt, dergleichen Extrameridian-Bestimmungen, der grösseren Zahl der Ablesungen halber, ein grösseres Gewicht beizulegen; verschiedene Umstände beeinträchtigen aber die Genauigkeit des Resultats. Nehmen wir den einfachen Fall (2), so folgt zunächst durch Variation:

$$\frac{\delta i}{\sin 2i} = \sqrt{2}\,\frac{\delta i^1}{\sin 2i^1}$$

oder, da nach (2)

$$\sin 2i^1 = \frac{2}{2 + \cot^2 i} = \frac{2 \sin^2 i}{1 + \sin^2 i} ,$$

$$\delta i = \frac{1 + \sin^2 i}{\sqrt{2}} \,.\, \delta i^1 .$$

Setzt mann hier $i = 70^\circ 52'$, so folgt

$$\delta i = 1 . 34\, \delta i^1 ,$$

so dass ein Fehler bei der Bestimmung von i^1, in i nicht unbeträchtlich vergrössert auftritt. Um weiter zu sehen, um wieviel eine fehlerhafte Einstellung des Horizontalkreises die Bestimmung afficirt, variire man die Gleichung

$$\cos \alpha \cot i = \cot i_1 ,$$

wo α das Azimuth bezeichnet, nach α und i_1, woraus sich ergiebt,

$$\cot i \sin \alpha\, \delta\alpha = \frac{\delta i_1}{\sin 2 i_1} .$$

Setzt man hier $\alpha = 45^\circ$ und somit $i_1 = i^1$; folglich

$$\sin 2 i_1 = \frac{2 \sin^2 i}{1 + \sin^2 i} ,$$

so bekommt man

$$\delta i_1 = \frac{\sin 2\, i}{\sqrt{2}\,(1 + \sin^2 i)}\, \delta\alpha ,$$

und für $i = 70^\circ 52'$

$$\delta i_1 = 0 . 23\, \delta\alpha .$$

Ein Fehler von 1′ in α, welcher bei einer einmaligen Einstellung leicht zu begehen ist, verursacht somit einen Fehler von 0′,23 in i_1, was einen Fehler von 0′,31 in i entspricht. Dazu kommt noch, dass die Direktionskraft ausserhalb des Meridians geringer und somit der Einfluss der Reibung grösser wird. Dagegen wird der Einfluss einer eventuellen Drehung der Nadel ausserhalb des Meridians in sofern geringer, dass sie wohl mit gleicher Wahrscheinlichkeit bald nach Rechts, bald nach Links vor sich gehen dürfte, und i_1 dadurch bald vermehrt, bald verringert wird, wogegen bei einer Bestimmung im Meridian eine Drehung immer die Inklinationsobservation vergrössert. Aus diesen Gründen lege ich einer Extrameridianbestimmung das gleiche Gewicht wie einer Messung im Meridian bei[1]).

In der folgenden Tafel gebe ich die Werthe von i_1 und i_2, und in den gleichen Kolumnen die Mittelwerthe der bei Meridianbestimmungen erhaltenen Ablesungen, wenn das Ende A, resp. B, der Nordpol ist. Diese letzteren sind der Deutlichkeit wegen durch ein Sternchen bezeichnet.

Tafel der Inklinationsbestimmungen in Upsala und Stockholm im Herbste 1888.

Datum	Stunde	Instr.	Nadel	i_1, A. N.	i_2, B. N.	i	Station
Okt. 25	(13^h)	Dover	1	79° 9′.5	73° 50′.7	70° 51′.0	Upsala,
» 26	(12^h)	»	»	× 70° 50′.7	× 70° 53′.6	70° 52′.2	magnet. Obs.
» »	(13^h)	»	2	× 70° 50′.0	× 70° 54′.4	70° 52′.2	»
» 27	$12^h\,0^m$	»	2	76° 34′.9	75° 53′.1	70° 52′.9	»
» 29	$13^h\,10^m$	Gambey	1	× 70° 59′.5	× 70° 51′.0	70° 55′.3	»
» 30	(13^h)	»	»	76° 14′.0	76° 11′.9	70° 52′.0	»
» 31	(13^h)	»	»	× 70° 58′.5	× 70° 51′.5	70° 55′.0	»
Nov. 2	$12^h\,20^m$	Dover	1	76° 23′.4	76° 21′.4	71° 4′.6	Upsala,
» »	»	»	»	× 71° 2′.0	× 71° 5′.2	71° 3′.6	astron. Obs.
» 5	$14^h\,0^m$	»	»	× 70° 47′.1	× 70° 48′.3	70° 47′.7	Stockholm.
» »	»	»	»	76° 10′.5	76° 7′.5	70° 46′.7	»
» 6	$12^h\,0^m$	«	»	× 70° 45′.4	× 70° 49′.4	70° 47′.4	»
» 8	$11^h\,45^m$	»	»	× 70° 52′.9	× 70° 51′.7	70° 52′.3	Upsala,
» »	$12^h\,20^m$	»	»	——	× 70° 52′.5	70° 52′.7	magnet. Obs.

1) Vergl. übrigens Chr. Hansteen: »Den magnetiske Inklinations Forandring i den nordlige tempererte Zone»; K. Danske Videnskabsselsk. Skrifter, 5 Række, Bd 4.

Wie man sieht, sind einer Vergleichung der Instrumenten halber in Upsala auch einige Bestimmungen mit dem der Universität zugehörigen Inklinatorium, Konstruktion Gambey, ausgeführt worden. Es zeigt sich dabei, dass, ohne dass ein Fehler bei der Nadel zu entdecken ist, die Bestimmungen im Meridian die Inklination etwas zu gross angeben. Dies scheint aber zuvor nicht der Fall gewesen zu sein, denn da Prof. Lundquist[1]) im Jahre 1869 in Lund mit demselben Instrumente und derselben Nadel beobachtete, erhielt er:

bei einer Bestimmung ausserhalb des Meridianes $i = 69^\circ 7'.8$
» » » im Meridian $i = 69^\circ 7'.2$.

Ich hoffe daher, dass die früher mit diesem Instrumente ausgeführten Bestimmungen mit denen mittels Dover N:o 60 erhaltenen als völlig comparabel anzusehen sind.

Die in der Tabelle angegebene Tageszeit enspricht so genau als möglich der mittleren Ablesung; wenn an demselben Tage eine Bestimmung im Meridian und eine ausserhalb des Meridians ausgeführt wurde, so wurden die Ablesungen absichtlicht so geordnet, dass diese mittlere Zeit für beide die gleiche wurde. Im allgemeinen entspricht sie so ziemlich der Zeit, da die Inklination dem Tagesmittel gleich kommt; die tägliche Amplitude ist übrigens in dieser Jahreszeit nur sehr klein. Bei den Bestimmungen vom 8 Nov. wurde die Nadel zweimal ummagnetisirt; es sind dies somit eigentlich $1\,^1/_2$ Bestimmungen. Rechnet man sie jedoch zu zwei und nimmt von den Bestimmungen mit dem Inklinatorium Dover im magnetischen Observatorium zu Upsala das Mittel, so bekommt man $i = 70^\circ 52'.2$. Die gleichzeitigen Variationsablesungen waren im Mittel:

Instrument für Vertikalintensität (Unifilar mit Eisenstäben)

$$n'' = 188.2, \text{ bei einer mittleren Temperatur } t = 2^\circ.7.$$

Horizontalintensität, reducirt auf die Normaltemperatur $+ 15^\circ$ C,

$$n' - n = 141.1.$$

Deklination, $n = 199.8$.

1) G. Lundquist: Bidrag till kännedomen af den jordmagnetiska intensiteten och inklinationen i mellersta och södra Sverige. K. Svenska Vetenskapsakademiens Handl. Bd. 9, N:o 10.

In gleicher Weise erhält man für das Magnethäuschen bei dem astronomischen Observatorium zu Upsala die Inklination 71° 4′.1, und in Stockholm $i = 70° 47′.3$. Gemäss einer Bestimmung von Prof. Thalén am 16 Sept. 1888 ist die dem Theilstriche 127 entsprechende Horizontalintensität gleich 0.16226, was für den Theilstrich 141.1 $H = 0.16255$ giebt [1]); die Differenz zwischen dem Magnethäuschen am Observatorium und dem magnetischen Observatorium beträgt — 0.00163 [2]). Wollte man hieraus die Inklination berechnen, welche sich bei konstant angenommener Vertikalintensität für das Magnethäuschen am Observatorium herausstellen würde, so ergäbe sich $i = 71° 2′.9$; somit noch etwas kleiner als der gefundene Werth. Doch ist die Inklinationsdifferenz zwischen diesen Stationen grösstentheils dem Unterschied der Horizontalintensitäten zuzuschreiben; ganz anders verhält es sich aber mit der Differenz zwischen Stockholm und Upsala, denn auch in Stockholm ist die Horizontalintensität geringer als am magnetischen Observatorium zu Upsala.

Wir wollen nun die obigen Bestimmungen mit älteren an denselben Orten vorgenommenen zusammenzustellen suchen. Viele von diesen sind vom verstorbenen Prof. A. J. Ångström gemacht, dessen umfassende magnetische Messungen grösstentheils noch nicht veröffentlicht sind; die unten stehenden sind mir vom Herrn Prof. Thalén gütigst mitgetheilt worden und den Manuskripten Ångströms entnommen. Da indessen einige von diesen Bestimmungen an den Tageszeiten des Maximums oder Minimums und daneben zu einer Jahreszeit, wo die tägliche Amplitude eine grosse oder gar am grössten ist, gemacht worden sind, so halte ich es für geboten hier zuerst eine diesbezügliche Korrektion, wenigsten approximativ, ausfindig zu machen. Es liegt am Tage, dass die Amplitude etwas zu klein ausfällt, wenn man sie dadurch zu finden sucht, dass man die absolute Inklination vor- und nachmittags bestimmt, weil diese Bestimmung eine nicht unbeträchtliche Zeit erfordert; aus eben diesem Grunde ist es aber eben diese verkleinerte Amplitude, welche uns hier am meisten interessirt. Derartige Bestimmungen in der Zeit des Maximums und des Minimums giebt es hier in Schweden nur sehr wenige; dagegen hat Hansteen in Kristiania eine sehr beträchtliche Anzahl dergleichen ausgeführt, und da Kristiania auf nahezu derselben Latitude

1) Die vollständige Variationsformel lautet:

$$\delta H = 0{,}00002{\cdot}05\,[n' - n - 1{,}37\,(t^0 - 15^0)].$$

2) R. Thalén: »Jordmagnetiska bestämningar i Sverige under åren 1869—1871», in K. Svenska Vetenskapsakademiens Handlingar, Bd. 10, N:o 12.

liegt, wie Stockholm und Upsala, darf man wohl mit genügender Approximation seine diesbezüglichen Untersuchungen auf diese Städte ausdehnen. Eine nach Jahreszeiten geordnete Zusammenstellung seiner aus vieljährigen Beobachtungsreihen abgeleiteten Tagesamplituden giebt er in der »Uebersicht der Verhandlungen der Schwed. Akad. der Wissenschaften» (Öfversigt af K. Vetenskapsakademiens förhandlingar) XVI Jahrgang, 1859; und ich gebe sie hier wieder, nebst einer auf graphischem Wege erhaltenen Ausgleichung (Kolumne »Interp.») [1]).

1) Obwohl diese graphische Interpolation für den vorliegenden Zweck ausreichend ist, könnte es in theoretischer Hinsicht von Interesse sein die Tagesamplitude als eine Funktion der Jahreszeit analytisch zu berechnen. (Vergl. hierüber W. Kind: Ein Beitrag zur Bestimmung der tägl. Var. des Erdmagnetismus. Program des König-Wilhelms-Gymnas. zu Stettin 1887—1888.) Nach Fourier kann jede periodische Funktion $f(t)$ mit der Periode τ in trigonometrischer Reihe entwickelt werden, deren Aussehen sein wird:

$$f(t) = \tfrac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \frac{2\pi t}{\tau} + a_2 \cos 2 . \frac{2\pi t}{\tau} + \ldots$$

$$+ b_1 \sin \frac{2\pi t}{\tau} + b_2 \sin 2 . \frac{2\pi t}{\tau} + \ldots ,$$

wo $$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cos n . \frac{2\pi t}{\tau} . dt$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \sin n . \frac{2\pi t}{\tau} . dt .$$

Erlaubt man sich, wenn nur discrete Punkte der Funktion gegeben sind, eine Summation anstatt der Integrale zu schreiben, so werden die Coefficienten:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \sum_{\Delta t}^{\tau} f(t) \cos n . \frac{2\pi t}{\tau} . \Delta t$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \sum_{\Delta t}^{\tau} f(t) \sin n . \frac{2\pi t}{\tau} . \Delta t .$$

In dem vorliegenden Falle ist der Monat als Zeiteinheit zu wählen; ferner ist, da die Periode ein Jahr umfasst,

$$\frac{\Delta t}{\tau} = \frac{1}{12} ; \quad \frac{2\pi}{\tau} = \frac{360}{12} = 30^0 ,$$

so dass schliesslich die Coefficienten werden

$$a_n = \tfrac{1}{6} \sum_1^{12} f(t) \cos n . 30\, t$$

$$b_n = \tfrac{1}{6} \sum_1^{12} f(t) \sin n . 30\, t$$

Tägliche Amplitude der Inklination in Kristiania nach Hansteen.

Monat	Amplitude	Interp.	Ber.	Monat	Amplitude	Interp.	Ber.
Januar	0′.37	0′.30	0′.22	Juli	2′.79	2′.80	2′.62
Februar	0′.24	0′.40	0′.34	August	1′.77	2′ 08	1′.98
März	0′.97	0′.99	0′.97	September	1′.83	1′.62	1′ 67
April	2′.19	2′.00	2′.14	Oktober	1′.23	1′.07	1′.34
Mai	3′.15	3′.02	3′.18	November	0′.93	0′.75	0′.82
Juni	3′.23	3′.21	3′.30	December	0′.24	0′.32	0′.38

Im *magnetischen Observatorium zu Upsala* und in dessen unmittelbarer Nähe sind mir nun folgende frühere Inklinationsbestimmungen bekannt geworden:

Jahr	Dat.	Stunde	Inkl.	Instr.	Nadel	Beobachter	Station
1869	Febr. 8	$13^h\,15^m$	$71^0\ 0'.2$	Gambey	1	LUNDQUIST [1])	Magn. Obs.
»	Juni 15	——	$71^0\ 5'.85$	»	1 u. 2	»	Botan. Gart., E [2])
1870	Aug. 4	$13^h\,20^m$	$70^0\,58'.1$	»	1	ÅNGSTRÖM [1])	Magn. Obs.
»	»	$14^h\,0^m$	$70^0\,57'.4$	»	2	» [1])	»
1872	Juni 28	a. m.	$70^0\,58'.1$	»	1	»	»
»	» »	a. m.	$70^0\,57'.4$	»	2	»	»
»	» »	p. m.	$70^0\,54'.4$	»	2	»	»
»	» »	p. m.	$70^0\,53'.2$	»	1	»	»
»	» 29	a. m.	$71^0\,12'.9$	»	1 u. 2	LUNDQUIST	Carol.-Parke, L [2])
1882	Jan. 26	$12^h\,14^m$	$70^0\,51'.9$	Dover	1	SOLANDER	Magn. Obs.
»	Juni 21	$12^h\,30^m$	$70^0\,52'.3$	»	1 u. 2	»	»
1884	Jan. 30	$12^h\,40^m$	$70^0\,48'.3$	»	1	»	»
1886	Juni 22	$13^h\,26^m$	$70^0\,54'.0$	»	1	GYLLENSKIÖLD	»
»	» »	$14^h\,38^m$	$70^0\,54'.3$	»	2	»	»
»	» 28	$14^h\,27^m$	$70^0\,50'.6$	»	1	»	»

Angenommen, dass die Amplitudenfunktion nur Cosinusse und Sinusse des einfachen, des doppelten und des dreifachen Bogens enthält, berechnet sich, die Zeit der Januar amplitude gleich 1 gesetzt, für die Tagesamplitude A die folgende Formel:

$$A = 1',58 - 1',38 \cos 30\ t - 0',24 \sin 30\ t + 0',26 \cos 60\ t - 0',34 \sin 60\ t - 0',08 \cos 90\ t + 0',11 \sin 90\ t$$

oder die damit æqvivalente:

$$A = 1',58 - 1',40 \cos (30\ t - 9^0\,52') + 0',43 \cos (60\ t + 52^0\,36') - 0',14 \cos (90\ t + 54^0,0),$$

nach welcher die Werthe der letzten Kolumne nachträglich berechnet worden sind.

1) Siehe: G. LUNDQUIST: »Bidrag till kännedomen af den jordmagnetiska intensiteten och inklinationen i mellersta och södra Sverige». K. Svenska Vetenskapsakademiens Handl., Bd. 9, N:o 10.

2) Die Bezeichnung der Stationen ist der vorher citirten Abhandlung des Herrn Prof. THALÉN entnommen.

Offenbar können die nicht im Observatorium gemachten Bestimmungen zur Erörterung der *säkularen Variation* keinen Beitrag liefern, da die lästige lokale Perturbation sich ebenso bei der Inklination als bei der Horizontalintensität kund giebt, und eine etwaige Korrektion nicht bestimmt ist, auch kaum mit genügender Sicherheit bestimmt werden kann. Zieht man vom Mittel der am Vormittag des 28 Juni 1872 gemachten Bestimmungen die Hälfte der entsprechenden täglichen Amplitude (somit 1′.6) ab und addirt dieselbe Grösse zum Mittel der Nachmittagsbestimmungen, so erhält man die mittlere Inklination 70°55′.0, resp. 70°55′.4; ein Beweis, dass die tägliche Amplitude mit genügender Annäherung bestimmt ist. In diesem Falle, wo gleich viele Beobachtungen am Vor- wie am Nachmittage gegeben sind, wird natürlich übrigens das Generalmittel (70°55′.2) ohne weitere Korrektion von der täglichen Variation frei sein. Die Beobachtungen am 22 und 28 Juni 1886 sind mir freundlichst von Herrn Kand. Gyllenskiöld schriftlich mitgetheilt worden; er bemerkt dabei: »Den 22 Juni Perturbation: in 2 Stunden änderte sich die Inklination um 10′». Ich habe daher, in Ermangelung eines zuverlässigen Variationsinstrumentes, von seinen drei Bestimmungen nur die vom 28 Juni beibehalten. Berechnet man, um die Epoche des Minimums so genau als möglich zu erhalten, aus den übrig gebliebenen Werthe nach der Methode der kleinsten Qvadrate eine parabolische Formel für die Inklination, so ergiebt sich:

$$i = 71°0′.00 - 1′.417\,(t - 1869.0) + 0′.05074\,(t - 1869.0)^2\,,$$

was ein Minimum für die Epoche 1883.0 giebt. Die Uebereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe der Inklination ersieht man aus der folgenden kleinen Tabelle:

Jahr	i (beob.)	i (ber.)	Δ
1869.1	71° 0′.2	70°59′.9	0′.3
1870.6	70°57′.7	70°57′.9	— 0′.2
1872.5	70°55′.2	70°55′.7	— 0′.5
1882.3	70°52′.1	70°50′.1	2′.0
1884.1	70°48′.3	70°50′.2	— 1′.9
1886.6	70°50′.6	70°50′.8	— 0′.2
1888.8	70°52′.2	70°51′.8	0′.4

Die Uebereinstimmung entspricht wenigstens der Erwartung; ist doch in Pawlowsk, wo kontinuirliche Beobachtungen statt finden, zu eben diesen Zeiten die jährliche Variation bald positiv, bald negativ[1]).

Im *Magnethäuschen beim astronomischen Observatorium in Upsala* sind vorher folgende Bestimmungen gemacht worden; die für die tägliche Variation korrigirten Werthe sind in oben angegebener Weise erhalten:

Jahr	Stunde	i	i (korr.)	Instr.	Nadel	Beobachter
1852 Aug. 28	$18^h\ 0^m$	$71^0\ 24'.3$	$71^0\ 25'.3$	Gambey	1	Ångström
1854 » 22	$10^h\ 52^m$	26'.5	25'.5	»	2	»
» » »	$18^h\ 17^m$	24'.0	25'.0	»	2	»
» » 23	$10^h\ 45^m$	26'.0	25'.0	»	2	»
» » »	$10^h\ 48^m$	25'.9	24'.9	»	1	»
» » 24	$11^h\ 7^m$	25'.6	24'.6	»	2	»
» » 26	$11^h\ 30^m$	26'.9	25'.9	»	2	»
1855 Juni 20	$10^h\ 28^m$	24'.7	23'.1	»	1	»
» » »	$19^h\ 20^m$	22'.8	24'.4	»	1	»
» » 25	$12^h\ 38^m$	27'.8	[27'.8]	»	2	»
» » »	$18^h\ 23^m$	23'.7	25'.3	»	2	»
» » 26	$10^h\ 37^m$	26'.7	25'.1	»	2	»
» » »	$18^h\ 25^m$	22'.7	24'.3	»	2	»
1859 Aug. 13	$11^h\ 30^m$	16'.5	15'.5	»	1	Hansteen
	$12^h\ 15^m$	5'.5]	— —	»	2	

Die beiden von Hansteen ausgeführten Bestimmungen finden sich in seinem bereits citirten Aufsatze[2]). Die Bestimmung mit der Nadel N:o 2 ist, wie er selbst einräumt, nicht zuverlässig. Die ungleiche Vertheilung der obigen Beobachtungen gestattet es natürlich nicht eine säkulare Periode ausfindig zu machen, zumal da um die Zeit des Minimums gar keine Observationen vorliegen; die Zusammenstellung kann trotz-

1) Nachträglich habe ich noch einige in Upsala vorgenommene Inklinationsmessungen verzeichnet gefunden; siehe: L. A. Forssman: Jordmagnetiska observationer i Vesterbotten och Lappland. K. Vetenskaps-Akad. Handl., Bd 10, 1872; wonach im Mittel von 4 Beobachtungen im magnetischen Observatorium gilt: für den 29 Mai 1871 $i = 71^0\ 1'.2$; Tageszeit nicht angegeben. Da aber dieser Werth keine wesentliche Änderung der Formel herbeiführen würde, begnüge ich mich damit, ihn hier zu verzeichnen.

2) Öfversigt af K. Vetenskaps-Akad. Handl., Jahrg. 16, 1859.

dem späterhin von einigem Nutzen sein. Zu verzeichnen sind noch 43 Bestimmungen, welche Celsius am 19 Aug. und 20 Sept. 1743 in seinem im innern der Stadt gelegenen Garten ausführte, nach denen für 1743.7 $i = 75^{\circ}3'$ zu setzen wäre. (Siehe: »K. Vetenskaps-Akademiens Handl.», Vol. 5, 1744). Die einzelnen Bestimmungen weichen bis auf 45′ von einander ab; ausserdem hat er die Nadel nicht ummagnetisirt, so dass der angegebene Werth mit einem Fehler in Folge der Lage des Schwerpunktes behaftet sein kann.

Gehen wir nun auf *Stockholm* über, so finden wir bei Hansteen [1]) eine Zusammenstellung der bis 1859 dort gemachten Inklinationsbestimmungen. Dabei ist nun folgendes zu bemerken. Was die erste Observation von Wilcke betrifft, so sagt er, dass es unsicher ist, ob sie eine wirkliche Beobachtung sei oder nur auf Schätzung beruhe. Da es von besonderer Wichtigkeit ist, zeitlich fernliegende Beobachtungen zu haben, habe ich in den Abhandlungen Wilckes nachgeschlagen, und folgende Aeusserungen gefunden . . . »Stockholm, wo die (Inklinations-) Nadel zu dieser Zeit gegen 75° aufweist» . . .[2]) und neun Jahre später findet sich eine ebensolche Aussage [3]); schliesslich in derselben (späteren) Abhandlung, bei Besprechung des Einflusses von Seiten des Nordlichtes: »Die Inklinationsnadel hat durch bemerkenswerthe Aenderungen von 10, 15, 20, ja sogar 60 Minuten zu erkennen gegeben, dass» . . . Aus diesen Aeusserungen geht hervor, dass Wilcke (mit dem von ihm konstruirten Instrumente) die Inklination wirklich beobachtet hat; die letzte giebt uns daneben über die Empfindlichkeit des Instrumentes einigen Aufschluss, in sofern es Variationen von 10′ deutlich angezeigt haben muss. Die früheren Aussagen sind dann wohl so zu verstehen, dass die Bestimmungen bald einige Minuten mehr, bald einige weniger als 75° ergaben; die säkulare Aenderung in den neun Jahren scheint weniger als 10′ betragen zu haben. Ich hoffe der Wahrheit am nächsten zu kommen, wenn ich annehme, dass die Inklination 75°0′ der Zeit 1772.0 entspricht. Ein Paar von Hansteens eigenen Beobachtungen sind vom ihm in einem früheren Aufsatze [4]) etwas abweichend angegeben; es mag dies wahr-

1) Öfversigt af K. Vetenskaps-Akad. Handl., Jahrg. 16, 1859.

2) Wilcke: Försök till en magnetisk inklinationskarta. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handl. 1768.

3) Wilcke: Rön om magnetnålens årliga och dagliga ändringar i Stockholm. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handl., 1777.

4) Öfversigt af Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1844.

scheinlich auf einer Korrektion der täglichen Variation beruhen; jedenfalls ist wohl der späteren Angabe der Vorzug zu geben. Dagegen müssen sich wohl in dem späteren Aufsatze bei der Wiedergabe von Rudbergs Beobachtungen einige Fehler eingeschlichen haben; in der früheren steht nämlich für 1832.62 $i = 71^\circ 39'.5$; für 1832.96 $i = 71^\circ 41'.1$, was im Mittel für 1832.79 $i = 71^\circ 40'.3$ giebt; ferner ist 1838.20 ein offenbarer Druckfehler für 1833.20. Ich habe übrigens nur die erste dieser Beobachtungen in Rudbergs eigenen Publikationen wiedergefunden. Einer Aufzeichnung Ångströms zufolge schalte ich hier noch eine Bestimmung von Rudberg ein, nämlich: für 1834.98 $i = 71^\circ 39'.6$. Ferner ergaben (18) Messungen von Lottin[1]) am 5, 6, 7 und 8 Juli 1839 im Mittel $i = 71^\circ 30'.7$, wozu noch, da alle Messungen $10^h 0^m$ begannen, eine Korrektion von $-1'.4$ hinzukommt. In demselben Werke sind auch einige (5) Messungen von Lilliehöök am 3, 6 und 10 Juni 1843 angeführt, wonach im Mittel $i = 71^\circ 23'.2$; die mittlere Beobachtungszeit war gegen 13^h. Da aber diese Messungen offenbar dieselben waren, welche nachher in Schweden publicirt sind[2]), und zwar nach Angabe der Publikation für das Jahr 1845 gelten, so hielt ich es für geboten, um sicheren Aufschluss zu erhalten, den Herrn Commandeur Lilliehöök hierüber zu befragen, und bekam in freundlichster Weise die Antwort, es sei nach den Originalaufzeichnungen 1845 das richtige Jahr; die Angabe Bravais' müsse auf einer fehlerhaften Wiedergabe des Manuscriptes beruhen. Es stimmt dies auch mit dem Verzeichniss Hansteens überein. Nun hat aber auch Siljeström in demselben Jahre Beobachtungen gemacht[3]); behalten wir von seinen Beobachtungen nur die mit der Nadel N:o 1 gemachten bei, da er die mit der Nadel N:o 2 selber als wenig zuverlässig ansieht, so ergiebt sich als Mittel aus 15 Beobachtungen für 1845.70 $i = 71^\circ 18'.3$. Wenn man das Gewicht der Anzahl proportional annimmt, so erhält man aus den beiden Serien als Generalmittel für 1845.63 $i = 71^\circ 19'.6$. Aus dem genannten Aufsatze Siljeströms bekommt man ferner: für 1846.26 $i = 71^\circ 18'.4$ (8 Bestimmungen) und für 1847.61 $i = 71^\circ 20'.6$ (2 Bestimmungen). Endlich sind zu verzeichnen die Bestimmungen

1) P. Gaimard: Voyages en Scandinavie, en Laponie, au Spitzberg et aux Feröe pendant les années 1838, 1839 et 1840, 23e Livraison. Réd. par A. Bravais.

2) C. B. Lilliehöök: Magnetiska observationer, gjorda i Stockholm och Haparanda år 1845 oeh i Carlskrona år 1846. Öfversigt af K. V. A. Förhandl. 1883.

3) P. A. Siljeström: Bestämningar af magnetiska inklinationen i Stockholm, Sundsvall och Östersund. Öfversigt af K. V. A. Förhandlingar, 1888, s. 563.

Lundquists [1]) nach welchen für 1869.60 $i = 71^0\,0'.0$ (5 Bestimmungen). Die Bestimmungen Ångströms folgen hier in extenso; sie sind wie die vorher genannten mit dem Inklinatorium Gambey ausgeführt:

Jahr	Dat.	Stunde	Nadel	i	i (korrig. für die tägl Var.)	Bemerkungen
1849	Aug. 23	$13^h\,55^m$	1	$71^0\,16'.6$	$71^0\,16'.6$	
»	»	$14^h\,55^m$	2	$16'.0$	$16'.5$	Die halbe Amplituden-Korr.
1853	Juni 14	$19^h\,56^m$	1	$14'.1$	$15'.7$	
»	» »	$20^h\,38^m$	2	$12'.7$	$14'.3$	
»	» 15	$11^h\,38^m$	2	$17'.1$	$15'.5$	
1855	Juni 12	$18^h\,3^m$	1	$10'.8$	$12'.4$	
»	» 13	$12^h\,58^m$	1	$14'.5$	$14'.5$	

Fassen wir das Obige zusammen, so erhalten wir die folgende Tafel der *Inklinationsbestimmungen in Stockholm:*

Jahr	Beobachter	i (beob.)	i (ber.)	Δ
1772.0	Wilcke	$75^0\,0'.0$	$74^0\,58'.7$	$1'.3$
1825.63	Hansteen	$72^0\,8'.3$	$71^0\,59'.0$	$9'.3$
1828.43	»	$71^0\,43'.4$	$71^0\,52'.7$	$-9'.3$
1830.42	»	$71^0\,45'.0$	$71^0\,48'.5$	$-3'.5$
1832.79	Rudberg	$71^0\,40'.3$	$71^0\,43'.6$	$-3'.3$
1833.20	»	$71^0\,41'.6$	$71^0\,42'.9$	$-1'.3$
1834.98	»	$71^0\,39'.6$	$71^0\,39'.3$	$0'.3$
1839.52	Lottin	$71^0\,29'.3$	$71^0\,30'.9$	$-1'.6$
1842.56	Hansteen	$71^0\,22'.3$	$71^0\,25'.8$	$-3'.5$
1845.63	Lillieh. u. Siljestr.	$71^0\,19'.6$	$71^0\,21'.0$	$-1'.4$
1846.26	Siljeström	$71^0\,18'.4$	$71^0\,20'.0$	$-1'.6$
1847.61	»	$71^0\,20'.6$	$71^0\,18'.1$	$2'.5$
1849.64	Ångström	$71^0\,16'.6$	$71^0\,15'.2$	$1'.4$
1853.48	Ångstr. u. Hanst.	$71^0\,14'.6$	$71^0\,10'.3$	$4'.3$
1855.45	Ångström	$71^0\,13'.4$	$71^0\,8'.1$	$5'.3$
1859.60	Hansteen	$71^0\,5'.9$	$71^0\,3'.7$	$2'.2$
1869.60	Lundquist	$71^0\,0'.0$	$70^0\,56'.1$	$3'.9$
1888.85	Solander	$70^0\,47'.3$	$70^0\,52'.5$	$-5'.2$

1) G. Lundquist, l. c.

Die in der vorletzten Kolumne angeführten Werthe sind nach der Formel

$$i = 71^{0}\,49'.35 - (t - 1830)\log^{-1}0.32712 + (t - 1830)^{2}\log^{-1}8.29404$$

berechnet[1]). Dieselbe ergiebt eine Minimalinklination von $70^{0}\,52'.0$ für $t = 1883.96$, was mit der für Upsala schon berechneten Epoche gut übereinstimmt. Bei der Berechnung ist allen Elementen dasselbe Gewicht beigelegt, weil ja doch ein Mittel zur Schätzung des Gewichts für die meisten Elemente fehlt. Natürlich kann sich die Gültigkeit der Formel nicht weiter zurück erstrecken als die Beobachtungen reichen; giebt sie doch für das Jahr 1772 eine jährliche Abnahme von 4'.4, was nach den schon angeführten Aeusserungen Wilckes entschieden zu gross ist. Trotzdem erschien mir die Berechnung einer vollständigeren Formel, etwa einer sin — cos — Reihe, bei der jetzigen Lage der Sache nicht sehr lohnend, da der hohe Werth der Inklination im Jahre 1772 darauf deutet, dass die vorliegenden Bestimmungen immer nur einen geringen Theil einer ganzen Periode umfassen. Uebrigens kann eine einfache Formel nur im grossen und ganzen die säkulare Variation wiedergeben; die wirklich stattfindende scheint gleichsam aus Schwingungen verschiedener Perioden zusammengesetzt zu sein. Wenigstens deuten die Beobachtungen eine relative Vergrösserung der Inklination um 1830 und eine ebensolche um 1847 an.

Es ist zu bemerken, dass, obwohl alle Bestimmungen in Stockholm, vielleicht mit Ausnahme der Wilckeschen, auf der Anhöhe des astronomischen Observatoriums gemacht worden sind, — nur die aus dem Jahre 1828, heftigen Windes wegen, unterhalb des höchsten Punktes — doch nur die Beobachtungen vom Jahre 1842 an inclusive auf genau demselben Platze, dem magnetischen Holzgebäude, ausgeführt worden sind. Da somit lokale Perturbationen, welche in Schweden sehr häufig vorkommen, auf die früheren Bestimmungen möglicher Weise einigen Einfluss gehabt haben können, schien es von Interesse zu sein, auch aus den übrigen zehn Elementen allein die säkulare Variation zu berechnen. Man erhält in dieser Weise die folgende Tafel:

1) Das Symbol $log^{-1}a$ wende ich an um zu bezeichnen, dass die dem gegebenen Logarithmus, a, zugehörige Zahl zu nehmen ist.

Jahr	i (beob.)	i (ber.)	Δ
1842.56	71° 22′.3	71° 23′.1	— 0′.8
1845.63	71° 19′.6	71° 20′.3	— 0′.7
1846.26	71° 18′.4	71° 19′.7	— 1′.3
1847.61	71° 20′.6	71° 18′.5	2′.1
1849.64	71° 16′.6	71° 16′.7	— 0′.1
1853.48	71° 14′.6	71° 13′.3	1′.3
1855.45	71° 13′.4	71° 11′.6	1′.8
1859.60	71° 5′.9	71° 8′.2	— 2′.3
1869.60	71° 0′.0	71° 0′.3	— 0′.3
1888.85	70° 47′.3	70° 47′.1	0′.2

Die berechneten Werthe der Inklination sind der Formel

$$i = 71^\circ 35'.31 - (t - 1830)\log^{-1}0.00666 + (t - 1830)^2\log^{-1}7.52398$$

entnommen, nach welcher das Minimum erst 1981.9 zu erwarten wäre. Natürlich müssen die beobachteten und die berechneten Werthe dieser kleineren Serie besser mit einander übereinstimmen als die der vorangehenden. Ausser dem nicht sehr wahrscheinlichen Vorrücken der Minimumepoche um beinahe 100 Jahre muss aber beachtet werden, dass die Formel schon für 1830 einen um 10′ von der Beobachtung abweichenden Werth ergiebt und, was vielleicht wichtiger ist, die jährliche Abnahme für dieselbe Zeit beinahe um die Hälfte zu niedrig ansetzt. Es ist sehr zu bedauern, dass sich zwischen 1869 und 1888 gar keine Beobachtungen vorfinden, so dass man in der That auf den Ausschlag künftiger Zeiten verwiesen wird.

UEBER

DEN EINFUSS DER FADENTORSION

BEI

MAGNETISCHEN ABLENKUNGSVERSUCHEN

VON

E. SOLANDER.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 30 Mars 1889).

UPSALA, 1889,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

UEBER DEN EINFLUSS DER FADENTORSION BEI MAGNETISCHEN ABLENKUNGSVERSUCHEN.

So weit mir bekannt ist, wird bis jetzt der Einfluss der Torsion bei Deviationsbeobachtungen immer vernachlässigt, wenigstens wenn sie nach dem Lamontschen, oder damit verwandten Verfahren angestellt werden; in LAMONTS Handbuch des Erdmagnetismus findet sich sogar in einer Note die Behauptung, dass die Torsion auf das Endresultat gar keinen Einfluss ausübt. Dass dem nicht so ist, wird die folgende Darlegung zeigen; ungünstigsten Falles kann im Gegentheil die Vernachlässigung desselben erhebliche Fehler verursachen.

Es mögen die folgenden Bezeichnungen angewandt werden:

H = die Horizontalintensität des Erdmagnetismus,
M = magnetisches Moment des Ablenkungsmagnets,
μ = » » der Nadel,
e = der Abstand zwischen Nadel und Ablenkungsmagnet,
k = die Lamontsche Constante,
f = das Torsionsmoment des Aufhängefadens für 1° Drehung,
v = die Drehung (in Graden) des oberen Endes des Fadens, relativ zum unteren Ende,
α = die dadurch enstandene Abweichung der Nadel vom Meridian,
φ_1 = die Ablenkung der Nadel, wenn sie in der Richtung von α durch den Magnet abgelenkt wird,
φ_2 = die Ablenkung der Nadel, wenn der Magnet in die entgegengesetzte Richtung wirkt,
$\varphi = {}^1/_2 (\varphi_1 + \varphi_2)$;
φ_1 und φ_2 beide vom scheinbaren Meridiane ab nach beiden Seiten hin gerechnet.

Wir setzen voraus, dass die magnetische Axe des Ablenkungsmagnets verlängert die Nadel senkrecht in der Mitte schneidet. Bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen muss beachtet werden, dass die beiden Enden des Fadens bei jeder Einstellung dieselbe relative Lage haben.

Dann ergeben sich leicht folgende Gleichungen:

$$\mu H \sin \alpha = f.v, \tag{1}$$

$$\mu H \sin (\varphi_1 + \alpha) = \frac{2 k \mu M}{e^3} + f.v\ , \tag{2}$$

$$\mu H \sin (\varphi_2 - \alpha) = \frac{2 k \mu M}{e^3} - f.v\ . \tag{3}$$

Zieht man (3) von (2) ab, so erhält man:

$$\mu H \sin \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \alpha\right) \cos \varphi = f.v\ ,$$

somit unter Zuhülfenahme von (1):

$$\sin \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \alpha\right) \cos \varphi = \sin \alpha\ ,$$

und also:

$$\cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \alpha\right) = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}} = 1 - {}^1/_2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}\ ,$$

wenn höhere Potenzen von $\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}$ vernachlässigt werden.

Ferner ergiebt die Addition von (2) und (3)

$$\mu H \sin \varphi \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \alpha\right) = \frac{2 k \mu M}{e^3}\ ,$$

und somit:

$$H \sin \varphi \left(1 - {}^1/_2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}\right) = \frac{2 k M}{e^3}\ . \tag{4}$$

Will man die somit nothwendige Korrektion wegen Drehung aus dem Meridian als Verbesserung bei φ anbringen, so hat man, wenn φ_0 den verbesserten Ablenkungswinkel bezeichnet, zu setzen:

$$\sin \varphi_0 = \sin \varphi \left(1 - {}^1/_2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}\right)$$

und somit

$$\sin\frac{1}{2}(\varphi_0-\varphi)=-\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2\alpha\sin\varphi}{\cos^2\varphi\cos\frac{1}{2}(\varphi_0+\varphi)},$$

oder mit hinreichender Genauigkeit, wenn die Korrektion in Minuten ausgedrückt wird:

$$(5)\qquad \Delta_\alpha\varphi=\varphi_0-\varphi=-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{2\sin 1'\cos^2\varphi}\cdot\sin^2\alpha.$$

Bei einer Intensitätsbestimmung nach der Lamontschen Methode mit Schwingungen und Ablenkungen auf einem Abstande berechnet sich die entsprechende Korrektion der Horizontalintensität, weil in der Schlussformel H gegen $\sqrt{\sin\varphi}$ umgekehrt proportional ist, aus der Relation:

$$(6)\qquad \frac{\Delta_\alpha H}{H}=-\frac{\sin 1'\Delta_\alpha\varphi}{2\,.\,\operatorname{tg}\varphi}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}.$$

Die Korrektionen des Ablenkungswinkels pflegen wenigstens bis auf 0,′1 angegeben zu werden; der grösste Werth, den α dann erreichen darf, ohne eine diesbezügliche Korrektion zu erfordern, berechnet sich mithin aus:

$$\sin^2\alpha_m=\frac{0{,}2\sin 1'\cos^2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Setzt man $\varphi=45^0$, ein Ablenkungswinkel, der sich wohl als zweckmässig bewährt hat, so wird diese Grenze $\alpha_m=18,'5$. Macht man es sich zur Regel, die Torsion vor jeder Intensitätsbestimmung möglichst aufzuheben, so wird es wohl nicht schwierig sein, diese Grenze inne zu halten. Manche Instrumente aber, wie die Lamontschen Theodolite und Reisetheodolite, besitzen keine Vorrichtung zur Aufhebung der Torsion, und dann kann es geschehen, dass der Winkel α im Laufe der Zeit, in Folge elastischer Nachwirkungen, sehr beträchtliche Werthe erreicht. Beispielsweise sei daran erinnert, dass bei dem Lamontschen Reisetheodolit, welcher auf der schwedischen Polarstation in Spitzbergen 1882—1883 angewandt wurde, dieser Winkel vor der Aufhebung der Torsion (im Beginne des April 1883) fast 3^0, und dass bei dem Edelmannschen Theodolit, obschon die Torsion in Schweden durch tagelanges Anhängen des Torsionsgewichtes aufgehoben war, am 12 Juli 1883 sogar ein wenig

mehr als 8° betrug. Da im Mittel (für den Theilstrich 100 des Variationsapparates) $H = 0.08921$ war und der Ablenkungswinkel beim Lamontschen Reisetheodolit im Mittel 46°12′ betrug, so müssen nach Formel (6) die vor April mit diesem Instrumente erhaltenen Werthe von H mit 0.00013 vermehrt werden. Natürlich ist diese Korrektion nur annäherungsweise gemacht, da die Torsion wahrscheinlich nicht constant gewesen ist, und ich bei den Ablenkungen die Mittelrichtung nicht zu beobachten pflegte, so dass sie nicht für jede Beobachtung einzeln bestimmt werden kann.

Um die gewonnene Relation auch experimentell zu prüfen habe ich im hiesigen magnetischen Observatorium einige Versuche angestellt mit einem Theodolite englischer Konstruktion, welcher die in den Jahren 1851—1853 von Schweden unternommene Weltumsegelung mitgemacht hat und später von den Herren G. Lundquist und L. A. Forssman bei magnetischen Messungen in Schweden angewandt worden ist [1]). Sowohl der Aufsatz für Schwingungen als auch der für Ablenkungen ist oben mit kleinen Torsionskreisen versehen. Die Ablesung der Alhidade geschieht vermittelst Loupe und Nonius, welcher bis auf 20″ getheilt ist; die Einstellung vermittelst eines Fernrohrs mit geringer Brennweite und einer darüber befindlichen gekrümmten Scala, deren Theilstriche je zwei Minuten abgrenzen und eine Abschätzung nach Zehntel bequem zulassen. Was die übrigen Einzelheiten anbetrifft, so verweise ich auf die citirten Abhandlungen. Nach einer Intensitätsbestimmung, auf die ich später zurückkomme, wurde anstatt der Nadel ein Torsionsgewicht eingehängt. Dabei wurde leider der Faden zerrissen und durch einen neuen ersetzt von anscheinend derselben Dicke aber ein wenig grösserer Länge. Derselbe wurde mit drei Knoten versehen, um Bifilarsuspension zu vermeiden. Das Torsionsgewicht blieb vom 30 Januar bis zum 7 Februar hängen, und dann wurde am 7 und 8 Februar der Ablenkungswinkel im Abstande von 0,6 englischen Fuss bestimmt. Aus der zweiten dieser Messungen wurde in üblicher Weise die noch übrige Torsion berechnet [2])

1) A. J. Angström: Voyage autour du monde sur la frégate suédoise L'Eugénie. Observations scientifiques publiées par l'Académie royale des sciences à Stockholm 1858—1874. III. Physique;

G. Lundquist: Bidrag till kännedomen af den jordmagnetiska intensiteten och inklinationen i mellersta och södra Sverige. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar 1871. Bd. 9. N:o 10;

L. A. Forssman: Observationer öfver den jordmagnetiska horizontalintensiteten och inklinationen inom Westerbotten och Lappland. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar 1872. Bd. 10. N:o 13.

2) Lamont: Handbuch des Erdmagnetismus, Seite 115.

und gleich — 16′.5 gefunden [1]). Aus $\varphi = 56^0 20'$ berechnet sich dann $\Delta_\alpha \varphi = -11''$, und das um diese kleine Qvantität reducirte Mittel der genannten Bestimmungen ist als beobachteter Werth φ_0 angesehen worden. Die Ablenkungswinkel müssen korrigirt werden

1) wegen der Ungleichheit der Winkel, $\Delta_u \varphi$;

2) wegen unregelmässiger Variationen der Deklination. Da die Kreistheilung von Nord über Ost wächst und die erste Ablenkung immer nach Osten stattfand, erhalten wir bei der angewandten Ångströmschen Beobachtungsweise mit 7 Ablenkungen, von denen die 3 letzten eine Wiederholung der drei ersten in umgekehrter Ordnung sind, folgende Korrektion:

$$\Delta_\delta \varphi = +\frac{\varepsilon}{8}(n_1 + n_2 - n_3 - 2n_4 - n_5 + n_6 + n_7) ,$$

wo $\varepsilon = 0'.677$ der Winkelwerth eines Scalatheiles des Variationsinstrumentes bezeichnet;

3) und 4) wegen Variationen der Horizontalintensität und der Temperatur. Dieselben sind:

$$\Delta_H \varphi + \Delta_t \varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin 1'} \cdot \frac{\delta H}{H} + \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sin 1'}(\alpha + 3k)t ,$$

wo α den Temperaturkoefficienten des Magnets, k den Dilatationskoefficienten der Scheine bezeichnet. Es ist aber:

$$\frac{\delta H}{H} = \frac{\varepsilon \,.\, \sin 1'}{\operatorname{tg}\psi}(n' - n) ,$$

wo $\psi = 57^0 17'$ der Ablenkungswinkel des Variationsinstrumentes bedeutet; somit auch:

$$\Delta_H \varphi = \frac{\varepsilon \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\psi}(n' - n) ;$$

ferner ist nach Ångströms Bestimmungen:

$$\log(1 + \alpha) = 0.0000860 \text{ [2])}$$

für den angewandten Magnet, der mit B_4 bezeichnet ist.

1) Ich habe α positiv gerechnet für den Fall, dass die Ablesung vermehrt wird, somit von Nord über Ost, da die Kreistheilung des fraglichen Instrumentes in dieser Richtung zunimmt.

2) Thermometer Celsius.

Mithin wird, da die Schiene aus Kupfer ist:

$$(\Delta_H + \Delta_t)\,\varphi = 0'.653\,(n' - n) + 1'.29\,t\,.$$

Es sind die Winkel auf $(n' - n)_0 = 130$ reducirt, wo der Index 0 bezeichnet, dass die Variationsablesungen auf 0° reducirt sind. Da die Temperaturkorrektion des Variationsinstrumentes $-1.37\,(t - 15^0)$ beträgt, so ist dies dasselbe wie $(n' - n)_{15} = 150{,}5$. Ferner wurden die Winkel auf 0° Temperatur reducirt. Der Werth φ der zweiten Columne ist der direct beobachtete. Der Torsionswinkel α ist nach der Lamontschen Methode berechnet.

Ablenkungen mit Magnet B, bei verschiedenen Torsionswinkeln.

Dat.	φ	$(n'-n)_0$	t	$\Delta_u\varphi$	$\Delta_\delta\varphi$	φ korr.	α	$\Delta_\alpha\varphi$ beob.	$\Delta_\alpha\varphi$ ber.
Febr 7	56° 20′ 12″	134.8	— 2.0	— 46″	— 6″	56° 19′ 53″			
» 8	56° 29′ 8″	122.0	— 2.2	— 44″	+ 17″	56° 20′ 38″	— 16′.5		— 0′.2
» »	56° 26′ 48″	128.4	— 1.7	— 42″	— 2″	56° 22′ 50″	1° 21′.3	— 2′.8	— 4′ 7
» 9	56° 50′ 43″	136.2	— 3.5	— 37″	+ 4″	56° 49′ 42″	3° 28′.0	— 29′.6	— 30′.7
» »	58° 25′ 45″	135.9	— 3.4	—1′ 12″	+ 41″	58° 26′ 34″	7° 17′	— 2° 6′.5	— 2° 15′

Die letzte Bestimmung ist nur eine angenäherte, da sich die Torsion während der Ablenkungen noch um etwa 15′ änderte. Am besten in dieser Beziehung ist die vorletzte Bestimmung, da die Nadel einen Tag lang tordirt gestanden hatte; bei dieser stimmen auch Beobachtung und Rechnung gut überein.

Die zweite Bestimmung am 8 Februar entspricht einer Drehung des oberen Fadenendes um 360°, doch wurde natürlich der Winkel φ erst eine Weile nach dieser Drehung bestimmt. Der Winkel α, welcher unmittelbar nach der Drehung stattfindet, ist nicht unbeträchtlich grösser als 1° 21′; er wurde bei dieser Gelegenheit, durch Drehung um 360° abwechselnd nach Rechts und nach Links, gleich 1° 47′ gefunden. Nach Beendigung dieser Beobachtungen am 15 Februar bestimmte ich denselben nochmals und bekam dann den Werth 1° 34′.1; späterhin am 24 April, nachdem das Instrument binnen der Zwischenzeit in Ruhe gelassen war, fand ich denselben aber gleich 2° 5′.0. Ich führe dies als ein Beispiel der grossen elastischen Nachwirkungen der Coconfäden an. Freilich sollte die Bestimmung von φ von dem Torsionsmoment des Fadens unabhängig werden; jedoch kann es wohl zu befürchten sein, dass bei grossem Torsionsmomente und damit zusammenhängendem grossen Effecte

der elastischen Nachwirkungen die Einstellungen etwas unsicher werden, zumal da bei der Ablenkung ausserhalb des Meridians die Direktionskraft der Nadel erheblich verringert wird.

Kehren wir nun zu der oben genannten Intensitätsbestimmung zurück! In der citirten Abhandlung des Herrn Professor Lundquist sind die bei dem Abstande von 0.7 engl. Fuss, welcher hier in Frage kommt, anzuwendenden Formeln nach Ångströms Bestimmungen zusammengestellt, und zwar sind es folgende:
für Magnet B_4

$$\log H = 9.74823 - \frac{1}{2}\log\sin\varphi - \log T + 4.9\,(t_T - t_\varphi) - 0.67\,t_\varphi + (9'.0 - \eta) - 228\,(H - 0.156)\,;$$

und für Magnet R_3

$$\log H = 9.76631 - \frac{1}{2}\log\sin\varphi - \log T + 5.6\,(t_T - t_\varphi) - 0.67\,t_\varphi + (9'.0 - \eta) - 166\,(H - 0.156)\,,$$

wo ich nur die formelle Aenderung eingeführt habe, H in C. G. S. Einheiten zu rechnen und durch T die Zeit einer Schwingung zu bezeichnen anstatt hundert derselben. Will man direct *log H* auf die Normalintensität reduciren, was vorzuziehen ist, so muss beiden Gleichungen noch das Korrektionsglied

$$-\,\mathrm{Mod}\,.\,\frac{\varepsilon\sin 1'}{\mathrm{tg}\,\psi}\,(n' - n)_{15} = -\,5.50\,(n' - n)_{15}$$

hinzugefügt werden, wo $(n' - n)_{15}$ den mittleren Stand bei Schwingungen und Ablenkungen bezeichnet. Die Korrektionen sind in Einheiten der fünften Decimalstelle des Logarithmus angegeben. Es bezeichnet η die Torsion in Minuten für 360° Drehung beim Schwingungsapparate. Eigentlich wäre wohl nunmehr für das Induktionsglied ein anderer und zwar höherer Werth zu setzen. Denn nach Lamonts Definition ist der Induktionskoefficient, $\varkappa$, das Verhältniss des im Stahle durch eine Feld eins inducierten Momentes, μ, zu dem Momente des Magnetes, somit:

$$\varkappa = \frac{\mu}{M}\,,$$

woraus folgt:

$$\Delta\log\varkappa = -\,\Delta\log M\,.$$

In der That habe ich bei einem neuen Edelmannschen Magnete eine beträchtliche Zunahme von $\varkappa$ mit der Zeit gefunden [1]). Da es sich aber nur um ein Korrektionsglied handelt, habe ich die obigen Angaben als hinreichend genau angesehen. Die Induktionskorrektion bei den Ablenkungen ist bei der Constante mit eingerechnet, und dies ist auch immer zulässig, denn es ist

$$\varkappa H \sin\varphi = \varkappa \cdot \frac{2kM}{e^3} = \text{Const}.$$

und dies ist, beim gegeben Abstande, genau, auch wenn dass Moment sich ändert. Bei der genannten Intensitätsbestimmung erhielt ich:

Januar 29: $\log T = 0.676854$; $(n' - n)_{15} = 154.1$; $t = -1.1$; $\eta = 35,'2$
» 30: $\varphi = 32^0\,11'\,23''$; $(n' = n)_{15} = 154.0$; $t = +0.8$,

woraus sich berechnet $H_{130} = 0.16086$. Aus den Ablenkungen in Verbindung mit gleichzeitiger Ablesung der Mittelrichtung wurde aber $\alpha = 6^0\,50,'6$ berechnet, und daraus folgt nach (6) $\Delta_\alpha H = 0.00080$; somit $H_{130} = 0.16166$. Nach den beschriebenen Ablenkungsversuchen wurde der Faden wieder in die untordierte Lage zurückgedreht und Bestimmungen mit beiden Nadeln vorgenommen, und zwar mit Ablenkungen in zwei Abständen $e_3 = 0.7$; $e_1 = 1.3$ engl. Fuss. Es ergab sich dabei:

Febr. 13	$\varphi_2 = 31^0\,50'\,20''$;	$(n' - n)_{15} = 161.7$;	$t = -6.7$	Magnet	B_4
» »	$\varphi_1 = 4^0\,46'\,20''$;	$(n' - n)_{15} = 162.5$;	$t = -6.9$	»	»
» 14	$\log T = 0.677111$;	$(n' - n)_{15} = 159.8$;	$t = -4.3$; $\eta = 33'.0$	»	»
» 14 u. 15	$\log T = 0.671357$;	$(n' - n)_{15} = 159.8$;	$t = -3.5$; $\eta = 27'.4$	»	R_3
» 15	$\varphi_2 = 36^0\ 2'\,7''$;	$(n' - n)_{15} = 158.5$;	$t = -2.1$	»	»
» »	$\varphi_1 = 5^0\,19'\,4$;	$(n' - n)_{15} = 159.1$;	$t = -2.0$	»	»

Benutzt man in erster Hand nur die Ablenkungen am kleineren Abstande, so erhält man: mit Magnet B_4 $H_{130} = 0.16152$, und mit R_3 $H_{130} = 0.16154$. Es geben diese Bestimmungen somit etwas kleinere Werthe als der oben gefundene, was wahrscheinlich durch eine nicht hinreichend genaue Bestimmung der grossen Torsion ($6^0\,50,'6$) veranlasst worden ist.

Um nun auch die Ablenkungen in zwei Abständen verwenden zu können, erinnere ich daran, dass Ablenkungsmagnete und Nadel aus ähnlichen Hohlcylindern bestehen, deren Längenverhältniss $\sqrt{3} : \sqrt{2}$ ist, was zur

1) E. Solander: Observations faites au Cap Tordsen, Spitzberg, par l'expédition suédoise 1882—1883. T. I: 4. Magnétisme terrestre. Beiläufig sei hier ein Fehler berichtigt; es ist nämlich im Texte der Induktionskoefficient in Gaussischen Einheiten ausgedrückt und die angegeben Werthe müssen daher mit 10 multiplicirt werden.

Folge hat, dass das zweite Glied in der Reihenentwickelung verschwindet. Vorausgesetzt, dass dies mit hinreichender Genauigkeit geschehen ist, hat man von den Gleichungen auszugehen:

$$H \sin \varphi_1 = \frac{2M}{e_1^3}\left(1 + \frac{q}{e_1^4}\right),$$

$$H \sin \varphi_2 = \frac{2M}{e_2^3}\left(1 + \frac{q}{e_2^4}\right).$$

Wird aus diesen q eliminirt, so bekommt man:

$$\frac{H}{2M} = \frac{e_1^4 - e_2^4}{e_1^7 \sin \varphi_1 - e_2^7 \sin \varphi_2},$$

und mit Hinzuziehung der Gleichung:

$$HM = \frac{\pi^2 K}{T^2},$$

$$H = \frac{\pi}{T}\sqrt{2K} \cdot \sqrt{\frac{e_1^4 - e_2^4}{e_1^7 \sin \varphi_1 - e_2^7 \sin \varphi_2}}. \tag{7}$$

Hierin müssen φ_1 und φ_2 oder besser deren *logsin* auf gleiche Intensität und Temperatur ($z.B.$ mit einmal auf 0°) reducirt werden, wozu noch die Korrektion für die Induktion hinzukommt, was den früheren Angaben zufolge geschieht durch;

$(\Delta_H + \Delta_t + \Delta_\varkappa) \log\sin\varphi = 5{,}50\,(n' - n) + 11{,}1\,t + \sin\varphi \,.\, \log^{-1}1{,}8681$ für B_4 ,
$(\Delta_H + \Delta_t + \Delta_\varkappa) \log\sin\varphi = 5{,}50\,(n' - n) + 12{,}5\,t + \sin\varphi \,.\, \log^{-1}1{,}7307$ für R_3 ,

wenn in runder Zahl $H = 0{,}162$ gesetzt wird. Es versteht sich von selbst, dass $\log T$ in entsprechender Weise korrigirt werden muss. Die Abstände e_1 und e_2 sind von Ångström genau ausgemessen[1]), und es ist bei 0° Temperatur:

$$e_1 = 39{,}6132 \text{ cm},$$
$$e_2 = 21{,}3291 \text{ »}.$$

Die Magnete waren früher beide mit Messingringen versehen um horizontal schwingen zu können, und es ist, ebenfalls nach Ångströms Bestimmungen, bei 0° Temperatur:

$$\log K = 7{,}19845_{.9} - 420 + 0.568\,z^2 \text{ für } B_4$$
$$\log K = 7{,}22669_{.1} - 28 + 0.582\,z^2 \text{ für } R_3,$$

1) A. J. Angström: l. c.

das Trägheitsmoment in $mgr.mm^2$ ausgedrückt. Hierin bezeichnet z den Abstand in mm. der Mediansektion des Ringes von der Mitte des Magnets. Die Zuzätze sind in Einheiten der fünften Decimalstelle ausgedrückt. Der Ring des B_4 ist später weggenommen worden; der des R_3 befindet sich nunmehr am Abstande $z = 25,^{mm}3$, so dass man bekommt:

$$\log K = 2,19425.9 \text{ für } B_4$$
$$\log K = 2,22979.1 \text{ für } R_3 ,$$

das Trägheitsmoment in $gr.cm^2$ ausgedrückt. Die Berechnung der Beobachtungen ergiebt mit Magnet B_4 den Werth $H_{130} = 0.16158$ und mit Magnet R_3 $H_{130} = 0.16163$. Die so gefundenen Werthe differiren von den obigen mit alleinigem Benutzen des Abstandes 0,7 erhaltenen so wenig, dass man keinen Anstand nehmen kann sie mit diesen zu einem Mittel zu vereinigen, und als wahrscheinlichste Nullpunktsbestimmung mit diesem Instrumente zu setzen:

$$H_{130} = 0.16157 .$$

SUR

LA TEMPÉRATURE NOCTURNE DE L'AIR

A DIFFÉRENTES HAUTEURS.

PAR

JULIUS JUHLIN.

(Présenté a la Societe Royale des Sciences d'Upsal le 27 Avril 1889.)

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITE.
1890.

I.

HISTORIQUE.

On sait qu'en général la température de l'air s'abaisse lorsqu'on part du sol pour s'élever aux couches supérieures de l'atmosphère. Cependant cela n'a pas toujours lieu. Au contraire il y a souvent accroissement de température de l'air à mesure qu'on s'élève. Cela a été prouvé par plusieurs savants. Ainsi M. J. Hann [1]) a comparé la température à des stations situées à différentes hauteurs dans les Alpes, et il a trouvé que, dans certaines circonstances, la température croît rapidement avec la hauteur. C'est particulièrement le cas lorsque, surtout en hiver, une région de hautes pressions barométriques règne sur les Alpes. D'après M. Hann l'accroissement est le plus grand à sept heures du matin avant le lever du soleil, au moment où la température est la plus basse.

Les savants, qui ont en particulier récherché la variation de la température avec la hauteur dans les couches inférieures de l'atmosphère sont les suivants:

Marc-Auguste Pictet [2]), de Genève, qui en 1778 fit des recherches de ce genre.

Il fit dresser deux mâts, l'un de 50 pieds, l'autre de 75 pieds de hauteur. Au sommet de chacun d'eux il suspendit un thermomètre, qu'il faisait descendre rapidement. D'autres thermomètres étaient suspendus au-dessus de la terre à des hauteurs différentes, depuis 4 lignes jusqu'à 6

1) J. Hann. Zeitschrift d. öst. Ges. f. Meteorologie, Band V, S. 513; Band XV, 1880, S. 76.

2) Essay sur le feu; dans Essais de Physique, Tom I. pag. 171.

pieds. PICTET fit ses observations un peu avant le coucher du soleil, à onze heures du soir et le matin à l'aube. Il constata que, dans toutes les saisons, par un ciel serein et avec un air calme, les températures à 5 pieds et à 75 pieds de terre variaient de la manière suivante. Environ deux heures après le lever du soleil les indications des deux thermomètres étaient les mêmes. Dans la journée, le thermomètre à 5 pieds indiquait une température plus élevée que celui suspendu à 75 pieds de terre. Peu avant le coucher du soleil leurs indications étaient encore les mêmes, après quoi le thermomètre supérieur accusait une température plus grande (d'environ 2°.5 C.) pendant toute la nuit. Lorsque le ciel était uniformément couvert ou qu'il faisait un vent violent la différence des indications des deux thermomètres était presque zéro.

J. SIX [1]), physicien anglais, fit en 1784—1785 des observations analogues.

Deux thermomètres à minima étaient suspendus, l'un dans son jardin à 9 pieds du sol, l'autre au sommet de la tour de la cathédrale de Canterbury élevée de 200 pieds environ.

SIX constata que par un temps pluvieux les deux thermomètres indiquaient les mêmes températures et que dans les nuits couvertes le thermomètre inférieur marquait quelquefois 1° à 2° Fahr. de plus que le supérieur.

Pendant les nuits sereines c'était le contraire, c'est-à-dire que le thermomètre supérieur indiquait jusqu'à 9° à 10° Fahr. de plus que le thermomètre inférieur.

SIX poursuivit ses recherches en 1786 et augmenta le nombre des thermomètres. Il plaça un thermomètre à terre sur une prairie dans une vallée, un autre à 3 pieds et un troisième à 6 pieds du sol. De plus il plaça des thermomètres sur une colline à la même hauteur que la tour de la cathédrale. Il trouva que la température est plus basse à la surface de la terre et s'élève avec la hauteur, phénomène qu'on observe dans toutes les saisons, mais qui n'a lieu à un degré sensible que par un ciel serein et avec un air calme.

WELLS [2]) remarqua qu'en général pendant les nuits sereines et calmes un thermomètre, placé sur l'herbe, indiquait une température plus basse, jusqu'à 9° Fahr., qu'un autre thermomètre suspendu de 1 pouce jusqu'à 9 pieds de terre.

1) Experiments on local heat. (Phil. Transact. tom LXXVIII, pag. 103, 1786).

2) Essay on dew, (traduit dans les Annales de Chimie t. 93.; 1815).

Mais pendant les nuits couvertes, surtout par un vent violent, la température sur l'herbe était la même que dans les couches inférieures de l'atmosphère et quelquefois même plus élevée encore.

MARCET[1]), professeur à Genève, reprit en 1837 les expériences de PICTET et de SIX.

Il planta, au milieu d'une prairie, un mât de 114 pieds de hauteur. De dix en dix pieds il avait ajusté des liteaux en sapin de deux pieds de long, portant chacun à son extrémité une petite poulie, au moyen de laquelle on pouvait monter ou descendre les thermomètres.

Ceux-ci, à degrés très grands, avaient la boule recouverte d'une substance non conductrice, telle que de la cire ou du coton.

MARCET trouva, que l'accroissement de la température avec la hauteur était un phénomène constant, au moins pendant la belle saison et au coucher du soleil, quelque couvert que fût le temps.

Avec un ciel couvert l'accroissement était pourtant très faible, mais il ne devenait nul que par les vents violents, surtout celui du NE.

L'accroissement de la température avec la hauteur commençait à se faire sentir environ une heure avant le coucher du soleil par un temps clair et serein; mais seulement au moment du coucher, par un ciel couvert.

Cet accroissement atteignait son maximum au moment du coucher, ou peu de temps après; à partir de ce moment il restait stationnaire toute la nuit, lorsque le temps ne variait pas.

D'après MARCET, la limite d'accroissement, par les nuits sereines, se trouve souvent au-dessus de la hauteur de 108 pieds, mais en général elle se trouve entre 90 et 105 pieds. Les plus grandes différences s'observent pendant l'hiver, surtout quand la terre est couverte de neige. La limite d'accroissement en hiver est au-dessous de 100 pieds par les nuits sereines et calmes.

Lorsque le ciel était couvert, les différences entre les températures des couches successives de l'atmosphère, aussi en hiver, étaient très faible, et au delà de 50 pieds la température paraissait décroître avec la hauteur.

De plus, MARCET observa que la différence entre la température de la surface du sol et celle de la couche d'air immédiatement voisine était plus grande pendant l'hiver que pendant les autres saisons.

---

1) Recherches sur les variations qui ont lieu à certaines périodes de la journée dans la température des couches inférieures de l'atmosphère. (Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Génève. T. VIII, 1838).

Dans l'hiver de 1838 à 1839, LOTTIN ET BRAVAIS[1]), membres de la Commission scientifique envoyée en Laponie par le roi LOUIS-PHILIPPE, entreprirent des recherches sur la distribution de la température dans les couches inférieures de l'atmosphère, à Bossekop, par 69°58′ de latitude Nord et 21°10′ de longitude Est.

Ils employèrent des cerfs-volants et des ballons captifs. Ceux-ci portaient des thermomètrographes à déversement de Walferdin. Les plus grandes précautions furent prises par les observateurs afin qu'aucune objection ne pût être faite à leurs expériences. Les instruments furent examinés soigneusement et pour mesurer la hauteur à laquelle ils montaient, deux théodolites étaient employés.

Pendant cinq mois, du 25 octobre 1838 au 22 mars 1839, que leurs observations durèrent, trente-six expériences ont été faites. Dix-sept d'entre elles tombent dans la nuit polaire et pendant les autres, le soleil n'était élevé que de quelques degrés au-dessus de l'horizon. Les ballons étaient lancés à des hauteurs variant entre 40 et 450 mètres.

Trente et une fois ils trouvèrent la température plus chaude dans les couches élevées de l'atmosphère, et par conséquent croissant avec la hauteur. Cinq fois seulement la température était plus froide en haut, et par conséquent décroissante. Les plus grandes différences de ces trente et une observations étaient + 6°.54[2]), + 6°.03 + 6°.0 et des cinq observations avec la température décroissante — 1°.10 et — 1°.17.

BRAVAIS dit qu'il y a, à une certaine hauteur une couche d'air de température maximum. Cette couche est pourtant soumise à des fluctuations incessantes. Il la place à une hauteur moyenne de 65 mètres.

Parmi les circonstances qui favorisent l'accroissement de température avec la hauteur, BRAVAIS range la transparence de l'air. Néanmoins, il remarque que la plus grande différence de température avait lieu »par un ciel vaporeux ou sali par de légers cirrus». L'accroissement de température est encore beaucoup favorisé par une basse température et par la direction et la force du vent. BRAVAIS analyse avec soin et en détail la grande influence qu'avaient les vents, à Bossekop, sur ce phénomène.

1) GAIMARD; Voyages en Scandinavie, en Laponie etc. sur la corvette *la Recherche;* Météorologie, T. III; pag. 94.

2) Dans ce mémoire, la température est indiquée en degrés centigrades, à moins d'indication contraire.

PLANTAMOUR[1]), à Genève, compara, en 1847, les indications de deux thermomètres, dont l'un était à 4 pieds et l'autre à 50 pieds au-dessus du sol. Les observations, continuées de Juillet à Novembre, étaient faites à 9^h du matin, à midi, à 3^h, à 6^h, à 8^h et à 9^h du soir.

PLANTAMOUR trouva qu'en été, par un temps clair, la température était plus élevée, le soir, à une hauteur de 50 pieds que dans le voisinage du sol. La différence était plus grande par un ciel serein que par un ciel couvert.

CHARLES MARTINS[2]), à Montpellier, en 1858, a recherché la variation de la température avec la hauteur pendant les nuits. Autour d'un mât, de 6 mètres de hauteur, des thermomètres à minima étaient échelonnés en hélice aux hauteurs suivantes: $0^m.05$, $2^m.0$, $4^m.0$, $6^m.0$. Au sommet d'un arbre, distant du mât de 60^m, fut fixé un autre thermomètre à 13^m au-dessus du sol, et sur une vielle tour, à 211^m du mât, un autre fut suspendu à $26^m.3$ au-dessus du sol au pied du mât. Un dernier enfin était placé à $49^m.4$ au-dessus du pied du mât sur une plate-forme de la tour de la cathédrale, éloignée du mât de 320^m.

MARTINS poursuivit ses observations de Décembre 1858 à Février 1860.

De toutes ses observations il n'en garde que 109, parce que pendant les autres il avait plu ou que le vent avait été assez fort pour déplacer les index.

MARTINS remarqua que, pendant la nuit, l'accroissement de la température, du sol à une hauteur de 50^m, est un phénomène constant. Il trouva que l'accroissement moyen de l'année, ou, en d'autres termes, la différence moyenne entre le minimum à $0^m.05$ du sol et à $49^m.4$ était $3^0.80$. L'accroissement serait donc, en le supposant uniforme, de 1^0 pour 13^m. Il ne paraît pas varier beaucoup, d'après ce savant, d'une saison à l'autre. La température croissait plus rapidement près du sol que plus haut, notamment pendant l'hiver. Au printemps, MARTINS trouva la limite de l'accroissement entre 26^m et 49^m au-dessus du sol.

MARTINS dit[3]): »C'est dans l'été que l'accroissement avec la hauteur pendant la nuit paraît être à la fois le plus fort et le plus régulier»,

---

1) Résumé des observations météorologiques de 1847 de la Bibliothèque universelle. (Archives des sciences naturelles T. VIII pag. 32; 1848).

2) Sur l'accroissement nocturne de la température avec la hauteur dans les couches inférieures de l'atmosphère. (Extrait des Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier; T. V; pag. 47).

3) l. c. pag. 14.

et[1]) »la chaleur ou le froid relatifs sont sans influence notable sur le phénomène, qui est subordonné principalement à l'état du ciel et au calme de l'air».

MARTINS trouva encore que l'accroissement de la température avec la hauteur était cinq fois plus grand par les nuits sereines que par les nuits couvertes, et que, dans les nuits couvertes, la température croissait à peine avec la hauteur à partir de 6^m environ, ce qui n'a pas lieu dans les nuits sereines.

MARTIN observa de plus que la température était sensiblement la même sur la plate-forme de la tour et sur une colline, située à la même altitude.

Il compara encore la température de la surface du sol à celle de l'air et trouva que le thermomètre à la surface du sol indiquait une température plus élevée pendant la nuit. Le contraire avait pourtant lieu en hiver. Ses observations montrent qu'en hiver, le sol n'étant pas couvert de neige, les températures de la surface du sol et de la couche d'air qui le recouvre immédiatement diffèrent peu.

MARTINS regarde le rayonnement et la sérénité de l'air comme les causes principales de l'accroissement de la température avec la hauteur pendant la nuit, quoiqu'il ne nie pas que le vent n'ait aussi une certaine influence.

PRESTEL[2]) a fait, pendant plusieurs années, de 1858 à 1867, des recherches sur la variation de la température dans les couches inférieures de l'atmosphère.

Il a suspendu trois thermomètres au mur septentrional de la maison d'un quartier très peuplé de la ville d'Emden.

Le thermomètre le plus bas était placé, à 10 pieds du mur de la maison et à 1 pouce du sol; l'autre à 1 pied d'une fenêtre et à 17 pieds et 3 pouces du sol, et le troisième à 28 pieds et 4 pouces au-dessus du sol. Les observations étaient faites généralement à 8^h du matin, à midi et à 6^h du soir, mais au milieu de l'été et en hiver au moment du coucher du soleil.

PRESTEL a trouvé que la température croît jusqu'à une certaine hauteur, variant avec les saisons, et les nombres, indiquant cet accroissement pendant les divers mois forment une série croissante du commencement de l'année à l'été et décroissante de l'été au nouvel an.

1) l. c. pag. 15.

2) PRESTEL; Der Boden, das Klima und die Witterung von Ostfriesland; Emden 1872.

De plus il y a une variation diurne: l'accroissement de la température augmente du matin à midi et diminue tout l'après-midi; en outre, la limite supérieure où l'accroissement se produit, s'élève le matin et s'abaisse le soir. Mais pendant les nuits ainsi que pendant les journées parfaitement sereines, lorsqu'il y a de la gelée blanche, la température croît à mesure qu'on s'élève du sol.

PRESTEL dit que la direction du vent a une grande influence sur l'accroissement de la température avec la hauteur.

Au Bureau central météorologique de Vienne des observations analogues ont été faites de 1861 à 1863.

Les thermomètres étaient suspendus au nord-ouest de la maison, à la distance de 6 pouces du mur, et aux hauteurs suivantes du sol: 12, 24, 42, 53, 63.5 pieds. Les observations étaient faites à 6^h du matin, à midi et à 10^h du soir. Les résultats des observations ont été publiés par KARL FRITSCH[1]).

J. GLAISHER[2]), à Greenwich, a aussi fait des recherches sur ce phénomène du 26 Juin au 6 Août 1868.

Il avait fixé trois thermomètres à 4, 22 et 50 pieds au-dessus du sol. Les observations étaient faites d'heure en heure de 7^h du matin à minuit.

H. WILD[3]), estimant les recherches précédentes plus ou moins défectueuses, fit exécuter des observations analogues à Pulkowa, de Septembre 1872 à Octobre 1874.

Il fit suspendre trois psychromètres enfermés dans les cages qu'on emploie habituellement dans les observatoires météorologiques. Les thermomètres étaient à 1.9, 15.9, et 26.9 mètres au-dessus du sol. Les observations étaient faites, pendant les mois de l'été, à 8^h du matin, 1^h et 8^h du soir, mais pendant l'hiver seulement à 1^h de l'après-midi. Les observations de M. WILD montrent qu'en moyenne, pendant la saison chaude, le matin après le lever du soleil et dans toute la matinée, la température décroît avec la hauteur, mais que le soir elle croît continuellement au moins jusqu'à $26^m.3$ au-dessus du sol.

---

1) KARL FRITSCH; Ueber die mit der Höhe zunehmende Temperature der untersten Luftschichten (Sitzungsber. der Wiener Academie; Band III, pag. 135; 1855).

2) J. GLAISHER; On the Temperature etc. (Proceedings of the Meteorological Society; Vol. V; London 1870).

3) H. WILD; Ueber den Einfluss der Höhe der Thermometer über dem Boden auf die Bestimmung der Temperatur und Feuchtigket der Luft. (Repertorium für Meteorologie herausgeg. von d. Kaiserl. Akad. der Wissenschaften; T. V, N:o 2.

A l'Observatoire de Montsouris[1]) on a fait des observations au moyen de deux thermomètres enrégistreurs, l'un à 2^m, l'autre, un thermomètre électrique, à 20^m du sol.

Les différences de températures à ces hauteurs sont publiées dans l'Annuaire de 1876 et 1877.

M. H. E. Hamberg[2]) a fait à Upsal de belles recherches sur la température et l'humidité de l'air à différentes hauteurs.

Il fit dresser deux poteaux, l'un sur la colline où sont installés les instruments météorologiques de l'observatoire, l'autre au pied de la colline. Chacun des poteaux portait des psychromètres à 0, 1, 4, 10, 16 et 22 pieds au-dessus du sol. Ne pouvant employer des cages thermométriques ordinaires, il fit faire pour chacun des cinq psychromètres supérieurs un abri, consistant en quatre planches; et le psychromètre inférieur, il l'entoura d'un cornet ou gaîne cônique de papier.

M. Hamberg se fit aider de 20 étudiants de l'Université, et les observations ont été faites toutes les demi-heures.

William Marriott[3]) a fait des recherches analogues pendant les années 1882—1886.

Des thermomètres à maxima et à minima furent suspendus à 4 pieds et à 170 pieds au-dessus du sol.

Les moyennes mensuelles montrent que la température maximum moyenne est toujours plus grande à 4 pieds qu'à 170 pieds du sol et que les différences varient entre $3^0.1$ et $0^0.3$ Fahr. La température minimum moyenne au contraire est plus basse à 4 pieds qu'à 170 pieds, sauf pendant l'hiver, où le thermomètre supérieur indique une température un peu plus basse.

Marriott fit encore suspendre un thermomètre électrique sur un tour à 260 pieds au-dessus du sol et ce thermomètre et celui à 4 pieds étaient observés toutes les deux heures, de neuf heures du matin à neuf heures du soir. Les moyennes mensuelles de ces observations montrent que, pendant le jour, la température moyenne à 4 pieds est toujours plus élevée qu'à 260 pieds et la différence s'élevait, dans les mois

1) Annuaire de l'Observatoire de Montsouris pour l'an 1877; Météorologie.

2) H. E. Hamberg; La température et l'humidité de l'air à différentes hauteurs, observées à Upsal pendant l'été de 1875. (Nova Acta Reg. Soc. Sc. Ups. Ser. III. Vol. X. 1).

3) Results of thermometrical observations made at 4 feet, 170 feet and 260 feet above the ground at Boston, Lincolnshire, 1882—1886. (Quaterly Journal of the Roy. Met. Soc. Vol. XIII, 1887).

de l'été, à 4°.0 Fahr. pendant la partie la plus chaude du jour. Le soir les différences étaient pourtant plus petites. En général, la température pendant le jour se trouvait plus élevée à 4 pieds qu'à 170 pieds et 260 pieds au-dessus du sol. Dans quelques cas isolés on a fait des observations à chacune des 24 heures de la journée sur les deux thermomètres à 4 pieds et à 260 pieds du sol. Il en résulte qu'en général la température à 4 pieds est plus élevée qu'à 260 pieds. Le contraire se produisit pourtant pendant deux nuits sereines.

M. Hamberg n'ayant étudié les variations de la température avec la hauteur que pendant la belle saison, j'ai cru intéressant d'étudier ce phénomène pendant les nuits d'hiver où la surface du sol est couverte de neige. Quoiqu'on ait fait plusieurs recherches sur ce phénomène, on n'a pas fait, à ce que je sache, des observations continues à chaque heure pendant les nuits d'hiver, la terre étant couverte de neige. C'est ce qui me fait espérer que mes observations seront de quelque intérêt, d'autant plus qu'elles sont destinées à être une continuation de celles de M. Hamberg. Il aurait été bon de faire des observations continues pendant un plus grande espace de temps, mais comme cela pour plusieurs raisons a été impossible, j'ose pourtant présenter les résultats que j'ai pu tirer de mes observations.

Je saisis ici l'occasion de présenter mes remerciements respectueux à M. le professeur H. H. Hildebrandsson de la bienveillance qu'il m'a prouvée dans mes recherches.

Je dois aussi exprimer ma profonde gratitude aux Messieurs, qui, en me sacrifiant leur temps et leur repos, ont bien voulu m'aider à ces observations fatigantes: D:r N. Ekholm, les candidats en philosophie August Falk et K. A. Vallner.

II.

EXPOSITION DES THERMOMÈTRES.

Sur un terrain uni, à la distance de 19^{m} de l'Observatoire météorologique, un mât, de 7^{m}.5 de hauteur, fut dressé. Des anneaux de fer d'un diamètre un peu plus grand que celui du mât pouvaient avec des vis être fixés en quelque lieu du mât que ce soit. De ces anneaux partaient des bras de fer massif et à ces bras étaient fixées des planches de 1^{m}.4 de longueur sur 0^{m}.18 de largeur. A la partie inférieure de ces planches horizontales j'accrochais les thermomètres à 0^{m}.22 de distance de chaque bout. De la planche descendait un gros fil vertical d'acier un peu plus bas recourbé en angle droit et se terminant par un boucle qui enveloppait le thermomètre au-dessus de la boule. Grâce à cette disposition les thermomètres ne branlaient pas et on pouvait, à volonté, les faire monter ou descendre, ce qui était quelquefois nécessaire quand il était tombé de la neige, afin d'avoir les thermomètres à la même hauteur au-dessus du sol qu'auparavant.

Il fut pourtant impossible de maintenir les deux paires supérieures de thermomètres à la même hauteur pendant toutes les observations parce que, pendant l'hiver de 1888, il est tombé tant de neige que le mât en devint trop court. Les thermomètres furent échelonnés en hélice autour du mât, de façon à pouvoir rayonner dans tous les sens. J'ai examiné soigneusement chaque thermomètre en le comparant à dix points environ, entre + 15° et — 22°, avec un thermomètre Åderman. Pour chaque thermomètre j'ai tracé des courbes et fait des tables de corrections.

Pour ses observations, M. Hamberg avait mis les thermomètres à l'abri du soleil soit en les plaçant au-dessous d'une planche garnie d'écrans verticaux au S., à l'E. et au W. soit en entourant leur boule d'un cornet de papier. Pendant mes observations deux thermomètres étaient fixés à la même hauteur à chaque bout de la planche. L'un d'eux était nu et l'autre était entouré d'un cornet de papier d'environ 0^{m}.12 de diamètre à la base. Pour d'autres observations l'un des thermomètres était abrité de l'autre manière par des écrans verticaux. Il s'est trouvé cependant que, pendant les nuits d'hiver, le dernier système d'abri ne donnait pas des résultats sensiblement différents de ceux du premier. Les thermomètres nus et ceux abrités indiquaient alors la même température.

Les chiffres suivants, qui sont des moyennes de quarante observations, montrent que la différence entre les indications des thermomètres avec ou sans abri est très petite.

$T_n - T_a$					
$0^m.03$	$0^m.5$	$1^m.5$	$3^m.5$	$5^m.4$	$7^m.4$
+ 0.07	+ 0.03	− 0.03	+ 0.13	+ 0.02	+ 0.05

T_n désigne la température du thermomètre nu et T_a celle du thermomètre abrité.

Il est vrai que les thermomètres abrités par des cornets de papier n'ont pas donné exactement les mêmes résultats que les thermomètres nus à la même hauteur, mais ces différences vont tantôt dans un sens tantôt dans l'autre. J'ai trouvé comme moyenne d'un grand nombre d'observations que les thermomètres munis de cornets indiquaient $0^0.3$ de moins que les thermomètres nus à la même hauteur. Il semble ainsi que ces cornets aient un peu concentré les rayons de froid de la neige, mais il est plus probable que la différence dépend de ce que les cornets empêchaient la circulation de l'air, quoiqu'ils eussent des trous par le haut. Aussi me suis-je borné à ne discuter dans la suite que les observations faites avec les thermomètres nus.

M. WILD[1]) dit que si l'on veut déterminer la température de l'air à différentes hauteurs on ne doit pas placer le thermomètre plus bas qu'à 4 pieds du sol, sans quoi le rayonnement exerce une si grande influence sur le thermomètre qu'il n'indique pas même approximativement la température vraie de l'air.

Aussi pour déterminer la différence d'indications d'un thermomètre fixe avec celles d'un thermomètre-fronde[2]), qui doit nous donner la température vraie de l'air, j'ai fait des observations avec ce dernier instrument à des hauteurs différentes. Ces observations sont consignées dans la Table I. Il en résulte que, pendant les nuits d'hiver, les indications du thermomètre-fronde, de $0^m.5$ à $7^m.4$ au-dessus du sol, ont été assez constamment de $0^0.6$ plus hautes que celles du thermomètre nu sur le mât à la même hauteur. Au contraire une plus grande différence se montrait entre le thermomètre-fronde et le thermomètre fixe et nu à $0^m.03$ au-dessus du sol. Cette différence pouvait, pendant les nuits sereines, s'élever à $3^0.0$, et j'ai trouvé qu'elle était en moyenne de $1^0.6$.

1) H. WILD, Repertorium für Meteorologie, Band V, N:o 2, pag. 3.

2) Il était frondé horizontalement, à l'aide d'un appareil de rotation.

Tab. I.

	$0^m.03$		$0^m.5$		$1^m.5$		$3^m.5$		$5^m.4$		$7^m.4$	
	T_m	$T_f - T_m$	T_m	$T_f - T_m$	T_m	$T_f - T_m$	T_m	$T_f - T_m$	T_m	$T_f - T_m$	T_m	$T_f - T_m$
	− 4.7	+ 0.7	− 4.3	+ 0.4	− 4.5	+ 0.9	− 4.1	+ 0.4	− 3.9	+ 0.3	− 3.7	+ 0.2
	− 8.2	+ 1.3	− 7.7	+ 1.0	− 7.2	+ 0.8	− 6.9	+ 0.6	− 6.9	+ 0.7	− 6.7	+ 0.8
	− 13.6	+ 1.1	− 12.7	+ 0.4	− 12.6	+ 0.4	− 12.3	+ 0.4	− 12.2	+ 0.2		
	− 13.8	+ 0.8	− 13.0	+ 0.5	− 13.0	+ 0.3	− 12.8	+ 0.7	− 12.7	+ 0.5		
	− 13.8	+ 0.8	− 13.3	+ 0.7	− 13.3	+ 0.3	− 13.0	+ 0.3	− 13.1	+ 0.4		
	− 13.6	+ 0.9	− 13.0	+ 0.4	− 12.8	+ 0.3	− 12.4	+ 0.3	− 12.4	+ 0.3		
	− 12.3	+ 2.4	− 9.5	+ 0.8	− 9.0	+ 0.4	− 8.3	+ 0.9	− 8.4	+ 1.2	− 8.3	+ 1.0
	− 14.6	+ 2.3	− 12.5	+ 0.9	− 11.9	+ 0.5	− 11.3	+ 1.4	− 10.3	+ 0.8	− 9.5	+ 0.4
	− 16.2	+ 2.7	− 13.5	+ 0.8	− 13.0	+ 0.6	− 12.3	+ 0.5	− 11.5	+ 0.8	− 11.5	+ 1.0
	− 16.5	+ 2.8	− 13.9	+ 0.8	− 13.4	+ 0.5	− 12.4	+ 0.8	− 12.1	+ 0.8	− 11.4	+ 0.5
	− 5.2	+ 1.0	− 4.6	+ 0.4	− 4.6	+ 0.4	− 4.4	+ 0.2	− 4.3	+ 0.1	− 4.5	+ 0.4
	− 7.7	+ 2.8	− 4.4	+ 0.8	− 3.3	+ 0.2	− 2.3	+ 0.6	− 1.8	+ 1.0	− 1.5	+ 0.8
	− 5.3	+ 1.5	− 4.3	+ 0.8	− 4.1	+ 0.7	− 3.7	+ 1.0	− 3.1	+ 0.9	− 3.0	+ 0.5
	− 5.5	+ 1.3	− 4.3	+ 0.8	− 4.1	+ 0.6	− 3.7	+ 0.6	− 3.7	+ 0.3	− 3.8	+ 0.9
	− 6.3	+ 1.6	− 4.1	+ 0.4	− 4.5	+ 0.5	− 3.9	+ 0.4	− 3.5	+ 0.4	− 3.6	+ 0.7
Moy.		+ 1.6		+ 0.7		+ 0.5		+ 0.6		+ 0.6		+ 0.6

T_m, T_f désignent la température au mât et celle du thermomètre-fronde.

Il semble donc, que le rayonnement des thermomètres nus soit presque constant aux différentes hauteurs, du moins à partir de $0^m.5$ du sol. Je puis donc comparer entre elles les températures observées à $0^m.5$ du sol et au-dessus.

Il aurait été désirable de faire des observations à des hauteurs encore plus élevées pour essayer de trouver la limite de l'accroissement de température pendant les nuits d'hiver. Mais comme il était déjà difficile de faire des observations à $7^m.4$ au-dessus du sol pendant les nuits d'hiver, j'y ai renoncé.

J'ai pourtant, dans la nuit du 18 au 19 Mars 1887, pendant que se poursuivaient les observations au mât, fait des observations sur trois thermomètres, suspendus à deux hauteurs différentes sur la tour de la cathédrale. D'ailleurs, j'ai fait, pendant les nuits du 23 au 24 Février et du 25 au 26 Février 1888 quelques observations pour étudier l'influence du terrain sur le phénomène en question. J'ai fixé deux thermomètres sur deux petites perches que je plantais à différents endroits dans la neige; de façon à ce que l'un des thermomètres fût à $0^m.02$ et l'autre à $0^m.5$ au-dessus de la neige.

III.

OBSERVATIONS.

1. *Température pendant les nuits sereines.*

Ayant eu l'occasion de faire des observations non seulement pendant l'hiver de 1887 où le sol était couvert d'une mince couche de neige, mais aussi pendant l'hiver de 1888, qui se faisait remarquer par un grand froid et par beaucoup de neige, et ayant trouvé une grande différence dans l'accroissement de la température de l'air avec la hauteur dans ces deux cas, je vais d'abord présenter les séries les plus caractéristiques de ces deux années dans des nuits sereines (Tab. II, III, IV).

Tab. II.

1887 Mars	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{5.4}$	$T_{7.4}$	T_b	Diff. $T_{7.4}-T_{0.5}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heures	Remarques
Le 10. 5h.0 soir	− 3.3	− 3.1	− 3.0	− 3.0	− 2.9	− 2.9	− 2.3	+ 0.2	0	1.6	Soleil encore à l'horizon.
6.0	− 6.4	− 5.8	− 5.3	− 5.1	− 5.0	− 4.9	− 4.0	+ 0.9	0	2.6	Soleil couché.
7.0	− 7.6	− 7.0	− 6.5	− 6.2	− 5.8	− 5.7	− 5.3	+ 1.3	0	2.6	
8.0	− 7.1	− 6.5	− 6.0	− 6.0	− 6.0	− 6.0	− 5.6	+ 0.5	0	3.3	
9.0	− 7.9	− 7.4	− 7.1	− 7.0	− 6.8	− 6.8	− 6.4	+ 0 6	0	3.4	
10.0	− 9.1	− 8.5	− 8.3	− 8.2	− 8.0	− 7.9	− 7.7	+ 0.6	0	3.0	
11.0	− 10.5	− 9.7	− 9.3	− 9.1	− 8.8	− 8.8	− 7.9	+ 0.9	0	1.8	
Minuit	− 7.7	− 7.4	− 7.3	− 7.4	− 7.7	− 7.7	− 7.9	− 0.3	0	1.0	
Le 11. 1.0 mat.	− 9.9	− 9.2	− 8.5	− 8.0	− 7.7	− 7.4	− 6.9	+ 1.8	0	2.0	
2.0	− 7.8	− 7.6	− 7.4	− 7.5	− 7.6	− 7.3	− 7.3	+ 0.3	0	1.6	
3.0	− 9.5	− 8.9	− 8.5	− 8.5	− 8.5	− 8.1	− 8.5	+ 0.8	0	1.4	
4.0	− 7.7	− 7.4	− 7.4	− 7.4	− 7.6	− 7.6	− 8.2	− 0.2	0	1.5	
5.0	− 8.2	− 7.9	− 8.0	− 8.0	− 7.9	− 7.8	− 8.6	+ 0.1	0	2.1	
6.0	− 8.4	− 8.2	− 8.1	− 8.0	− 8.0	− 8.0	− 8.6	+ 0.2	0	2.0	
7.0	− 8.3	− 8.1	− 7.9	− 7.9	− 7.9	− 8.0	− 8.1	+ 0.1	0	2.2	Le soleil se lève.
8.0	− 5.6	− 5.2	− 5.4	− 5.7	− 5.6	− 5.7	− 6.4	− 0.5	0	3.6	
9.0	− 3.1	− 4.0	− 4.3	− 4.5	− 4.3	− 4.6	− 5.1	− 0.6	0	5.8	

Tab. III.

1887 Mars	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{5.4}$	$T_{7.4}$	T_b	Diff. $T_{7.4} - T_{0.5}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heure.	Remarques
Le 14. 5.^{h}0 soir	− 4.3	− 3.8	− 3.2	− 3.1	− 2.7	− 2.9	− 1.2	+ 0.9	0	2.3	Le soleil encore à l'horizon.
6.0	− 7.2	− 6.7	− 6.2	− 5.7	− 5.0	− 4.6	− 4.4	+ 2.1	0	1.7	Le soleil se couche.
7.0	− 7.4	− 6.8	− 6.5	− 6.3	− 6.1	− 5.6	− 6.1	+ 1.2	0	2 2	Le soleil couché.
8.0	− 7.7	− 7.0	− 6.7	− 6.3	− 6.2	− 5.9	− 6.6	+ 1.1	0	2.6	
9.0	− 7.6	− 7.2	− 6.9	− 6.8	− 6.7	− 6.5	− 6.9	+ 0.7	0	3.0	
10.0	− 8.1	− 7.7	− 7.4	− 7.0	− 6.9	− 6.7	− 6.6	+ 1.0	0	3.7	
11 0	− 8.7	− 8.3	− 7.9	− 7.8	− 7.6	− 7.4	− 7 3	+ 0.9	0	2.6	
Minuit	− 12.7	− 12 2	− 10.8	− 10.2	− 9.7	− 9.1	− 7.5	+ 3.1	0	0.7	
Le 15. 1.^{h}0 mat.	− 11.9	− 11.4	− 10.7	− 10.3	− 10.0	− 10.0	− 9.4	+ 1 4	0	0.0	
2.0	− 14.5	− 13 8	− 13 1	− 12.7	− 12.0	− 11 4	− 10.5	+ 2 4	1	1.1	
3.0	− 11.9	− 11.0	− 10.4	− 9.9	− 9.7	− 9.3	− 9.1	+ 1.7	1	2.9	
4.0	− 11.1	− 10.2	− 9.6	− 9.4	− 9 4	− 9.6	− 8.8	+ 0.6	0	2.3	
5.0	− 14.1	− 12.9	− 12.2	− 11.8	− 11.2	− 10.8	− 9.9	+ 2.1	0	0.0	
6.0	− 13.0	− 12.3	− 11.7	− 11.2	− 10.8	− 10.7	− 10.8	+ 1.6	2	1.2	[1]) ⌴ faible. Le soleil se lève.
7.0	− 13.9	− 13.5	− 12.2	− 11.0	− 10.6	− 10.3	− 9.9	+ 3.2	1	1.1	
8.0	− 12.3	− 11.5	− 11.2	− 11.6	− 11.0	− 11.4	− 6.9	+ 0.1	1	0 0	
9 0	− 7.1	− 6.8	− 6.7	− 6.8	− 6.7	− 7.2	− 2.2	− 0.4	3	2.3	

$T_{0.03}$, $T_{0.5}$ .... désignent la température à $0^m.03$, $0^m.5$ .... au-dessus du sol et T_b la température dans la cage thermométrique de l'Observatoire.

Pendant l'hiver et par un temps serein la température commence, déjà deux ou trois heures avant le coucher du soleil, à être plus basse près du sol qu'au-dessus. Vers le coucher du soleil la température tombe avec plus de rapidité près du sol qu'au-dessus, puis l'abaissement de température continue à se produire plus lentement et assez également à toutes les hauteurs pendant toute la nuit jusqu'au lever du soleil. La température continue ordinairement à être plus basse près du sol qu'au-dessus une à deux heures après de lever du soleil. Le phénomène se présente donc, pendant l'hiver, presque de la même façon que pendant la belle saison d'après les recherches de M. Hamberg. J'ai pourtant trouvé que l'accroissement de la température avec la hauteur pendant les nuits sereines est plus grande en hiver qu'en été.

1) Le signe ⌴ désigne gelée blanche.

Tab. IV.

1888 Février	$T_{0.01}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{4.8}$	$T_{6.8}$	T_b	Diff. $T_{6.8} - T_{0.5}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent mètres par sec.) par heure	Remarques
Le 22. 7.^{h}0 soir	− 18.0	− 16.3	− 16.0	− 13.7	− 12.5	− 11.8	− 13.7	+ 4.5	0	3.7	Le soleil couché.
8.0	− 10.8	− 9.9	− 9.4	− 9.4	− 9.5	− 9.7	− 9.3	+ 0.2	0	3.5	
9.0	− 19.3	− 16.9	− 16.7	− 15.9	− 15.0	− 14.6	− 14.1	+ 2.3	0	1.3	[1]) ⌣ faible.
9.30	− 22.4	− 18 9	− 18.0	− 15 7	− 14.9	− 14.4		+ 4.5	1	1.5	id.
10.0	− 13.1	− 12.3	− 12.2	− 11.9	− 11.7	− 11.5	− 12.4	+ 0.8	0	2.0	id.
11 0	− 20.8	− 19.1	− 18.8	− 16.8	− 17.1	− 16.5	− 15.8	+ 2.6	0	1.5	id
Minuit	− 24.2	− 21 2	− 20 3	− 20.2	− 19.4	− 17.6	− 17.5	+ 3.6	0	1.4	id
Le 23. 1.^{h}0 mat	− 24.2	− 20.4	− 19.4	− 19.1	− 19.1	− 18.1	− 17.6	+ 2.3	0	0.3	id.
2.0	− 25.1	− 20.4	− 19.4	− 19.0	− 19.0	− 18.6	− 16.7	+ 1.8	0	2.4	id.
3.0	− 24.9	− 22.0	− 20.6	− 20.2	− 19.9	− 19.6	− 18.5	+ 2.4	0	1.5	id.
4.0	− 25.7	− 23.2	− 21.6	− 21.2	− 20.9	− 19.5	− 19.0	+ 3.7	0	0.8	id.
5.0	− 25.2	− 22.4	− 19.8	− 19.6	− 19.5	− 19.4	− 18.7	+ 3.0	0	0.0	id
6.0	− 25.0	− 22.3	− 20.8	− 20.8	− 20.1	− 19.6	− 19.2	+ 2.7	0	1.0	id.
7.0	− 24.2	− 21.1	− 20.4	− 20.5	− 20.4	− 20.0	− 19.1	+ 1.1	0	1.4	id
8.0	− 25.2	− 22.0	− 20.7	− 20 4	− 20.2	− 19 5	− 19.0	+ 2.5	0	0 8	id. Le soleil se lève.
9.0	− 17.0	− 14.6	− 14.0	− 14.2	− 14.6	− 13.2	− 17.4	+ 1.4	0	1.0	⌣
10.0	− 12.9	− 12.2	− 11.5	− 11.3	− 11.5	− 11.1	− 15.8	+ 1.1	0	1.9	id.
Le 23. 5.0 soir	− 18.4	− 14.5	− 13.8	− 12.9	− 12.4	− 11.8	− 12.6	+ 2.7	0	0.0	
5.30	− 20.9	− 17.6	− 15 7	− 13 9	− 13.1	− 12.6		+ 5.0	0	0.0	
6.0	− 21.0	− 18.4	− 18 3	− 15.5	− 15.1	− 14.7	− 14.0	+ 3.7	0	0.0	
6.30	− 21.7	− 19.5	− 18.9	− 18.0	− 17.6	− 16.0		+ 3.5	0	0.0	⌣ faible
7.0	− 22.1	− 20 2	− 18.1	− 16.7	− 16 2	− 16.0	− 13.5	+ 4.2	0	0.0	id.
8.0	− 24.5	− 22.2	− 20.6	− 18.4	− 18.0	− 17.4	− 15.0	+ 4.8	0	0.0	id.

MARTINS dit[1]): »Le phénomène est donc complètement indépendant du froid et de la chaleur, c'est-à-dire de la portion de l'échelle thermométrique dans laquelle oscille la colonne mercurielle».

J'ai voulu rechercher si cette allégation se vérifie à Upsal, et j'ai écrit dans un tableau le résultat de mes recherches. J'y ai inscrit les différences de température, pendant les nuits sereines d'hiver, entre le thermomètre à $0^m.5$ du sol et le thermomètre à $7^m.4$ pour chaque degré. Dans la colonne de — 1° se trouvent les différences obtenues lorsque le thermomètre à $0^m.5$ était entre — 0°.5 et — 1°.5; dans celle de — 2°, celles où le thermomètre à $0^m.5$ se trouvait entre — 1°.5 et — 2°.5, et ainsi de suite. Puis j'ai pris la moyenne de toutes les différences de la table de — 1° à — 5°, de — 6° à 10° etc.

1) l. c. pag. 11.

En calculant les températures moyennes qui correspondent à ces différences moyennes, j'ai obtenu le résultat suivant:

Température	Différence moyenne
— 3°.8	+ 0.6
— 7.8	+ 1.1
— 11.8	+ 1.6
— 17.8	+ 2.4
— 21.8	+ 2.9

Si l'on en construit une courbe en prenant les températures pour abscisses et les différences moyennes de température pour ordonnées, on aura une ligne droite. Il en résulte ainsi que, dans les limites d'observation, l'accroissement de température est une fonction linéaire de la température, de sorte que plus la température est basse plus l'accroissement de température avec la hauteur est grand.

En regardant les Tab. II, III, IV on le voit vérifié dans les exemples isolés. Sans doute le vent a une grande influence sur ce phénomène. Plus le vent est faible, plus les différences de température à des hauteurs différentes sont grandes.

2. *Pendant les nuits couvertes et brumeuses, les températures à des hauteurs différentes sont presque égales.*

Les différences de température qui se montrent sont pourtant toujours telles que la température près du sol est plus basse qu'au-dessus (Tab. V).

Tab. V.

1887 Janvier	$T_{0.03}$	$T_{0.6}$	$T_{3.0}$	$T_{4.8}$	$T_{7.1}$	T_b	Diff. $T_{7.1} - T_{0.6}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heure	Remarques
Le 16. 5.^{h}0 p. m	− 4.8	− 4.4	− 4.0	− 4.1	− 3.8	− 4 0	+ 0.6	7	1.9	≡ [1]) faible.
6.0	− 4.7	− 4.3	− 4.1	− 4.3	− 4.0	− 4.1	+ 0.3	3	1.2	id.
7.0	− 4.6	− 4.9	− 4.6	− 4.5	− 4.3	− 4.5	+ 0.6	3	1.6	id.
8.0	− 4.7	− 4.7	− 4.7	− 4.7	− 4 4	− 4.7	+ 0.3	8	2.4	≡ un peu plus fort.
9.0	− 4 5	− 4 7	− 4 7	− 4.6	− 4.3	− 4.6	+ 0.4	10	2.0	id.
10.0	− 4.7	− 4.9	− 5.1	− 4.8	− 4.9	− 4.8	− 0.0	10	1.9	id
11.0	− 4.9	− 5.0	− 4.9	− 4.9	− 5.0	− 5.1	− 0.0	10	0.8	id.

1) Le signe ≡ désigne *brouillard.*

Il résulte de la Tab. VIII que les différences de température entre $7^m.4$ et $0^m.5$ du sol suit très exactement la variation de la nébulosité, de sorte que plus le ciel est couvert plus la différence est petite.

3. Quand le ciel, pendant une nuit sereine, se couvre rapidement, la température aux hauteurs différentes s'élève en raison du changement des conditions du rayonnement. Cependant la température près du sol s'élève plus qu'au-dessus, de sorte que les différences des températures aux hauteurs différentes deviennent beaucoup plus petites et se rapprochent de plus en plus de zéro. (Tab. VI, VII, VIII, IX).

Tab. VI.

1887 Janvier	$T_{0.03}$	$T_{0.6}$	$T_{3.0}$	$T_{4\,8}$	$T_{7.1}$	T_b	Diff. $T_{7.1}-T_{0.6}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heure	Remarques
Le 20. 7.^{h}0 soir	− 8.0	− 7.0	− 6.3	− 5.6	− 4.7	− 5.1	+ 2.3	0	6.2	
8.0	− 6.4	− 5.5	− 4.9	− 4.8	− 4.6	− 5.3	+ 0.9	0	7.0	Entre 9^h et 10^h le ciel se couvre rapidement.
9.0	− 6.5	− 5.7	− 5.4	− 5.2	− 4 8	− 5.3	+ 0.9	0	7.0	
10.0	− 5.5	− 4.9	− 4.8	− 4.7	− 4.7	− 4.5	+ 0.2	10	5.9	
11.0	− 3.0	− 2.5	− 2.5	− 2.4	− 2.2	− 2.4	+ 0.3	10	7.3	La neige vole en tourbillons.
Minuit	− 2.4	− 2.0	− 1.9	− 1.8	− 1.8	− 2.0	0.0	10	9.5	

Tab. VII.

1887 Février	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{5.4}$	$T_{7.4}$	T_b	Diff. $T_{7.4}-T_{0.5}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heures
Le 15. 6^h.0 soir	− 4.6	− 4.1	− 4.0	− 3.9	− 3.8	− 3.7	− 3.7	+ 0.4	0	3.6
7.0	− 5.7	− 5.0	− 4.8	− 4.7	− 4.6	− 4.6	− 4.0	+ 0.4	0	3.4
8.0	− 5.6	− 5.0	− 4.9	− 4.9	− 4.8	− 4.8	− 4.7	+ 0.2	0	3.4
9.0	− 5.8	− 5.2	− 5.0	− 4.9	− 4.8	− 4.7	− 4.6	+ 0.5	0	3.4
10.0	− 6.3	− 5.8	− 5.5	− 5.5	− 5.2	− 5.3	− 5.2	+ 0.5	0	3.4
11.0	− 7.0	− 6.3	− 5.9	− 5.8	− 5.7	− 5.6	− 5.4	+ 0.7	0	2.9
Minuit	− 8.3	− 7.7	− 7.2	− 6.9	− 6.7	− 6.3	− 6.0	+ 1.4	0	2.9
Le 16. 1.0 mat.	− 7.9	− 7.1	− 6.7	− 6.7	− 6.6	− 6.4	− 6.1	+ 0.7	0	2.7
2.0	− 5.3	− 5.0	− 4.9	− 5.0	− 4.9	− 4.7	− 4.8	+ 0.3	10	2.5
3.0	− 4.0	− 3.8	− 3.6	− 3.8	− 3.5	− 3.3	− 3.5	+ 0.5	10	3.8
4.0	− 2.7	− 2.4	− 2.4	− 2.4	− 2.2	− 2.4	− 2.4	0.0	10	4.3
5.0	− 2.2	− 2.1	− 2.0	− 2.0	− 1.9	− 2.0	− 1.9	+ 0.1	10	4.8
6.0	− 2.1	− 2.0	− 1.9	− 2.0	− 1.9	− 1.9	− 1.8	+ 0.1	10	4.9
7.0	− 2.1	− 2.0	− 1.9	− 2.0	− 1.9	− 1.9	− 1.8	+ 0.1	10	4.8[1])
8.0	− 2.1	− 2.0	− 1.9	− 1.9	− 1.9	− 1.9	− 1.8	+ 0.1	10	4.5

1) Le soleil se lève.

Tab. VIII.

1888 Janvier	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{5.4}$	$T_{7.4}$	T_b	Diff. $T_{7.4}-T_{0.5}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heure
Le 27. 5.^{h}0 soir	− 18.8	− 16.1	− 16.9	− 15.8	− 15.4	− 14.4	− 13.8	+ 1.7	0	0.7[1])
6.0	− 19.7	− 17.8	− 16.9	− 17.0	− 16.5	− 16.5	− 15.0	+ 1.3	0	0.8[1])
7.0	− 20 0	− 17.4	− 16.2	− 16.5	− 16.2	− 15 7	− 14.8	+ 2.7	0	0.0[1])
8.0	− 20.2	− 17.8	− 16.7	− 16.7	− 15.9	− 15.0	− 15.1	+ 2.8	0	0.0[1])
9.0	− 21.3	− 19.2	− 18.0	− 18.4	− 17.0	− 16.0	− 15.5	+ 3.2	0	0.0[1])
10.0	− 20.9	− 18.3	− 17.5	− 17.8	− 17.0	− 16.2	− 15.7	+ 2.1	0	0.0[1])
11 0	− 18.5	− 17.4	− 16.7	− 16.4	− 16.6	− 16.1	− 16.3	+ 1.3	6	1.1[1])
Minuit	− 20.9	− 18.5	− 17.6	− 17.6	− 17.0	− 16.4	− 16.0	+ 2.1	1	0.8[2])
Le 23. 1.^{h}0 mat.	− 20.0	− 17.7	− 17.9	− 18.2	− 18 0	− 17.3	− 16.7	+ 0.4	5	0.0[2])
2.0	− 18.3	− 17 1	− 16.5	− 16.3	− 15.9	− 15.4	− 16.1	+ 1.7	5	0.8[2])
3.0	− 21.5	− 19.1	− 17.8	− 16.7	− 16.1	− 15.7	− 16.1	+ 3.4	0	0.0[2])
4.0	− 19.0	− 19.0	− 18.7	− 18.3	− 18.1	− 18.6	− 18.1	+ 0.4	8	0.0[2])
5.0	− 18.0	− 18.0	− 17.7	− 18 0	− 18.0	− 17.5	− 17.7	+ 0.5	8	0.0
6.0	− 16.7	− 16.5	− 16.8	− 16.5	− 16.7	− 16.2	− 16.4	+ 0.3	10	0.0
7.0	− 16.1	− 15.8	− 15.8	− 15.5	− 15.8	− 15.5	− 15.7	+ 0.3	9	0.0
8.0	− 16.3	− 15.5	− 15.2	− 15.1	− 14.8	− 14.9	− 15.2	+ 0.3	9	1.4[3])
9.0	− 12.1	− 11.7	− 11.6	− 11.5	− 11.7	− 11.5	− 12.3	+ 0.2	10	2.1[4])

1) ⌴ très forte. 2) id. Nuages seulement à l'horizon. 3) Le soleil se lève 8.^{h}10. 4) * 8.^{h}45 a. m

Tab. IX.

1888 Mars	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{4.8}$	$T_{6.8}$	T_b	Diff. $T_{6.8}-T_{0.5}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heure.
Le 10. 4.30 soir	− 12.8	− 12.1	− 11.7	− 11.6	− 11.2	− 11.3		+ 0.8	0	2.4
5.30	− 14.9	− 15.6	− 14.1	− 13.8	− 13.8	− 13.7		+ 1.9	0	2.4[1])
6.0	− 16.1	− 15.3	− 14.7	− 14.6	− 14.5	− 14.7	− 14.5	+ 0.6	0	2.4
7.0	− 20.0	− 19.0	− 19.4	− 18.2	− 18.1	− 17.8	− 17.3	+ 1.2	10	1.1
8.0	− 16.0	− 15.7	− 15.1	− 15.1	− 15 3	− 14.8	− 15.9	+ 0.9	10	1.0[2])
9.0	− 15.0	− 14.8	− 14.6	− 14.7	− 14.8	− 14.7	− 15.1	+ 0.1	10	2.0[2])
10.0	− 14.4	− 14.1	− 14.2	− 14.2	− 14.6	− 14.3	− 14.5	− 0.2	10	2.9[2])
Le 12. 5.^{h}0 mat.	− 14.1	− 12.1	− 12.2	− 12.1	− 11.7	− 11.4	− 11.9	+ 0.7	0	1.9[3])
6.0	− 18 0	− 14.6	− 14.2	− 14.3	− 14.5	− 14.2	− 14.1	+ 0.4	0	1.8
7.0	− 17.1	− 15.9	− 15.9	− 15.8	− 15.9	− 15.7	− 15.4	+ 0.2	0	2.6
8.0	− 19.9	− 17.8	− 17.1	− 17.2	− 17.1	− 17.0	− 17.1	+ 0.8	0	2.2
9.0	− 18.1	− 17.4	− 17.2	− 17.3	− 17.3	− 17.3	− 18.0	+ 0.1	9	2.3[2])
10.0	− 16.9	− 16.5	− 16.6	− 16.6	− 16.6	− 16.5	− 17.1	0.0	10	1.7[2])

1) Le soleil couché. 2) *. 3) Le soleil encore à l'horizon.

4. L'accroissement de la température avec la hauteur peut être très grand même pendant les nuits couvertes, lorsque le ciel est couvert d'une mince couche de hauts nuages comme d'un mince voile de cirro-stratus. La Tab. X en donne un bon exemple.

Tab X.

1887 Fèvrier	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{5.4}$	$T_{7.4}$	T_b	Diff. $T_{7.4} - T_{0.5}$	Nébulosité (0 à 10)	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heure
Le 8. 4.^{h}0p.m	− 2.4	− 2.0	− 1.9	− 1.9	− 1.7	− 1.7	− 1.3	+ 0.3	0	4.0[1])
5.0	− 3.2	− 2.9	− 2.6	− 2.4	− 2.2	− 2.3	− 1.9	+ 0.6	0	3 3
6.0	− 3.8	− 3.1	− 2.9	− 2.8	− 2.6	− 2.5	− 2.4	+ 0.6	0	3.4
7.0	− 5.0	− 4.0	− 3 9	− 3.7	− 3.5	− 3.4	− 3.0	+ 0.6	0	2.6
8.0	− 5.0	− 4.1	− 3.9	− 3.8	− 3 6	− 3.5	− 3.3	+ 0.6	1	2.1[2])
9.30	− 4.8	− 4.2	− 4 0	− 4.0	− 3.8	− 3 7	− 3.5	+ 0.5	8	3.0[3])
10.0	− 4.8	− 4.1	− 3.9	− 3.9	− 3.6	− 3.5	− 3.5	+ 0.6	8	2.7[3])
11.0	− 5.8	− 5.1	− 4.9	− 4.9	− 4.6	− 4.2	− 3.8	+ 0.9	7	2.6[3])
Minuit	− 5.1	− 4.5	− 4 1	− 4.2	− 4.2	− 4.0	− 3 8	+ 0.5	8	1.9[3])
Le 9. 1.^{h}0 a. m.	− 4.9	− 4.4	− 4.4	− 4.2	− 4.3	− 4.0	− 4.0	+ 0.4	10	2.0[3])
2.0	− 5.8	− 5.4	− 5.0	− 4.9	− 4 6	− 4.4	− 4.1	+ 1.0	10	0.7[3])
3.0	− 5.7	− 5.1	− 4.8	− 4.8	− 4.5	− 4.4	− 4.1	+ 0.7	8	1.9[3])
4.0	− 6.2	− 5.5	− 5.3	− 5.0	− 4.8	− 4.9	− 4.8	+ 0.6	7	1.2[3])
5.0	− 6.1	− 5 4	− 5.1	− 4.9	− 4.8	− 4.7	− 4.5	+ 0.7	5	2 6[3])
6.0	− 5.2	− 4.8	− 4.6	− 4.5	− 4.4	− 4.4	− 4.3	+ 0.4	2	3.1[4])
7.0	− 3.2	− 3.0	− 2.8	− 2.9	− 3.0	− 2.9	− 2.9	+ 0.1	10	4 3[5])
9.0	− 2.2	− 2.0	− 1.9	− 1.9	− 1.8	− 1.8	− 1.8	+ 0.2	9	3.9[6])

1) Le soleil à l'horizon. 2) Cr—Str 3) Voile de Cr—Str. 4) Voile très fin de Cr − Str
5) Nb. 6) Le soleil levé. Nb.

5. Pendant les nuits tout-à-fait sereines de l'hiver il arrive souvent que la température s'élève très rapidement à toutes les hauteurs mais pourtant plus rapidement près du sol, de sorte que la température tend à devenir égale dans les couches inférieures de l'atmosphère. Le phénomène se présente ainsi de même façon que lorsque le ciel se couvre rapidement.

L'explication en est, très probablement, que le ciel se couvre en effet d'un voile imperceptible de nuages qui empêche le rayonnement. On en peut voir un exemple à la Tab. II à minuit et à la Tab. IV à 8^h.0 et à 10^h.0 du soir.

6. A propos de la limite de l'accroissement de la température avec la hauteur, MARCET [1]) dit qu'elle est au-dessous de 100 pieds (envi-

1) l. c. pag. 329.

ron 32[m]) en hiver par un temps serein. BRAVAIS [1]), au contraire, dit qu'elle est au-dessous de 100[m] et il indique la hauteur moyenne à 65[m]. MARTINS [2]) remarque que la limite d'accroissement est habituellement supérieure à 50[m], mais qu'il l'a trouvée, au printemps, entre 26[m] et 49[m] au-dessus du sol. Mes observations ne me permettent pas de me prononcer sur ce point. Je cite pourtant (Tab. XI) une série d'observations faites sur la tour de la cathédrale en même temps que celles faites au mât. Un thermomètre à 46[m] au-dessus du sol fut suspendu sur l'échafaudage au NE en dehors de la tour septentrionale; l'autre, à 49[m] du sol, fut fixé à 1[m] au-dessus de la même tour un peu en dehors du bord du toit.

Tab. XI.

1887 Mars	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{1.5}$	$T_{3.5}$	$T_{5.4}$	$T_{7.4}$	$T_{46.0}$	$T_{49.0}$	Diff. $T_{7.4} - T_{0.5}$	Diff. $T_{49.0} - T_{0.5}$	Vitesse du vent (mètres par sec.) par heure
Le 18. 7.[h]0 soir	− 6.3	− 5.7	− 5.7	− 5.6	− 5.8	− 5.3	− 4.8	− 4.9	+ 0.4	+ 0.8	2.1
8.0	− 7.4	− 7.2	− 6.9	− 6.8	− 6.9	− 6.5	− 6.7	− 6.5	+ 0.7	+ 0.7	1.7
9 0	− 10.6	− 10.5	− 9.6	− 8.8	− 8 7	− 7.9	− 6.8	− 6.8	+ 2.6	+ 3.7	0.7
10.0	− 11.9	− 12.1	− 11.7	− 11.7	− 11.6	− 11.8	− 6.7	− 6.7	+ 0.3	+ 5.4	0.0
11.0	− 13.1	− 13.4	− 13.2	− 12.9	− 12.5	− 11.9	− 9.5	− 8.7	+ 1.5	+ 4.7	0 0
Minuit	− 14.5	− 14 6	− 14.3	− 14.2	− 13.6	− 13.0	− 9.3	− 8.3	+ 1.6	+ 6.3	0.0
Le 19. 1.[h]0 mat.	− 14.9	− 15.1	− 14.9	− 14.4	− 13.6	− 13.6	− 9.0	− 7.9	+ 1.5	+ 7.2	0.0[1])
2.0	− 15.8	− 15.8	− 15.3	− 15.5	− 15.0	− 15.0	− 10.1	− 9.2	+ 0.8	+ 6.6	0.0[1])
3.0	− 15.5	− 15.5	− 15.3	− 14 8	− 14.6	− 13.8	− 9.7	− 9.1	+ 1.7	+ 6.4	0.0[1])
4.0	− 17.0	− 16 6	− 16.2	− 16.0	− 15.8	− 15.1	− 10.4	− 9.6	+ 1.5	+ 8.5	0.0[1])
5 0	− 16.2	− 15.7	− 15.7	− 15.6	− 15.5	− 15.3	− 9.6	− 9.6	+ 0.4	+ 6.1	0.0[1])
Moyen	− 13.0	− 12.9	− 12.6	− 12.4	− 12.1	− 11.7	− 8.4	− 7.9	+ 1.2	+ 5.0	

Nébulosité (0 à 10) 0. 1) ⎵ faible

Une détermination de la hauteur par le baromètre a donné comme résultat que la surface du sol au pied du mât est de 7[m] au-dessus du pied de la tour. Le thermomètre à 49[m] de hauteur sur la tour était ainsi à 42[m] au-dessus de la surface du sol au pied du mât.

Le Table XI montre que, du moins pendant cette nuit-là avec un temps serein, la limite d'accroissement était au-dessus de 42[m].

1) l. c. pag. 128.
2) l. c. pag. 13 et 42.

7. Ce qui distingue aussi l'hiver de la belle saison, c'est que le sol, c'est-à-dire la surface même de la neige, pendant les nuits d'hiver, est beaucoup plus froid que l'air près du sol ou plus haut.

Sur la surface de la neige près du mât j'ai placé un thermomètre que j'ai observé en même temps que les thermomètres du mât. Les nombres suivants étant des moyennes de 54 observations, pendant les nuits sereines d'hiver, montrent clairement ce phénomène.

T_o	$T_{0.03}$	$T_{0.5}$	$T_{7.4}$
$-17^0.7$	-15.7	-14.1	-12.2

T_0, $T_{0.03}$ ..... désignent la température de la surface même du sol et à $0^m.03$ ..... au-dessus du sol.

La température moyenne de la surface de la neige est donc inférieure de $2^0.0$ à la température de l'air à $0^m.03$ du sol et déjà inférieure de $5^0.5$ à la température qu'on observe à $7^m.4$ au-dessus du sol. Cette différence est en général la plus grande au moment du lever du soleil; elle a été une fois, le 23 Février 1887, de $7^0.8$.

La raison de ce phénomène est évidemment le grand refroidissement de la surface de la neige par le rayonnement et la faible conductibilité de la neige et de l'air.

8. A cela se rattache une autre chose, savoir que les hivers abondants en neige se caractérisent par un froid très fort et de longue durée. Cela s'explique par le fait que la neige, ayant un grand pouvoir émissif mais une petite conductibilité, rayonne vivement de la chaleur pendant les nuits sereines d'hiver, de sorte que la neige et par suite l'air ambiant se refroidissent fortement. Le poids spécifique de l'air et par conséquent la pression barométrique augmentent, et un maximum barométrique tend à se former. Ce maximum amène un temps clair, qui à son tour fait croître le rayonnement et le froid. Il arrive souvent ainsi en hiver qu'un maximum barométrique peut rester très longtemps, un mois même, au-dessus de la même région et produire un temps clair constant avec un froid intense.

IV.

INFLUENCE DU SOL SUR LA TEMPÉRATURE DE L'AIR.

La température sur les collines et sur les grandes hauteurs est plus haute que dans la plaine pendant les nuits d'hiver.

Ce fait, ayant aussi lieu pendant la belle saison, est peut-être plus marqué encore en hiver. Comme il a été dit plus haut, j'ai fait sur ce point quelques recherches, dont je vais communiquer les plus intéressantes.

Près de la cloche, dite de Christine, à 1^m environ d'un vieux mur dans le voisinage du château d'Upsala le thermomètre indiqua, une nuit, — 14°.2 à 0^m.03 du sol, pendant que, au pied du mur, dont la hauteur est d'environ 10^m, la température à la même hauteur au-dessus de la surface de la neige fut au même moment de — 16°.6, c'est-à-dire de 2°.4 plus basse. Sur la colline, dite »colline verte», tout près de l'aile sud du château, la température fut de — 14°.2 pendant qu'elle était, au même moment, de — 20°.1 dans la plaine devant la prison à quelques cents mètres du château. Sur la hauteur près de la tour du sud du château le thermomètre marqua, pendant la même nuit, — 18°.6, tandis qu'il indiqua — 23°.8 au même moment dans la vallée, droit au-dessous, près de l'hôpital académique. Sur la hauteur à l'est du château la température fut de — 20°.2, et au pied de la hauteur, près de l'établissement de bains, de — 26°.0 au même moment, etc.

Pendant la nuit du 25 au 26 Février 1888 j'ai fait aussi une série d'observations. J'ai fixé des thermomètres à deux petites perches que j'enfonçais dans la neige, de façon à ce que l'un des thermomètres fût à la hauteur de 0^m.02 et l'autre de 0^m.5 au-dessus de la surface de la neige. Voici quelques-unes des observations.

Au sud-ouest du château, au pied de la »colline verte» deux thermomètres, placés à 0^m.02 du sol indiquaient une différence de + 5°.6 pour une différence d'altitude de 12^m; placés à 0^m.5 du sol, la différence était de + 5°.3. A une différence d'altitude de 7^m la différence de température était de 3°.8 lorsque les thermomètres étaient à 0^m.02 du sol, et de 5°.1 lorsqu'ils étaient à 0^m.5.

A la grande sablière au SSE de la ville j'ai fait quelques observations. L'un des observateurs se portait à différents endroits autour du bord supérieur de la sablière tout près de la lisière de la forêt, pen-

dant que l'autre se plaçait à différents endroits au fond de la sablière et sur la pente de sable. Les chiffres suivants rendent compte du phénomène.

Différence de hauteur	$D_{0.02}$	$D_{0.5}$
15^m	+ 0.9	+ 0.9
20^m	+ 1.3	+ 1.5
25^m	+ 2.0	+ 2.1
10^m	+ 0.5	+ 1.0
7^m	− 0.2	+ 0.0

$D_{0.02}$ et $D_{0.5}$ désignent les différences obtenues, prises à $0^m.02$ et à $0^m.5$ du sol, entre les températures observées au bord supérieur et aux différents endroits de la sablière.

Sous les arbres dans la forêt la température était plus élevée que hors de la forêt, quoique le terrain nu fût situé un peu plus haut. Ainsi les températures sous les arbres à $0^m.02$ et à $0^m.5$ au-dessus du sol furent plus élevées de $0^\circ.9$ et de $0^\circ.4$ qu'un peu en dehors de la lisière de la forêt au bord de la sablière. Les nombres correspondants furent $2^\circ.7$ et $2^\circ.4$, lorsque l'un des observateurs était dans la forêt et l'autre dans la plaine au-dessous etc.

RÉSUMÉ.

1. L'abaissement de température causé par le rayonnement des thermomètres nus est presque constant à différentes hauteurs à partir de $0^m.5$ au-dessus de la surface de la neige.

2. Pendant les nuits sereines d'hiver la température croît avec la hauteur; ce phénomène commence déjà deux ou trois heures avant le coucher du soleil et dure une à deux heures après son lever.

3. L'accroissement de la température avec la hauteur est plus grand en hiver que pendant les autres saisons.

4. L'accroissement de température avec la hauteur est une fonction linéaire de la température, de sorte que plus la température est basse, plus l'accroissement est grand.

5. Pendant les nuits d'hiver couvertes et brumeuses les températures à des hauteurs différentes sont presque égales.

6. La variation de température suit très exactement la variation de nébulosité.

7. Un voile mince et haut de nuages ne paraît empêcher que faiblement l'accroissement de température avec la hauteur.

8. En hiver la surface de la neige est plus froide que l'air ambiant.

9. Le fait que les hivers abondants en neige se caractérisent par un froid très fort et de longue durée s'explique très bien par les propriétés physiques de la neige.

10. La température sur les collines et sur les grandes hauteurs est plus haute que dans la plaine pendant les nuits d'hiver.

MODIFICIERTE LLOYDSCHE WAGE

VON

E. SOLANDER.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 26 Okt. 1889).

UPSALA, 1890,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

Zur Bestimmung der Variationen der Vertikalintensität sind bis jetzt zwei Hauptmethoden angewandt worden, deren Grundprincipien beide von H. Lloyd angegeben worden sind. Die eine besteht bekanntlich darin, zwei (oder eventuell nur einen) weiche, vertikal gestellte, Eisenstäbe auf die Nadel eines Unifilarmagnetometers einwirken zu lassen, wobei die Ebene der Eisenstäbe auf der Axe der Nadel in der Gleichgewichtslage senkrecht steht. Dieser Grundgedanke ist später von Lamont aufgenommen und weiter ausgeführt worden; das Instrument wird deshalb auch gewöhnlich »das Lamontsche Unifilar mit Eisenstäben» genannt. Sind bei einem solchen Instrumente die Eisenstäbe schon seit vielen Jahren angehängt, so wird beinahe aller Magnetismus derselben permanent; da andererseits bei neuen, frisch ausgeglühten Eisenstäben die Veränderungen des Induktionsvermögens und des permanenten Magnetismus mit der Zeit ziemlich rasch vor sich gehen, so wird die Möglichkeit das Instrument zu benutzen auf ziemlich enge Zeitabschnitte beschränkt. Dass das Instrument auch im übrigen jedenfalls kein zweckmässiges ist, braucht hier nicht weiter betont zu werden.

Die zweite Methode besteht nun darin, die Vertikalintensität auf einen mit horizontaler Drehungsaxe versehenen Magneten ablenkend wirken zu lassen, wobei in der Nulllage das Moment der Schwere dem der Vertikalintensität eben das Gleichgewicht halten soll. Die Drehungsaxe ist gewöhnlich aus Stahl; doch ist in neuerer Zeit vielfach der Versuch gemacht, dieselbe mit Fadensuspension zu vertauschen, um die Fehler einer etwaigen Reibung zu vermeiden. Der erste dieser Versuche ist jedoch schon von Gauss und Weber angestellt worden; ein zu diesem Zwecke abgesehener Magnet findet sich im hiesigen physikalischen In-

stitut und wurde um das Jahr 1836 von prof. G. Svanberg aus Göttingen herbeigeschafft. Die erste diesbezügliche Publikation aber mag wohl von Bravais herrühren, welcher die Axe einfach an vertikal herabhängenden Coconfäden befestigte, wodurch das Instrument einem Bifilarmagnetometer ähnlich wurde, nur mit dem Unterschiede, dass die Axe natürlich nahe am Schwerpunkte vorbei ging und die vertikalen Bewegungen der Nadel beobachtet wurden[1]). Später hat Wild eine entsprechende Suspensionsvorrichtung durch zwei kurze, horizontal gespannte Fäden zu erlangen versucht[2]). Da aber, wie er selber sagt, eben »die kleinern Variationen beim neuen Instrumente durchgehends viel grösser ausfielen und meistentheils denen der Lloydschen Wage gerade entgegengesetzt waren», so scheint die von K. Schering[3]) ausgesprochene Befürchtung, es treibe die elastische Nachwirkung der Drähte bei diesem Instrumente ihr verderbliches Spiel, nur zu sehr begründet zu sein. Die beste Konstruktion dieser Art ist wohl zweifelsohne das sogenannte Quadrifilarmagnetometer von K. Schering[3]). Es wäre aber etwas schwierig ein derartiges Instrument mit sehr langen Fäden in einem kleinen magnetischen Observatorium, wie das hiesige, in genügender Weise aufzustellen. Auch scheint nicht einmal die sehr geniale Konstruktion Scherings den lästigen Einfluss der elastischen Nachwirkung, wenigstens in der ersten Zeit nach der Aufstellung, beseitigen zu können[4]). Dazu kommt noch, dass dieses Instrument mit allen früheren die Ungelegenheit gemeinsam haben scheint, dass sie eine genaue Bestimmung des Einflusses der Temperaturvariationen nach der Aufstellung des Apparates nicht zulassen, und dies scheint mir doch eine notwendige Bedingung für die Genauigkeit des Resultates zu sein. Ich will nur beiläufig daran erinnern, dass am physikalischen Central-Observatorium zu St. Petersburg, wo die Temperaturkorrektion der dortigen Lloydschen Wage dadurch

1) P. Gaimard: Voyages en Scandinavie, en Laponie, au Spitzberg et aux Feröe pendant les années 1838, 1839 et 1840. 23e Livraison. Réd. par A. Bravais.

2) H. Wild: Über ein neues Variationsinstrument für die Vertikalintensität des Erdmagnetismus. Bulletin de l'Acad. impér. des sciences de St. Pétersbourg. 1872, T. XVII.

3) K. Schering: Das Quadrifilarmagnetometer, ein neues Instrument zur Bestimmung der Variationen der vertikalen erdmagnetischen Kraft. Nachrichten der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1884.

4) E. und K. Schering: Beobachtungen in Gauss' erdmagnetischem Observatorium der Königl. Universität Göttingen während der Polar-Expeditionen 1882 und 1883, Seite 103. Separat-Abdruck aus dem deutschen Polarwerke.

ermittelt wurde, dass das Beobachtungszimmer abwechselnd erwärmt und abgekühlt wurde, diese Korrektion bald positiv, bald negativ ausfiel und dabei einen so beträchtlichen numerischen Betrag wie 1,14 Skalateile für 1° Fahrenheit beim Werthe 0.004114 C. G. S. eines Skalateiles erlangen konnte[1]). Die genannten Umstände haben mich bewogen, zu der auf Achatscheiben ruhenden Stahlaxe zurückzukehren und dabei dem Instrumente eine solche Konstruktion zu geben, dass die Reibung möglichst gering und die Temperaturkorrektion genau zu bestimmen sein würden.

Es seien:

H = die Horizontalintensität des Erdmagnetismus,

H_1 = die auf die Schneide senkrechte Komposante von H,

V = die Vertikalintensität,

μ = das magnetische Moment der Wage,

P = die Schwere[2]) des beweglichen Systems,

a und b = die Koordinaten des Schwerpunkts in der auf die Schneide senkrechte Ebene, mit Origo im Schnittpunkte; x-Axe die magnetische Axe des Magnets,

ϑ = der Winkel der magnetischen Axe mit dem Horizonte.

Ohne Reibung wird dann die Gleichgewichtsbedingung sein:

$$\mu V \cos\vartheta = \mu H_1 \sin\vartheta + P(a\cos\vartheta + b\sin\vartheta) \tag{1}$$

Der Einfluss der Reibung wird sich nun darin äussern, dass die Reaktionskraft der Achatscheiben, welche P entgegengesetzt gleich ist, um eine kleine Strecke σ von der Rotationsaxe entfernt sein kann, was einen Maximalfehler $\pm \delta V$ in der Bestimmung von V verursacht, gegeben durch die Gleichung:

$$\mu(V + \delta V)\cos\vartheta = \mu H_1 \sin\vartheta + P(a\cos\vartheta + b\sin\vartheta + \sigma).$$

---

1) R. v. Trautvetter: Die magnetischen Beobachtungen am physikalischen Central-Observatorium zu St. Petersburg in den Jahren 1870—1877. Wilds Repertorium für Meteorologie. Band VII, 1881.

2) Man muss, scheint es mir, nunmehr einen genauen Unterschied zwischen der Schwere und dem Gewicht eines körpers machen, wobei dann die Schwere eines Körpers zu definieren ist als die Kraft, mit der die Erde bei gegebener Lage den Körper anzieht. Vielfach wird auch nach Einführung des C. G. S.-Systems das Wort Gewicht in derselben Bedeutung angewandt; dies kann aber leicht Missverständnisse verursachen, da ja doch wohl auch in Zukunft in der Industrie das Gewicht eines Körpers die von demselben vorhandene Menge (in Gram, Kilogram, etc.), d. i. dessen Masse bezeichnen wird.

Führt man den Reibungskoefficient des Rollens, η, ein,[1]) vermöge:

$$\eta = \frac{\sigma}{\varrho} ,$$

wo ϱ der Krümmungshalbmesser der Schneide ist, so ergiebt sich somit:

$$\delta V = \frac{P \varrho \eta}{\mu \cos \vartheta} .$$

Damit der Einfluss der Reibung gering werde, müssen somit, abgesehen davon dass die Schneide gut gearbeitet (ϱ klein) sein muss, die Schwere der Wage klein, das magnetische Moment dagegen gross sein, welche Bedingungen übrigens ziemlich einleuchtend sind.

Dem Instrumente wurde nun folgende Einrichtung gegeben. Als Fussgestell dient eine schwere Bleiplatte, welche oben mit einer harten Messingfeder versehen ist, an der eine kleine Messingscheibe, die vermittelst durch die Bleiplatte hindurchgehende Schrauben befestigt wird, fest andrückt und dadurch die Nivellierung der Achatscheiben ermöglicht. Von der Mitte der Messingscheibe geht ein Stab aus galvanischem Kupfer vertikal nach oben. Oben ist derselbe zu einem U-förmigen Gabel gespaltet, auf dessen Oberseiten die Achatscheiben, auf denen die durch den Magnet hindurchgehende Axe ruht, befestigt sind. Der Magnet bildet einen 16 c.m. langen Hohlcylinder aus gehärtetem Stahl von 1.4 c.m. äusserem und 1.2 c.m. innerem Durchmesser. Oben an der Mitte desselben befindet sich eine Messingschraube mit Laufgewicht aus demselben Metall. Die Schraubenspindel kann mit Reibung um eine der Schneide parallele Axe gedreht werden, so dass in dieser Weise die Schwerpunktskoordinaten a, b innerhalb gevisser Grenzen beliebig verändert werden können. Der Magnet wurde zwischen den Polplatten eines starken Elektromagnets bis zur Sättigung magnetisiert, und darauf wurde der Spiegel am Südpole festgesetzt, wobei dann am Nordpole ein kleiner Bleiring als Gegengewicht appliciert wurde. Sowohl der Bleiring als der Spiegel wurden mit Asphaltfirniss gut befestigt. Die Masse des beweglichen Systems beträgt 69.2 gr. Der Magnet ist von einer Hülle umgeben, welche aus einem durch einen Längsschnitt in zwei Hälften ge-

1) Nach der Definition in SCHELLS »Theorie der Bewegungen und der Kräfte». Im allgemeinen ist es eben die Streche σ welche der Reibungskoefficient des Rollens genannt wird, weil σ eben konstant ist bei grösseren ϱ-Werten. Wird aber $\varrho < \sigma_{max}$, so muss σ dem ϱ proportional abnehmen; d. h. $\frac{\sigma}{\varrho}$ wird einer Konstante gleich.

spalteten Hohlcylinder aus galvanischem Kupfer besteht von 18 c.m. Länge, 3.8 c.m. innerem Durchmesser und 0.3 c.m. Wanddicke. Die beiden Hälften werden durch zwei kleine Messingschrauben an der unteren Seite der U-förmigen Schenkel befestigt und ausserdem durch eine runde Vertiefung im Kupferstabe gestützt; die Querflächen der Hülle werden durch Plangläser tragende Hülsen aus galvanischem Kupfer verschlossen. Eine excentrische Durchbohrung der Hülle gestattet die Einführung einer Thermometerkugel im innern des Instruments. Zu erwähnen ist noch, dass vor der definitiven Verschliessung des Apparates zwei kleine Glasschalen mit Chlorcalcium in demselben eingeführt wurden. Die Bewegungen des Magnets werden durch ein Fernrohr in Verbindung mit einer vertikalen von hinten beleuchteten Glasskala in gewöhnlicher Weise beobachtet. Der Apparat wurde für die hiesige physikalische Institution vom Herrn Instrumentmacher P. M. SÖRENSEN in Stockholm nach meinen Angaben in ausgezeichneter Weise ausgeführt; bei der Herstellung des Magnets haben sich einige Schwierigkeiten gezeigt in so fern als einige schon fertige Stahlcylinder beim Härten zersprangen.

Wird die Gleichung (1) nach allen veränderlichen Grössen variiert, so bekommt man:

$$\mu\delta V + V\delta\mu = (\mu\delta H_1 + H_1\delta\mu + P\delta b)\operatorname{tg}\vartheta + (Pb + \mu H_1)\frac{\delta\vartheta}{\cos^2\vartheta} + P\delta a \ .$$

Ist der Winkel ϑ exakt oder wenigstens annäherungsweise gleich Null, so kann das erste Glied der rechten Seite vernachlässigt werden, und somit ergiebt sich, wenn zur Abkürzung

$$\frac{P}{\mu V} = f \ , \ \frac{H_1}{V} = \cot i_1$$

gesetzt werden:

$$(2) \qquad \frac{\delta V}{V} = (fb + \cot i_1)\frac{\delta\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{\delta\mu}{\mu} + f\delta a \ ,$$

wo für das letzte Glied auch $\frac{\delta a}{a}$ geschrieben werden kann. Die beiden Glieder $\mu\delta H_1$ und $H_1\delta\mu$ könnte man auch dadurch zum Verschwinden bringen, dass man die Schneide dem magnetischen Meridian parallel machte, wobei dann auch $\cot i_1$ gleich Null würde. Dies soll aber den Übelstand mit sich bringen, dass das Drehungsmoment der Horizontalintensität, welches dann ein Gleiten der Schneide hervorzubringen strebt, durch

den entstandenen Zwangszustand auf die Ablesungen nachteilig einwirken soll. Direkte Versuche hierüber habe ich wegen Mangels an Raum nicht anstellen können; der einzige für das Instrument ledige Platz war ein Pfeiler in der südlichen Ecke des Observatoriums. Da der Spiegel am Südende des Magnets befestigt war, wurde also der Nordpol des Magnets nach Süden gerichtet und i_1 sehr nahe $-i$ gleich. In dieser Stellung vergrössert das Moment der Horizontalintensität, bei gegebener Lage des Schwerpunkts, die Empfindlichkeit des Instruments; dagegen kann wohl eine der Magnetisierung entgegenwirkende Kraft für die Konstanz des magnetischen Moments etwas nachteilig werden.

Um die Empfindlichkeitskonstante zu bestimmen wurde ein vertikaler Magnetstab vertikal oben an der Mitte der Wage und zwar um eine horizontale Axe drehbar angebracht, somit in der ersten Gaussischen Hauptlage. Diesen Magnetstab liess ich dann auch die Nadel des Deklinationsvariometers in demselben Abstande e und in derselben Hauptlage ablenken. Nennt man nun das magnetische Moment des Stabes M; die beiderseitigen Ablenkungen der Wage $\delta_1\vartheta$ und $\delta_2\vartheta$, sowie die entsprechenden Ablenkungen des Deklinationsvariometers in Skalateilen n_1 und n_2, wobei der Winkelwert eines Skalateiles $\varepsilon = 0'.677$ ist, so erhält man, wenn ferner k eine Konstante ist:

$$\left(\mu V + \frac{2\,k\mu M}{e^3}\right)\cos(\vartheta+\delta_1\vartheta) = (Pb+\mu H_1)\sin(\vartheta+\delta_1\vartheta) + Pa\cos(\vartheta+\delta_1\vartheta)\,,$$

$$\left(\mu V - \frac{2\,k\mu M}{e^3}\right)\cos(\vartheta-\delta_2\vartheta) = (Pb+\mu H_1)\sin(\vartheta-\delta_2\vartheta) + Pa\cos(\vartheta-\delta_2\vartheta)\,,$$

und somit:

$$\frac{4\,k\mu M}{e^3} = (Pb+\mu H_1)\{\mathrm{tg}(\vartheta+\delta_1\vartheta) - \mathrm{tg}(\vartheta-\delta_2\vartheta)\} =$$

$$(Pb+\mu H_1)\frac{\sin(\delta_1\vartheta+\delta_2\vartheta)}{\cos(\vartheta+\delta_1\vartheta)\cos(\vartheta-\delta_2\vartheta)}\,.$$

Es ist aber:

$$\cos(\vartheta+\delta_1\vartheta)\cos(\vartheta-\delta_2\vartheta) = \cos^2\vartheta\cos\delta_1\vartheta\cos\delta_2\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta\sin(\delta_2\vartheta-\delta_1\vartheta) - \sin^2\vartheta\sin\delta_1\vartheta\sin\delta_2\vartheta\,,$$

wo aber die beiden letzten Glieder der rechten Seite im Verhältniss zum ersten vernachlässigt werden können. Somit wird:

$$\frac{4\,k\mu M}{e^3} = \left(\frac{Pb+\mu H_1}{\cos^2\vartheta}\right)(\mathrm{tg}\delta_1\vartheta + \mathrm{tg}\delta_2\vartheta)\,,$$

und bei hinreichender Kleinheit des $\delta_1 \vartheta$ und des $\delta_2 \vartheta$:

$$\frac{2\,kM}{e^3} = V \cdot \frac{fb + \cot i_1}{\cos^2 \vartheta} \cdot \delta\vartheta \ ,$$

wo $\delta\vartheta$ statt $\frac{1}{2}(\delta_1\vartheta + \delta_2\vartheta)$ geschrieben wurde. Die Bestimmung der Empfindlichkeitskonstante geschieht somit in derselben Weise, sei es dass die Wage in der Gleichgewichtsstellung vollkommen horizontal ist oder nicht. Die Ablenkungen beim Deklinationsvariometer ergeben, $n_1 - n_2$ als klein vorausgesetzt:

$$\frac{2\,kM}{e^3} = H \sin \varepsilon \cdot \frac{n_1 - n_2}{2} \ ,$$

und somit:

$$\frac{fb + \cot i_1}{\cos^2 \vartheta} = \cot i \sin \varepsilon \frac{n_1 - n_2}{2\,\delta\vartheta} \ .$$

Nun ist aber

$$\delta\vartheta = \varepsilon_1 \cdot \frac{v_1 - v_2}{2} \ ,$$

wenn v_1 und v_2 die Ablesungen an der Wage, und ε_1 den wahren Bogenwert eines Skalateils bezeichnen; somit wird:

$$\frac{fb + \cot i_1}{\cos^2 \vartheta} \cdot \varepsilon_1 = \cot i \sin \varepsilon \frac{n_1 - n_2}{v_1 - v_2} \ .$$

Somit wird, vorläufig von Temperaturkorrektionen abgesehen:

$$\frac{\delta V}{V} = \left[\cot i \sin \varepsilon \frac{n_1 - n_2}{v_1 - v_2}\right] \cdot v \ ,$$

$$\delta V = \left[H \sin \varepsilon \frac{n_1 - n_2}{v_1 - v_2}\right] \cdot v \ .$$

Es braucht der Bogenwert ε_1 folglich nicht bestimmt zu werden, was von Vorteil ist, da er ausser vom Abstande a zwischen Spiegel und Skala auch von der Neigung ϑ, vom Abstande zwischen Spiegel und Rotationsaxe, von der Kollimation des Spiegels und vom horizontalen Abstande zwischen der Skala und der optischen Axe des Fernrohrs abhängig wird. Ein angenäherter Wert ergiebt sich aus der Ausmessung von a allein; es war

Abstand von der geteilten Rückfläche der Skala bis zur spiegelnden Rückfläche des Spiegels . . . . . = 241,57 c.m.
Glasdicke der Skala . . . . . = 0,17 c.m.
» des Spiegels . . . . . = 0,25 c.m.
» des Planglases . . . . . = 0,25 c.m.

und somit der reducierte Abstand $a = 241.35$ c.m. und der angenäherte Wert $\varepsilon_1 = \sin 0'.712$. Natürlich muss dagegen ε_1 genau ermittelt werden, wenn man die Empfindlichkeitskonstante durch Beobachtung von Schwingungen in horizontaler und vertikaler Ebene bestimmen will.

Eine bei der Bestimmung erhaltene Beobachtungsreihe mag hier in extenso wiedergegeben werden, um die Güte des Instruments beurteilen zu können. Es ergab sich, am 26:ten März:

	v_1	v_2
	513.9	469.2
	513.8	469.1
	513.8	469.2
	513.7	469.2
	513.9	469.3
	514.0	469.5
	514.0	469.5
	513.9	469.4
	514.1	469.7
	514.0	469.7
Mittel	513.91	469.38,

somit $v_1 - v_2 = 44.53$. Eine neue Reihe ergab den fast identischen Wert $v_1 - v_2 = 44.54$; zwischen beiden liegt die Bestimmung von $n_1 - n_2 = 29.90$. Ein von Reibung herrührender Fehler scheint somit gar nicht vorhanden zu sein. Mit einem stärkeren Magnetstabe erhielt ich am folgenden Tage in derselben Weise $v_1 - v_2 = 199.26$; $n_1 - n_2 = 132.65$. Nimmt man $H = 0.1618$ an, so giebt die erstere Bestimmung $\delta V = 10^{-5} . 2.14\, v$; die letztere $\delta V = 10^{-5} . 2.12\, v$, oder im Mittel $\delta V = 10^{-5} . 2.13\, v$. Da bei der letzteren die Ablenkungen etwas grösser waren, wurde vorerst eine kleine Korrektion $-\frac{1}{4}\varepsilon_1^2 (v_1 - v_2)^3$; bez. $-\frac{1}{4}\sin^2\varepsilon (n_1 - n_2)^3$ angebracht um die Ablesungen der Tangente des Winkels proportional zu machen. Die grössere dieser Korrektionen beträgt übrigens nur -0.08 Skalateile. In gleicher Weise erhält man ferner im Mittel $\frac{\delta V}{V} = 0.0000457\, v$.

Um die Temperaturkorrektion des nicht kompensierten Instrumentes zu bestimmen, wurde die Kupferhülle mit einem langen Bleirohre

spiralförmig umwunden, eine freilich etwas schwierige Operation. Vermittelst entsprechender Kautschukligaturen, eines Y-förmigen Glasrohres und zweier langen geraden Glasröhren konnte das Bleirohr abwechselnd mit einem kupfernen Behälter mit eiskaltem Wasser, welchem Kochsalz zugesetzt wurde um Eisbildung zu verhindern, und einer Glasretorte zum Kochen vereinigt werden. Vor der eigentlichen Bestimmung wurde mehrere Stunden lang ein Strom Wasserdampf durch die Röhre geleitet um durch die Erwärmung einen konstanten Magnetisierungszustand herzustellen, wobei dann, wie vorauszusehen war, eine ziemlich beträchtliche Abnahme des Moments stattfand. — Natürlich ging diese Bestimmung die der Empfindlichkeitskonstante voraus, obwohl ich sie des Zusammenhangs wegen erst hier beschreibe. Nach der Abkühlung des Apparats wurde nun ein kurzer Stoss Wasserdampf durch die Rohrleitung getrieben. Dann stieg das Thermometer allmählich auf ein Maximum, welches jedoch, wie die Ablesungen im Fernrohr zeigten, etwas früher erreicht wurde als die Maximitemperatur des Magnets. Da aber die Temperatur des Magnets nicht gern höher steigen konnte als die gleichzeitige Temperatur im innern des Instruments, habe ich die kleinsten Ablesungen der Skala mit den gleichzeitigen des Thermometers zusammengestellt. Nachher wurde ein neuer Strom Wasserdampf durch die Röhre getrieben, und so fort, bis zuletzt, bei den vollständigsten Reihen, der Apparat von neuem durch kaltes Wasser abgekühlt wurde. Der Kontrolle wegen wurde die letzte Beobachtungsreihe etwas anders ausgeführt, in so fern als ich schwach erwärmtes Wasser anstatt des Wasserdampfes durch die Röhre strömen liess; die genaue Übereinstimmung mit den vorigen Reihen beweist die Zulässigkeit meiner Annahme über die Temperaturvariation im innern des Apparats.

Tafel der Bestimmung der Temperaturkorrektion.

Dat.	Stunde	v	t	$\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1}$
März 22	$14^h\,34^m$	534.30	$0^0.02$	5.95
» »	14 55	462.96	$12^0.00$	—
» »	16 50	541.73	$-\ 0^0.07$	6.17
» »	17 17	459.93	$13^0.18$	6.31
» »	17 39	381.28	$25^0.35$	—
» 23	11 4	540.12	$-\ 1^0.86$	—
» »	11 30	501.74	$4^0.51$	6.02
» »	11 58	464.78	$9^0.95$	6.30
» »	12 20	401.76	$19^0.92$	6.31
» »	12 40	345.32	$28^0.76$	6.33
» »	14 5	532.58	$-\ 0^0.62$	—
» 25	10 45	513.12	$0^0.62$	—
» »	11 8	480.87	$6^0.10$	5.88
» »	11 36	443.42	$11^0.92$	6.11
» »	11 59	373.58	$22^0.65$	6.30
» »	13 16	508.63	$1^0.13$	—

Die Abweichung von der früheren Gleichgewichtslage in der letzten Reihe rührt davon her, dass ein Magnet in vertikaler Lage dem Instrumente etwas zu nahe stand. Schliesst man die erste Bestimmung aus und werden die übrigen nach zunehmender Temperatur geordnet unter Zusammenführung nahestehender Werte, so erhält man:

t_1	t_2	$\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1}$ beob.	$\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1}$ ber.	Δ
— 0.62	5.31	5.95	6.02	— 0.07
— 0.14	11.68	6.19	6.11	0.08
— 0.14	22.64	6.31	6.28	0.03
— 1.24	28.76	6.33	6.37	— 0.04

Da die niedrigen Temperaturen einander nahezu gleich sind, habe ich in der vorletzten Kolumne $\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1}$ als Funktion der höheren Temperatur t_2 berechnet, nach der Formel:

$$\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1} = 5.934 + 0.0153\, t_2 \ .$$

In dieser Gleichung kann aber ohne merkbaren Fehler

$$\frac{v_1 - v_2}{t_2 - t_1} = \frac{v_0 - v_t}{t}$$

geschrieben werden, weil t_1 nur wenig von Null abweicht, und es ist mithin

$$v_0 = v_t + 5.934\, t + 0.0153\, t^2 \ .$$

Wählt man auch bei diesem Instrumente wie beim Horizontalvariometer zur Normaltemperatur 15° C., so bekommt man:

$$v_{15} = v_t + 5.934\,(t - 15) + 0.0153\,(t^2 - 15^2) \ ,$$

nach welcher Relation ich eine Reduktionstafel berechnete. Die vollständige Variationsformel wird folglich:

$$(3) \qquad \delta V = 10^{-5} \,.\, 2.13\,\{v + 5.934\,(t - 15) + 0.0153\,(t^2 - 15^2)\} \ .$$

Die Temperaturkorrektion ist wie man sieht sehr beträchtlich, da eine Änderung der Temperatur um 1° einer Variation von etwa 6 Skalateilen entspricht. Um eine der Skalenablesung entsprechende Genauigkeit zu erreichen, wäre es somit nötig die Temperatur bis auf $\frac{1}{60}$ Grad anzugeben, was unmöglich ist, da das angewandte Thermometer wohl ein sehr gutes ist (von Ådermann in Stockholm) aber klein und nur in ganze Grade geteilt. Vermittelst eines stark vergrössernden Ablesefernrohrs habe ich versucht die Temperatur bis auf 0°.05 abzuschätzen, was aber noch einen Fehler von 0.3 Skalateilen oder $10^{-5} \,.\, 0.6$ C. G. S. entspricht. Will man eine kleinere Fehlergrenze erreichen, so muss das Instrument mit einer Kompensationsvorrichtung versehen werden, etwa nach der Art eines Martinschen Pendelkompensators. Das Moment der nötigen *relativen* Verschiebung δs einer Masse p für 1° Temperaturänderung berechnet sich leicht, wenn man beachtet, dass es dem Momente $\mu \delta V$ einer Variation von 6 Skalateilen gleich sein muss; mithin

$$p \,.\, g \,.\, \delta s = \mu \delta V = \mu \,.\, 10^{-5} \,.\, 2.13 \,.\, 6 = 10^{-4} \,.\, 1.278\, \mu \ .$$

Wenn die Masse p durch Schrauben beweglich ist, wird es möglich sein, durch Versuche eine vollständige Kompensation zu erlangen, wenigstens wenn man vom quadratischen Korrektionsgliede absieht. Da mir aber

die Mittel zur Herstellung einer derartigen Kompensation nicht zur Verfügung standen, habe ich auch keine Bestimmung des μ vorgenommen.

Nach Gleichung (2) hat man, mit Einführung der gefundenen Zahlenwerte:

$$\frac{\delta V}{V} + \frac{\delta \mu}{\mu} - \frac{\delta a}{a} = 0.0000457\,(v + 5.934\,t + 0.0153\,t^2)\ ,$$

und somit, wenn α und β den mittleren Temperaturkoefficienten des Magnets, bez. den mittleren Ausdehnungskoefficienten des Stahls zwischen 0^0 und t^0 bezeichnen:

$$\alpha + \beta = 10^{-4} \,.\, 2.71 + 10^{-7} \,.\, 7.0\,t\ .$$

Nach Fizeaus Untersuchungen[1]) ist aber für gehärteten französischen Gussstahl:

der mittlere Ausdehnungskoefficient zwischen 0^0 und $40^0 = 10^{-5} \,.\, 1.322$,
» » » » 0^0 » $50^0 = 10^{-5} \,.\, 1.362$,

mithin

$$\beta = 10^{-5} \,.\, 1.162 + 10^{-8} \,.\, 4\,t\ .$$

Nimmt man an, dass die beiden Stahlsorten dieselben thermischen Eigenschaften besitzen, was freilich nur approximativ richtig sein kann, hier aber keinen wesentlichen Fehler mit sich bringt, so ergiebt sich:

$$\alpha = 10^{-4} \,.\, 2.59 + 10^{-7} \,.\, 6.6\,t\ .$$

Obschon die Temperaturkorrektion des Instruments sehr gross ist, besitzt somit der Temperaturkoefficient des Magnets nur eine mittlere Grösse.

In der Gleichung (2) ändert sich aber μ nicht nur mit der Temperatur, sondern auch infolge Variationen der inducierenden Kraft; das heisst, es ist noch ein Korrektionsglied

$$\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial H_1}\,.\,\delta H_1$$

hinzuzufügen, wo $\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial \mu}{\partial H_1}$ dem Lamontschen Induktionskoefficient gleich kommt. Bestimmungen desselben habe ich nicht vorgenommen; setzt man ihn aber $= 0.01$ C. G. S., welcher Wert wahrscheinlich eher zu

1) *Comptes Rendus* **68** p. 1125 (1869).

gross als zu klein ist, so ergiebt sich der Wert, den δH_1 nicht überschreiten darf, damit nicht der Fehler grösser als 0.3 Skalateile werde, aus der Gleichung:

$$0.01\,\delta H_1 = 0.0000457\,.\,0.3$$
$$\therefore\ \delta H_1 = 0.00137\ .$$

Man kann somit die besprochene Fehlerquelle meistenteils ohne Bedenken vernachlässigen.

Es mögen nun hier einige von mir angestellten Variationsablesungen Platz finden, welche von dem regulären Gang der drei Elementen während der Tageszeit wenigstens einen angenäherten Bild geben. Die Ablesungen am Deklinations- und Horizontalintensitäts-Variometer sind bezw. mit n und n' bezeichnet; an den letzteren ist die Temperaturkorrektion $-1.37\,(t-15)$ angebracht. Die Temperaturkorrektion der Wage ist der oben erwähnten Tafel entnommen.

Variationsablesungen im magnetischen Observatorium zu Upsala.

Dat.	Stunde	n	$n'-n$	v	Dat.	Stunde	n	$n'-n$	v
März 29	$9^h\ 0^m$	187.4	142.2	420.0	April 1	$12^h\ 15^m$	201.4	145.7	412.2
» »	10 0	89 1	38.7	17.6	» »	13 58	05.3	51.9	17.5
» »	11 0	92.9	35.7	14.8	» 2	8 3	188.0	57.9	13.3
» »	12 5	97.2	38.7	13.7	» »	8 58	90.0	48.5	12.9
» »	13 5	201.9	42.5	15.1	» »	10 0	92.2	43.7	12.0
» »	14 0	04.4	44.9	19.5	» »	10 55	95.6	40.9	12.1
» »	14 51	03.1	48.8	23.3	» »	13 2	96.5	37.7	15.0
» »	16 12	198.2	50.2	22.0	» »	14 55	94.1	51.7	20.2
» »	17 0	95.5	57.9	26.3	» »	16 58	90 0	57.9	18.1
» »	18 0	77.9	56.7	32.1	» »	18 30	90.9	56.8	17.0
» 30	12 15	98.9	35.3	13.8	» 3	9 0	95.3	52.2	11.7
» »	13 2	201.0	43.3	15.2	» »	12 25	99.0	49.8	14.4
» »	18 30	190.6	55.5	21.3	» »	16 17	93.7	59.1	19.0
» 31	5 45	88.1	54.3	18.3	» 4	6 31	87.0	54.8	15.1
» »	10 3	88.8	40.3	16.2	» »	8 56	88.0	48.0	14.8
» »	11 0	92.1	36.7	13.3	» »	10 2	91.3	44.6	13.9
» »	12 1	97.6	39.9	12.5	» »	11 0	94.3	43.3	12.5
» »	13 0	99.1	45.3	14.3	» »	11 55	99.2	44.3	11.9
» »	14 1	200.8	48.4	13.5	» »	13 6	200.0	48.0	13.7
» »	15 7	197.9	48.3	17.4	» »	14 1	199.7	51.7	14.8
» »	16 47	93.4	59.5	20.2	» »	14 55	97.8	54.6	16.1
» »	18 0	93.1	55.8	19.0	» »	16 12	92.8	54.2	16.5
April 1	9 1	89.3	45 9	14.7	» »	17 0	90.9	54.7	17.0
» »	9 56	91.0	43.7	12.8	» »	18 27	182.2	154.0	420.6

Von den Ablesungen der gleichen Stunden wurden nun die Mittel genommen; dieselben zu absoluten Werten reduciert und schliesslich als Differenzen vom Tagesmittel angegeben. Die Reduktionsformeln mögen hier zusammengestellt werden (n. b. die Temperaturkorrektionen schon erledigt):

$$\delta D' = 0'.677\, n\,;$$
$$\delta H = 10^{-5}.2{\cdot}05\,(n' - n)\,;$$
$$\delta V = 10^{-5}.2{\cdot}13\, v\,;$$

schliesslich hat man zur Berechnung der Inklinationsvariationen, δi, in Minuten:

$$\frac{2 \sin 1'\,.\,\delta i}{\sin 2\, i} = \frac{\delta V}{V} - \frac{\delta H}{H}\,,$$

oder nach Einsetzung der bezüglichen Zahlenkoefficienten:

$$\delta i = 0.049\, v - 0.135\,(n' - n)\,.$$

Es mag dabei bemerkt werden, dass, da die Variationen der Vertikalintensität viel kleiner sind als die der Horizontalintensität und daneben mit einem, in höheren Breiten, viel kleineren Faktor multipliciert werden, die Wage in der That nur ein Korrektionsglied bei der Berechnung der Inklinationsvariationen liefert. Dieser Umstand ist freilich für die Auswertung der Inklinationsvariationen günstig, wird aber andererseits dadurch nachteilig, dass er die Bestimmung des Nullpunkts der Wage vermittelst eines Inklinatoriums, wäre es auch das allerbeste, völlig illusorisch macht.

Tafel der Tagesvariation der magnetischen Elemente. April 1.0 1889.

Stunde	$\delta D'$	$10^5 . \delta H$	$10^5 . \delta V$	δi
$5^h 45^m$	— 3.4	8.9	3.8	— 0.50
6 31	— 4 1	9.9	— 3.0	— 0.73
8 3	— 3.5	16.3	— 6.8	— 1.23
8 59	— 2.1	— 5.2	— 3.6	0.26
10 0	— 1.8	— 15.9	— 4.3	0.95
10 59	0.4	— 22.0	— 7.0	1.29
12 9	3.9	— 15.7	— 6.2	0.87
13 3	4.5	— 13.4	— 3.8	0.80
14 0	6.4	— 1.5	— 0.4	0.09
14 57	3.5	1.9	5.7	0.01
16 14	1.2	9.3	5.7	— 0.48
16 56	— 0.4	15.5	8.3	— 0.83
18 18	— 4.2	12.0	11.7	— 0.52

Das Tagesmittel der Horizontalintensität entsprach der Ablesung $n' - n = 150.0$. Am 24 und 25 April machte ich eine Intentitätsbestimmung mit dem »Eugenie-Apparate», Magnet B_4, wobei sich ergab $H_{130} = 0.16149$; somit $H_{150} = 0.16190$. Am 13 und 14 Februar hatte ich eine Bestimmung mit demselben Magnet auf demselben Abstande (0.7 engl. Fuss) gemacht, nach der $H_{130} = 0.16152$; die Aufstellung der Lloydschen Wage scheint somit die übrigen Instrumente nicht in merkbarer Weise beeinflusst zu haben.

Wenn man von der einzelnen Ablesung $8^h 3^m$, bei der offenbar Horizontalintensität und Inklination schwach perturbiert waren, absieht, so findet man als Tagesamplitude der Inklination am 1 April 2′.12. Nach Hansteens älteren Bestimmungen[1]) wäre die Amplitude für März = 0′.97; für April = 2′.19; Mittel = 1′.58. Die Übereinstimmung wird eine gute, wenn man bedenkt, dass mit Hansteens Beobachtungsmethode (absolute Inklinationsmessungen Vor- und Nach-mittags) die Amplitude notwendig ein wenig zu klein ausfallen muss.

Am 2 Mai nahm ich einige Inklinationsmessungen mit dem Inklinatorium Dover N:o 60 unter gleichzeitigen Variationsablesungen vor. Da indessen das Chlorcalcium der Lloydschen Wage so sehr ausgeschwollen war, dass die Bewegung des Magnets gehemmt wurde, so musste derselbe vorerst demontiert und neu justiert werden, was den Nullpunkt natürlich etwas änderte.

Inklinationsbestimmungen im magnetischen Observatorium am 2. Mai.

Stunde	i	$n' - n$	v	i_m	Nadel
$10^h 45^m$	70° 52′.4	143.6	417.4	70° 51′.0	1
11 50	50.4	144.8	415.7	49.3	1
13 58	51.8	156.1	418.5	52.0	2
17 4	50.0	163.1	423.0	51.0	1
18 5	50.4	165.6	423.0	51.7	1

Die in der vorletzten Kolumne angeführten Werte sind zum Mittel der Variationsablesungen reduciert. Die abweichende zweite Bestimmung muss wohl mit irgend einem Fehler behaftet sein; wird dieselbe ausgeschlossen, so erhält man im Mittel $i = 70°51′.4$.

1) Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps-Akad. Handl. Jahrg. XVI, 1859.

Satzfehler:

S. 3 Z. 4 v. o. muss stehen $0{,}00004114$ statt $0{,}004114$

KONSTANTENBESTIMMUNG

MIT EINEM LAMONTSCHEN THEODOLIT

VON

E. SOLANDER.

(Mitgetheilt der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Upsala am 17 Mai 1890).

UPSALA, 1891,
DRUCK DER AKADEMISCHEN BUCHDRUCKEREI,
EDV. BERLING.

Ein grosser magnetischer Theodolit von Lamonts Konstruktion [1]) für absolute Intensitätsmessungen findet sich im hiesigen magnetischen Observatorium; demselben waren vier Magnete mitgegeben, zwei von 20 und zwei von 15 cm. Länge. Um aber beim grossen Theodolit, wie bei seinem Reiseapparate dieselben Magnete verwenden zu können, hat Herr Prof. Thalén seine Konstantenbestimmungen mit den dem letztern zugehörigen Magneten gemacht [2]), und so kommt es, dass die genannten vier Magnete bis jetzt ohne Anwendung geblieben sind. Um dieselben von einander zu unterscheiden, habe ich an der Mitte mit Salpetersäure vermittels eines Glasstifts die Ziffern 1—4 eingeätzt und sodann mit dem langen Magnet N:o 1 vollständige Konstantenbestimmungen vorgenommen.

1. **Ermittelung des Temperaturkoefficienten.** Um zunächst den Temperaturkoefficienten zu bestimmen, versuchte ich zuerst ein dem Weberschen sehr ähnliches Verfahren anzuwenden, indem ich die Nadel eines Theodolits mit einem der übrigen Magnete als Hilfsmagnet um 90^0 ablenkte — die Lage, wo das Gleichgewicht der Nadel eben aufhörte stabil zu sein, schien mit grosser Genauigkeit bestimmt werden zu können — und sie dann mit N:o 1 in den Meridian zurück führte, worauf, während der Hilfsmagnet fortwährend in Eis eingebettet blieb, der Magnet N:o 1 abwechselnd mit Eis und mit warmem Wasser umgeben wurde. Der so erhaltene Temperaturkoefficient, $\alpha = 0.000293$, erwies sich aber mit den folgenden Schwingungs- und Ablenkungsbeobachtungen unvereinbar; vielleicht, weil der grosse Magnet viel später, als ich vermuten konnte, eine gleichmässige Temperatur annimmt. Da es mir aber nach vollzogener Konstantenbestimmung kaum ratsam erschien den Magnet den

1) S. Annalen d. K. Sternwarte in München, Suppl. B. IV.

2) R. Thalén: Jordmagnetiska bestämningar i Sverige under åren 1869—1871. Sv. Vetenskaps-Akademiens Handl. B. 10 N:o 12 (1872).

Eventualitäten einer neuen Bestimmung des Temperaturkoefficienten in der gewöhnlichen Weise auszusetzen, wobei wenigstens eine beträchtliche Verminderung des Moments stattfindet, so versuchte ich denselben aus den Ablenkungsversuchen am kürzesten Abstande zu bestimmen. Die Schwingungsversuche eignen sich nicht dazu, wie man bald sehen wird. Vorläufig musste aber nun untersucht werden, ob der Temperaturkoefficient des Horizontalvariometers genau genug bekannt ist, weil die Temperaturvariationen des Variometers denen des Theodolits natürlich ziemlich gleich sind [1]). Zu dieser Untersuchung eignen sich die mit den Schwingungsbeobachtungen gleichzeitigen Variationsablesungen am besten; bei den Ablenkungen werden die Nadeln der Variationsapparate, in Folge der wechselnden Lage des grossen Ablenkungsmagnets, in variierender Weise beeinflusst. Zunächst wurden, um die tägliche Variation zu eliminieren, die oben genannten Variationsbeobachtungen mit dem Temperaturfaktor $-1.37\,(t-15)$ reduciert in 6 Gruppen nach der Tageszeit geordnet, wobei erhalten wurde:

Tagesvariation der Horizontalintensität, Sept. 1889.

Stunde	$n'-n$ (beob.)	$n'-n$ (Curve)
$9^h\ 1^m$	150.5	150.5
10 16	147.5	147.2
11 11	144.8	145.4
12 37	150.5	149.4
13 57	152.1	152.9
15 4	155.7	155.7

Die Zahlen der letzten Kolumne sind einer mit Hülfe der vorletzten gezeichneten kontinuierlichen Curve entnommen, nach der die einzelnen Ablesungen nunmehr auf dieselbe Tageszeit reduciert wurden. Stellt man die so erhaltenen Werte in Gruppen nach der Temperatur zusammen, so bekommt man:

Temp.	$n'-n$
$8.^0 15$	150.9
9. 50	148.1
11. 47	149.1
13. 76	149.2
14. 23	152.1
15. 13	148.0

1) Die Deflektormagnete des Horizontalvariometers sind nicht kompensiert.

Die übrig gebliebenen Divergenzen sind von der Temperatur unabhängig, und daher nehme ich an, dass der früher gefundene Temperaturkoefficient der richtige ist. Sodann habe ich die zu demselben Teilstriche des Variometers reducierten Bestimmungen von *log sin* φ, wobei φ der Ablenkungswinkel am kürzesten Abstande, als lineare Funktion der Temperatur berechnet, wie folgt [1]):

Dat.	t	log sin φ (beob.)	log sin φ (ber.)	Δ (in Einh. d. letzt. Dec.)	$n'-n$
Sept. 17	$9^0.5$	9.796379	9.796232	147	146.6
» 18	13 .2	6132	5878	254	151.7
19	13 .5	5854	5849	5	144.5
» 21	12 .0	6056	5993	63	147.7
» 23	11 .25	6087	6064	23	145.0
» 24	10 .55	6254	6131	123	137.3
» 27	11 .7	5836	6021	− 185	138.0
» 30	10 .35	6012	6151	− 139	142.2
» 30	10 .65	5993	6122	− 129	143.9
Okt. 3	13 .3	5708	5868	− 160	145.2

Die erhaltene Formel war:

$$\log \sin \varphi = 9.769031 - 10^{-6} \cdot 95.7\,(t - 11.6)\,;$$

durch dieselbe bekommt man:

$$10^{-6} \cdot 95.7 = \text{Mod}\ (\alpha + 3\,m)\,,$$

wo m den Ausdehnungskoefficienten des Messings bezeichnet, und somit $\alpha = 0.000164$.

Vom 27 Sept. ab scheint ein plötzliches Sinken der Differenzen Δ eingetreten zu sein. Es ist möglich, dass dies davon kommt, dass ich am vorhergehenden Tage, nach Beendigung der Beobachtungen, die Schrauben, mit denen der Magnet an seinem Schlitten befestigt wird, etwas fester zuzog, wodurch das Moment ein wenig geändert werden konnte. Da überdies eine Abhängigkeit der Differenzen Δ von den Variationsablesungen noch vorhanden zu sein schien, so glaubte ich eine eingehendere Untersuchung hierüber nötig zu haben. Diese habe ich dadurch zu erlangen versucht, dass ich den Theodolit als empfindlichen

1) Das hier wie im folgenden benutzte Thermometer, von Aderman in Stockholm, war an einem daran befestigten Bleistreifen mit N:o 3 gemerkt; dessen Nullpunktskorrektion wurde gleich $-0^0.25$ gefunden.

Horizontalvariometer mit 62°29′ Ablenkungswinkel aufstellte, vergleichende Ablesungen am Variometer machte und die um Deklinationsvariationen korrigierten Ablesungen v des Theodolits als Funktion der Variation $(n' - n)_{15}$ und der Temperatur berechnete.

Aus 30 Vergleichsbeobachtungen bekam ich in dieser Weise die Formel:

$$v = 84°42'.76 + 0.692\,(n' - n - 149.25) + 1.36\,(t - 9°.21).$$

Der Temperaturkoefficient, α, ergiebt sich nunmehr aus:

$$1.36 = \frac{\operatorname{tg} 62°29'}{\sin 1'}\,(\alpha + 3m)$$

zu 0.000150. Stellt man diesen Wert mit dem aus den Ablenkungsbeobachtungen berechneten zusammen, so wird im Mittel $\alpha = 0.000157$. Als definitive Korrektionsgleichungen erhält man alsdann:

$$\Delta_t \log \sin \varphi = 10^{-6} \,.\, 92.4\ (t - 15)$$

$$\Delta_t \log T = -\frac{Mod}{2}\,(\alpha + 2s)(t - 15) = -10^{-6} \,.\, 38.9\,(t - 15)\ ,$$

wo s der Ausdehnungskoefficient des Stahls ist. Bei Schwingungen mit Belastung erleidet die letztere Korrektion eine Änderung, η, die folgendermassen gefunden wird. Bezeichnet K das Trägheitsmoment des Magnets (mit Aufhängevorrichtung), R das der Belastung, T_1 die Schwingungsdauer des belasteten Magnets, γ und γ_1 Torsionskoefficienten bei unbelastetem, bezw. belastetem Stabe, so ist:

$$MH(1 + \gamma) = \frac{\pi^2 K}{T^2}\ ,$$

$$MH(1 + \gamma_1) = \frac{\pi^2 (K + R)}{T_1^2}\ ,$$

und somit, wenn nach der Temperatur variiert wird:

$$\frac{\delta_t M}{M} + 2\,\frac{\delta T_1}{T_1} = \frac{\delta K + \delta R}{K + R} = \frac{K}{K + R} \cdot \frac{\delta K}{K} + \frac{R}{K + R} \cdot \frac{\delta R}{R}\ ,$$

folglich:

$$\Delta_t \log T_1 = -\frac{Mod}{2}\,[2as + 2(1 - a)m + \alpha]\,(t - 15)\ ,$$

woraus

$$\eta = -\,Mod\,(1-a)\,(m-s)\,(t-15)\ ,$$

wo zur Abkürzung:

$$a = \frac{K}{K+R} = \frac{T^2(1+\gamma)}{T_1^2(1+\gamma_1)}$$

gesetzt wurde. Bei Belastung mit den Lamontschen Ringen war $\eta = -10^{-6}.3{\cdot}2$, somit $\Delta_t \log T_1 = -10^{-6}.42{\cdot}1(t-15)$. Für den Ring L (siehe unten) wird dagegen $\eta = -10^{-6}.2{\cdot}4$; somit $\Delta_t \log T_L = -10^{-6}.41{\cdot}3(t-15)$. — Die Grösse η ist natürlich dadurch von einiger Bedeutung, dass sie die Reduktion zur Normaltemperatur repräsentiert; für den übrigen Teil des Reduktionsfaktors kommt nur die Differenz der Temperatur bei Schwingungen mit und ohne Belastung in Betracht. — Ferner ergiebt sich:

$$\Delta_H \log \sin\varphi = Mod\,.\,\frac{\delta H}{H} = Mod\,.\,\frac{\sin 1'}{\operatorname{tg} 62^\circ 29'}\,.\,0.692(n'-n) = 10^{-6}.45{\cdot}5(n-n)\,.$$

Der vorher angewandte Wert, den ich im Herbste 1888 in der gewönlichen von LAMONT angegebenen Weise bestimmt hatte, war $10^{-6}.55{\cdot}0(n'-n)$. Die Differenz ist offenbar zu gross, um durch Beobachtungsfehler erklärt werden zu können; bekanntlich wird aber auch beim Lamontschen Verfahren die schwer zu erfüllende Voraussetzung gemacht, dass die Schiene des Horizontalvariometers auf der Nadel genau senkrecht stehe. (Vergl. jedoch hierüber am Schlusse des vorliegenden Aufsatzes, wo eine Bestimmung der Empfindlichkeitskonstante nach der Börgenschen Methode erwähnt wird).

2. **Bestimmung des Trägheitsmoments.** Zu diesem Zwecke waren dem Apparate zwei Messingringe mitgegeben, der eine durch einen Doppelstrich, der andere durch zwei entferntere Striche gemerkt. Ich bezeichne den erstern als N:o 1, den zweiten als N:o 2. Ein paar mal wurde noch ein dritter kleinerer, in Upsala verfertigter Ring, angewandt, den ich zur Unterscheidung mit L bezeichne; ähnliche Bezeichnungen als Indices wende ich für die die Ringe betreffenden Grössen an. Die Ausmessung der äusseren und inneren Diameter D und d geschah mit einer Teilmaschine, die mit einem Normalmaasstab verglichen wurde, und ergab bei 15° Temperatur:

$$D_1 = 19^{cm}.9758 \pm 0.0010\ ,$$

$$d_1 = 17.8172 \pm 0.0012\ ,$$

$$D_2 = 19.^{cm}9316 \pm 0.0016 ,$$
$$d_2 = 17.8589 \pm 0.0014 ,$$
$$D_L = 11.8045 \pm 0.0003 ,$$
$$d_L = 6.9985 \pm 0.0005 ;$$

die verificierte Teilmaschine als richtig vorausgesetzt. Der Grund der ziemlich beträchtlichen wahrscheinlichen Fehler bei den Lamontschen Ringen liegt darin, dass dieselben unregelmässig geformt sind. Ich mass daher auf jeder Seite die Diameter in vier je um 45° von einander verschiedenen Lagen und glaubte bei der Berechnung die Ringe als elliptisch ansehen zu können, was aber, wie es sich ergab, nicht gestattet ist. Bezeichnen nämlich $\varrho_1 \varrho_2$ und $\varrho'_1 \varrho'_2$ zwei Paare zu einander senkrechte Radii Vektores, so müsste sein:

$$\frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_2^2} = \frac{1}{\varrho'^2_1} + \frac{1}{\varrho'^2_2} ,$$

welche Bedingung aber nicht erfüllt war. Es blieb dann nichts übrig als das Mittel aller Messungen als wahrscheinlichsten Wert der Diameter anzusehen. Jede Messung wurde übrigens zweimal vorgenommen, so dass das Mittel aus 16 Einzelmessungen entstand. Den wahrscheinlichen Fehler hätte man wohl durch Ausmessung noch mehrerer Diameter verringern können; ob aber dadurch irgend ein realer Vorteil entstanden wäre, ist zweifelhaft. Die Centrierung wurde dadurch erlangt, dass aus Papier ein Kreis vom Durchmesser D ausgeschnitten, derselbe auf den Ring aufgelegt und auf dessen Mittelpunkt eingestellt wurde. Der Einfluss ΔD eines eventuellen Centrierungsfehlers ε, nämlich

$$\Delta D = \frac{2\varepsilon^2}{D} ,$$

wird in dieser Weise verschwindend klein. Um zu sehen, wie gross der Einfluss der wahrscheinlichen Fehler, δD und δd, der Diametermessungen auf das Endresultat ist, hat man die Grösse zu berechnen:

$$\delta \log K = \delta \log R = \pm \frac{2 \,.\, Mod}{D^2 + d^2} \sqrt{(D\,\delta D)^2 + (d\,\delta d)^2} \text{ [1]} .$$

1) Die Berechnungen sind durchgängig so angestellt, dass für $\log H$ der wahrscheinlichste Wert erhalten wird. Dadurch wird der wahrscheinliche Fehler von H selbst dem H proportional; denkt man sich also das Instrument in höhere Breiten versetzt, wo die Bestimmung ungenauer sein muss, so wird der Einfluss des Konstantenfehlers hingegen verringert.

Für den unregelmässigsten Ring N:o 2 ergiebt sich in dieser Weise

$$\delta \log R = \pm 0.000049 \ .$$

Der Ring L, bei dem auf beiden Seiten nur zwei zu einander senkrechte Diameter gemessen wurden, war wie man sieht, viel regelmässiger als die Lamontschen geformt.

Die Wägung mit verificiertem Gewichtssatze ergab für die Masse folgende Werte:

$$P_1 = 605^{gr}363 \pm 0.0011 \text{ (5 Wägungen)}$$

$$P_2 = 611.719 \pm 0.0019 \text{ (7 »)}$$

$$P_L = 265.9958 \ .$$

Infolge der Grösse der Lamontschen Ringe konnte beim Abwiegen derselben keine sehr empfindliche Wage angewandt werden. Zur Kontrole wurde noch die Differenz $P_2 - P_1$ bestimmt, nach folgendem leichtverständlichem Schema:

$$(P_1 + p)a = P_2 b \ ,$$

$$P_2 a = (P_1 + \tau)b \ ,$$

$$p' a = \tau b \ ,$$

wo p und p' aufgelegte Gewichtsstücke, τ dagegen Tara bezeichnen und a und b die Länge der Hebelarme sind. (N. b. bei der letzten Wägung beide Ringe weggenommen). Durch Elimination von τ, a und b und Vereinfachungen erhält man:

$$P_2 - P_1 = \frac{p + p'}{2 + \frac{p - p'}{P_1 + P_2}} \ ,$$

wo aber das letzte Glied im Nenner vernachlässigt werden kann. Als Resultat eines dreimaligen Abwiegens ergab sich:

$$P_2 - P_1 = 6^{gr}356 \ ,$$

somit dieselbe Differenz, wie aus den obigen Zahlen. Der Ring L wurde auf einer viel empfindlicheren Wage gewogen, wo die grösste Differenz des dreimaligen Abwiegens 0.2 mgr betrug. Der Einfluss der Fehler beim Wiegen auf das Endresultat wird übrigens verschwindend klein.

Aus obigen Angaben erhält man die bezüglichen Trägheitsmomente:

$$\log R_1 = 4.734132 ,$$

$$\log R_2 = 4.738501 ,$$

$$\log R_L = 3.796694 .$$

Bei den Schwingungsversuchen wurde ein grosser Holzkasten von 28 cm Länge, 27 cm Breite, 145 cm Höhe, mit einem Glasrohre von 120 cm Höhe, inklusive Fassungen, angewandt, dessen Seitenflächen abgeschraubt werden konnten, an dessen Vorderfläche ein Planglas befestigt wurde. Die Schwingungsdauer wurde jedesmal durch 3 bis 4 Reihen von je 10 Durchgängen bestimmt; zwischen diesen Reihen fallen bei unbelastetem Magnet im allgemeinen 100, bei belastetem 50 Schwingungen. Die Beobachtung geschah vermittelst Fernrohrs und Holzskala, dessen Entfernung vom Magnetspiegel 1707.5 Skalateile betrug; somit der Winkelwert eines Skalateils $1'.007 = 0^0.0168$. Wird durch Drehung des Magnets oder des am obern Ende des Glasrohrs befindlichen Torsionskreises die Spiegelnormale um h Skalateile — wenn nötig zu unendlich kleinen Bogen reduciert — abgelenkt, so wird somit die Torsionskorrektion:

$$\frac{1}{2} \log (1 + \gamma) = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{0.0168\, h}{360 - 0.0168\, h} \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{360}{360 - 0.0168\, h} \right) ,$$

nach welcher Gleichung eine Korrektionstafel berechnet wurde. Um die Horizontalität der Ringe zu verificieren, wurden im Schwingungskasten zwei Holztischchen mit Schraubenfüssen eingestellt und nivelliert; beim Hinaufschrauben des Aufhängefadens wurde darauf geachtet, dass der Ring die Tische in paralleler Lage verliess. Am 9 Sept. wurde konstatiert dass es bei der Torsionsbestimmung gleichgiltig war, ob man den Faden um 360° oder 180° oder nur 90° drehte; es berechnete sich nämlich, bei belastetem Stab, aus 360° Torsion $h = 218.6$; aus 180° $h = 219.6$; aus 90° $h = 217.2$. Grössere Abweichungen wurden im Nov. erhalten, da die Drehung um 90° ein einige Skalateile grösseres h ergab, sowohl bei belastetem als bei unbelastetem Magnet (das Mittel wurde zur Reduktion angewandt). Im April 1890 fand sich sogar für 180° Drehung ein sehr ausgeprägtes Maximum, so dass die erste Aufhängung exceptionell glücklich gewesen zu sein scheint.

Schwingungsbeobachtungen zur Bestimmung des Trägheitsmoments.

Dat.	Stunde	Ring	100 T	h	$n'-n$	t	log T red	log K
Sept. 4	$11^h\ 7^m$	o	779.^{s}200	63.4	146.5	15.^{o}9	0.892178	
» »	14 2	2	3789.45	233.3	150.2	16.2	1.580908	3.379645
» 5	10 40	o	779.298	61.5	143.5	14.25	0.892210	
» »	13 0	2	3787.54	245.3	153.6	14.7	1.580947	9584
» »	15 30	o	778.723	58.7	157.8	14.8	0.892166	
» 6	10 41	2	3788.66	234.8	153.5	14.3	1.580988	9511
» »	13 10	o	778.923	58.1	154.9	15.1	0.892194	
» »	14 44	1	3771.14	225.8	156.0	15.5	1.578889	9524
» 7	9 13	o	778.983	58.3	151.6	13.9	0.892200	
» »	11 21	1	3772.28	226.8	150.3	15.2	1.578914	9485
» »	13 57	2	3789.32	225.6	156.3	16.15	1.580956	9590
» 8	9 13	o	779.015	56.5	153.3	14.6	0.892211	
» »	12 0	1	3773.74	220.1	149.3	15.9	1.578961	9407
» »	13 16	2	3791.24	223.5	151.1	16.75	1.581010	9499
» »	15 44	o	779.368	51.8	151.1	17.2	0.892208	
» 10	8 42	o	780.385	18.3	136.5	15.5	0.892168	
» »	11 1	1	3794.84	74.9	122.6	15.65	1.579301	
» 11	10 50	o	780.343	18.7	135.9	13.7	0.892206	
» »	13 48	2	3805.80	77.6	148.1	14.2	1.581225	9041
» 12	8 37	o	779.618	19.7	146.6	10.4	0.892183	
» »	11 30	2	3806.00	74.7	146.2	12.45	1.581247	8947
» »	14 33	1	3786.22	75.2	156.0	12.5	1.579211	8829
» 13	10 46	2	3807.52	76.9	140.8	10.0	1.581423	8904
» »	12 48	o	779.778	18.3	150.6	10.7	0.892338	
» »	14 43	1	3785.70	74.8	155.4	10.4	1.579222	9130
» 14	10 18	1	3787.66	78.2	143.9	9.75	1.579247	9096
» »	12 7	o	780.011	18.0	144.4	10.1	0.892347	
» »	14 8	L	1481.15	44.9	152.4	10.75	1.171287	9538
» 15	9 24	o	779.570	19.0	149.2	8.2	0.892295	
» »	12 0	1	3785.90	75.5	148.8	8.9	1.579166	9113
» »	14 4	L	1480.98	46.3	154.4	9.15	1.171361	9098
» »	15 10	o	779.220	18.1	157.6	9.3	0.892239	
Nov. 18	11 20	o	778.512	50.9	150.9	2.4	0.892292	
» »	13 50	1	3769.67	222.5	152.9	2.6	1.579168	9146
» 19	11 44	1	3768.54	220.9	154.6	2.1	1.579100	9330
» »	13 55	o	778.510	40.6	155.8	2.05	0.892312	
» 20	10 47	o	778.143	42.1	159.4	2.0	0.892205	
» »	13 20	1	3769.40	218.7	157.7	2.95	1.579184	8931

Wie man aus der Tafel sieht, sind zwei verschiedene Fadenbündel angewandt worden; das dickere bestand aus 18, das feinere aus 7 einfachen Fäden. Bei Betrachtung der reducierten Logarithmen der Schwingungsdauer springt sofort in die Augen, dass die Schwingungsdauer des belasteten Magnets bei Verwendung des gröberen Fadenbündels nicht unerheblich kleiner ausfällt als bei der des feinern; dagegen ist die

Schwingungsdauer des unbelasteten Stabs in beiden Fällen einander ziemlich gleich. Das berechnete Trägheitsmoment wird daher bei Benutzung des gröberen Fadenbündels grösser als bei der des feinern. Ich habe mir diesen Umstand in verschiedener Weise zu erklären versucht. Erstens schien es möglich — wenn auch nicht sehr wahrscheinlich —, dass das Trägheitsmoment des Fadenbündels im Vergleich zu dem des Magnets nicht ganz zu vernachlässigen sei. Ist ϱ die specifische Masse der Fadensubstanz; r der Radius des Querschnitts — das Fadenbündel als cylindrisch vorausgesetzt — φ der Schwingungswinkel im Abstande x von oben, ϑ der Schwingungswinkel des Magnets, l die ganze Länge des Fadens, K das Trägheitsmoment des aufgehängten Körpers, so wird die Bewegungsgleichung:

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\int_0^l \varrho\frac{\pi r^4}{2}dx\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-MH(1+\gamma)\vartheta\ .$$

Es ist aber:

$$\varphi=\frac{x}{l}\vartheta\ ,$$

somit

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{x}{l}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

und

$$\left\{K+\frac{\varrho\pi r^4}{2l}\int_0^l x\,dx\right\}\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-MH(1+\gamma)\vartheta\ ,$$

oder endlich

$$\left(K+\frac{pr^2}{4}\right)\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=-MH(1+\gamma)\vartheta\ ,$$

wo p die Masse des Fadenbündels ist. Man muss somit das Trägheitsmoment K um das halbe Trägheitsmoment des Fadens um seine Axe vermehren. Nun ergab sich im Mittel für das grobe Fadenbündel:

$$r=0.047\ cm\ ;\ p=0.225\ gr.$$

somit

$$\frac{pr^2}{4}=0.000104\ gr.\ cm^2\ ,$$

welche Grösse aber vernachlässigt werden kann. Mein nächster Gedanke war, dass Ungleichheit der elastischen Nachwirkungen der beiden Fäden vielleicht die besprochene Differenz verursachen könnte. Nach BOLTZMANN [1]) nehme ich an, dass die zur Zeit τ während des Zeitelements $d\tau$ durch elastische Nachwirkung entstandene »Kraftverminderung» proportional sei 1) der dann stattfindenden Deformation, somit auch in unserem Falle dem Torsionswinkel $\vartheta(\tau)$; 2) dem Zeitelemente $d\tau$; 3) einer gewissen Funktion $\varphi(t-\tau)$ des Zeitabstandes bis zur Zeit t der Schwingung; wonach die Bewegungsgleichung wird:

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -MH(1+\gamma)\vartheta + \int_{-\infty}^{t}\varphi(t-\tau)\vartheta(\tau)\,d\tau \ .$$

Um die Funktion φ zu bestimmen, drehe ich den zuerst ausgedrehten Faden um den Winkel v und bestimme experimentell den Ablenkungswinkel des Magnets, α, als Funktion der nach der Drehung verflossenen Zeit. Ist f das Torsionsmoment des Fadens, so wird dabei:

$$MH\sin\alpha = f(v-\alpha) - \int_{0}^{t}\varphi(t-\tau)(v-\alpha(\tau))\,d\tau \ .$$

Es ist aber

$$\int_{0}^{t}\varphi(t-\tau)(v-\alpha(\tau))\,d\tau = (v-\alpha(\lambda t))\int_{0}^{t}\varphi(t-\tau)\,d\tau \ ,$$

wo λ einen echten Bruch bezeichnet. Nun ist aber α selber im Verhältniss zu v klein; dessen zeitliche Änderungen können daher neben v vernachlässigt werden, und man bekommt:

$$\int_{0}^{t}\varphi(t-\tau)\,d\tau = f - MH\frac{\sin\alpha}{v-a} = MH\left(\frac{\alpha_0}{v-\alpha_0} - \frac{\alpha}{v-\alpha}\right) = \frac{MH}{v-\alpha}(\alpha_0-\alpha) \ ,$$

wenn sin α mit α vertauscht und $\frac{f}{MH}$ durch seinen Wert $\frac{\alpha_0}{v-\alpha_0}$ ersetzt wird. Durch Differentiation erhält man:

$$\varphi(t) = -\frac{MH}{v-\alpha}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{MH}{(v-\alpha)^2}(\alpha_0-\alpha)\frac{d\alpha}{dt} \ ,$$

1) L. BOLTZMANN: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. Poggendorff's Annalen, Ergänzungsband VII (1876).

wo wiederum das letzte Glied verschwindet, und somit:

$$\frac{\varphi(t)}{MH(1+\gamma)} = -\frac{1}{(v-\alpha)\left(1+\frac{\alpha_0}{v-\alpha}\right)} \cdot \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{v}\frac{d\alpha}{dt} .$$

Ich habe es versucht $\log\left(-\frac{d\alpha}{dt}\right)$ als lineare Funktion der Zeit darzustellen und teile hier als Beispiel die Beobachtungen mit unbelastetem Stab und gröberm Fadenbündel mit. Bei belastetem Stab waren die Variationen in α oder h kleiner — was sich wohl einfach daraus erklärt, dass ein verhältnissmässig kleiner Drehungswinkel v angewandt werden musste, um nicht über die Skala hinauszugehen —, wogegen die Änderungen über viel längere Zeit sich erstreckten, so dass die Bestimmung auf keine Genauigkeit Anspruch machen konnte. Die Beobachtungen bei Ablenkungen rechts und links sind der Symmetrie halber zusammengezogen werden. Bei diesen Versuchen war der Abstand Spiegel — Skala 2613 Skalateile; um aus $\log h$ $\log\alpha$, oder aus $\log\left(-\frac{dh}{dt}\right)$ $\log\left(-\frac{d\alpha}{dt}\right)$ in Graden zu bekommen, hat man demnach $\log\frac{1}{5226 \sin 1^0} = 8.0399$ hinzuzufügen. Die Ablesungen sind natürlich für Deklinationsvariationen verbessert. Die Zeit t ist die seit der Drehung verflossene Secundenanzahl.

Nov. 11. Tafel der Änderungsgeschwindigkeit des Drehungswinkels. Unbelasteter Stab, gröberes Fadenbündel; $v = 720^0$.

t	h	t	$\log\left(-\frac{dh}{dt}\right)$	$\log\left(-\frac{dh}{dt}\right)$ (ber.)	Δ
270	158.4				
378	156.5	324	8.246	7.992	0.254
668	154.6	523	7.817	7.937	—.120
1055	152.0	862	7.827	7.839	—.012
1405	150.6	1230	7.602	7.733	—.131
1778	149.2	1592	7.574	7.628	— 054
2265	147.8	2022	7.458	7.504	—.046
2678	146.8	2472	7.384	7.375	.009
3075	145.9	2877	7.355	7.258	.097
3555	145.3	3315	7.097	7.131	—.034
3915	144.9	3735	7.046	7.010	.036

Bei der Schwierigkeit der Messungen ist keine bessere Übereinstimmung zu erwarten. Die dritte Decimalstelle ist natürlich nur eine

Rechnungsgrösse, da die Differenzen dh höchstens zwei Ziffern enthalten. Die Formel zur Berechnung ist:

$$\log\left(-\frac{dh}{dt}\right) = 8.087—0.000289\,t\ .$$

Setzt man somit:

$$\varphi(t) = MH(1+\gamma)re^{-mt}\ ,$$

so wird in unserm Falle

$$\log r = 3.270—10\ ,$$

$$\log m = 6.882—10\ .$$

Setzt man noch zur Abkürzung:

$$\frac{MH(1+\gamma)}{K} = \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = p^2\ ,$$

so wird die Bewegungsgleichung:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + p^2\vartheta(t) - p^2\int_{-\infty}^{t} re^{-m(t-\tau)}\vartheta(\tau)\,d\tau\ .$$

Durch Differentiation erhält man dann:

$$\frac{d^3\vartheta}{dt^3} + p^2\frac{d\vartheta}{dt} - p^2r\vartheta + mp^2\int_{-\infty}^{t} re^{-m(t-\tau)}\vartheta(\tau)\,d\tau\ ,$$

und somit, wenn das Integral eliminiert wird:

$$\frac{d^3\vartheta}{dt^3} + m\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + p^2\frac{d\vartheta}{dt} + p^2(m-r)\vartheta = 0\ .$$

Zur Lösung derselben hat man bekanntlich zuerst die Wurzeln der Gleichung:

$$f(x) = x^3 + mx^2 + p^2x + p^2(m-r) = 0$$

zu ermitteln. Da das zweite und das letzte Glied kleine Grössen sind, so sind, wie zu erwarten war,

$$x = \pm pi$$

zwei angenäherte Wurzeln; um eine Verbesserung zu erhalten, setze man in der Gleichung $x + \delta$ statt x und erhält (vergl. die Newtonsche Approximationsmethode) mit Vernachlässigung von δ^2 und δ^3, die Verbesserung:

$$\delta = -\frac{f(\pm pi)}{f'(\pm pi)} = -\frac{rp(p \pm mi)}{2(p^2 + m^2)}$$

Neben p^2 im Nenner kann aber m^2 vernachlässigt werden, und somit ergiebt sich:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = -\frac{r}{2} \pm p\left(1 - \frac{rm}{2p^2}\right) i \ .$$

Es ist leicht zu sehen, dass die dritte, reelle Wurzel m und r in erster Potenz enthalten muss; vernachlässigt man alsdann von vorn herein Quadrate und Produkte von m und r, so wird

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + rx + p^2 \ .$$

Dies in $f(x)$ dividiert giebt als Quotient $x + m - r$ mit dem Restterm höherer Ordnung $-r(m - r)x$. Mit hinreichender Genauigkeit ist somit die Solution der Differentialgleichung:

$$\vartheta = Ae^{-(m-r)t} + Be^{-\frac{r}{2}t} \cos\left\{p\left(1 - \frac{rm}{2p^2}\right)t + \alpha\right\} \ .$$

Das erste Glied rührt offenbar davon her, dass die Anfangsbedingungen nichts davon sagen, ob vor dem Beginn der Schwingungen der Faden in der endgültigen Gleichgewichtstellung sich befand; ist dies der Fall, muss A verschwinden. In der Tat, rechnet man die Zeit vom ersten Durchgang, so wird $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, und für $t = 0$ $\vartheta_0 = A =$ die anfängliche Ablenkung von der schliesslichen Gleichgewichtslage. Der Ausdruck für die beobachtete Schwingungsdauer ist nunmehr:

$$\frac{\pi}{p\left(1 - \frac{rm}{2p^2}\right)} \ ,$$

und somit die erheischte Korrektion ε des Schwingungslogarithmus

$$\varepsilon = -Mod.\frac{rm}{2p^2} = -Mod.\frac{rm}{2}\frac{T^2}{\pi^2} \ .$$

Durch Einführung der bezüglichen Zahlenkoefficiente überzeugt man sich aber, dass ε verschwindend klein ist. Direkt übt die elastische Nachwirkung also keinen bemerkbaren Einfluss auf die Schwingungsdauer aus; wohl kann aber in indirekter Weise ein solcher vorhanden sein, weil bei der Drehung des Fadens zur Bestimmung von γ der Magnet in Schwingungen versetzt wird, welche den ersten Ausschlag h nicht zu beobachten gestatten.

Vor den Beobachtungen am 18—20 Nov. wurde das Fadenbündel in Glycerin getränkt; dies soll [1]) die Torsionskraft des Fadens vermindern. Dabei wurde auch dafür gesorgt, dass die Bestimmung von h sobald als möglich nach der Drehung statt fand. In der Tat scheinen diese Bestimmungen den mit dem feinern Fadenbündel gemachten näher gerückt zu sein. Das feinere Fadenbündel wurde leider durch die Benetzung mit Glycerin zu spröde, so dass es nicht mehr die Last des Lamontschen Ringes tragen konnte.

Man konnte schliesslich vermuten, dass die statische Methode zur Bestimmung von γ als solche, abgesehen von der oben genannten Ungenauigkeit, irgend einen Fehler herbeiführe. Ich habe daher diesen Koefficient auch dynamisch durch Torsionsschwingungen zu ermitteln gesucht. Hierzu bedarf man eines Torsionsstabs von demselben Gewicht und Trägheitsmomente wie der Magnet. Ich liess einen solchen von an einander gelöteten Zink- und Kupfer-Lamellen verfertigen. Bezeichnet d die Dicke des Magnets (Dimension parallel dem Faden); d_1 und d_2 die der Kupfer-, bez. Zink-Lamelle, endlich ϱ, ϱ_1 und ϱ_2 die specifischen Massen der bezüglichen Metalle, so hat man hierzu nur zu setzen:

$$d = d_1 + d_2 \ ,$$

$$d\varrho = d_1 \varrho_1 + d_2 \varrho_2 \ .$$

Der Stab wurde aber ein bischen mehr als 1 gr. zu leicht; um dies zu korrigieren, brachte ich im Abstande $\frac{l}{\sqrt{12}}$, wo $l = 20$ cm = die Stablänge, von der Mitte einen Bleirahmen von dem fehlenden Gewichte an. Wenigstens bei belastetem Stab wird dies eine völlig befriedigende Approximation sein. Bezeichnet nunmehr τ die Schwingungsdauer der Torsionsschwingungen, f wie zuvor das Torsionsmoment des Fadens, so erhält man:

1) Nach freundlicher Mitteilung des Herrn Dr M. Eschenhagen.

$$f = \frac{\pi^2 K}{\tau^2} ,$$

$$MH + f = \frac{\pi^2 K}{T^2} ,$$

und somit

$$\frac{f}{MH + f} = \frac{\gamma}{1 + \gamma} = \frac{T^2}{\tau^2} ,$$

woraus:

$$\frac{1}{2} \log (1 + \gamma) = -\frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{T^2}{\tau^2} \right) .$$

Die Beobachtungen ergaben, mit belastetem Stab (Ring N:o 1)

am 4 April $\tau = 359.4$ $T = 37.7254$ $\frac{1}{2} \log (1 + \gamma) = 0.002406$

» 5 » » 364.0 » 37.7280 » » 0.002346

Wie schon oben erwähnt, zeigten die gleichzeitigen Bestimmungen von h, obwohl natürlich das Fadenbündel wie zuvor zur Vermeidung der Bifilarsuspension mit Knoten versehen war, einen etwas befremdenden Gang. Unterscheidet man die bei verschiedenen Drehungen erhaltenen Werte durch entsprechende Indices, so war

am 4 April $h_{90} = 240.2$, $h_{180} = 249.3$, $h_{360} = 226.7$

» 5 » » 230.8 , » 244.5 , » 224.7 .

Nimmt man als die wahrscheinlichsten Werte die Mittel aus h_{90} und h_{360} an, so erhält man:

am 4 April $\frac{1}{2} \log (1 + \gamma) = 0.002380$

» 5 » » 0.002322

Werte, welche beinahe mit den aus den Schwingungsversuchen erhaltenen stimmen. Mit h_{360} erhält man zwar etwas zu kleine Werte, dagegen mit h_{180} um etwa eben so viel zu grosse. Die dynamische Bestimmungsweise wäre natürlich vorzuziehen, wenn man nur sicher sein könnte, dass beim Vertauschen des Torsionsstabs und des Magnets keine Zustandsänderungen des Suspensionsfadens eintreten, und dass auch bei unbelastetem

Stabe der Torsionsstab und der Magnet genügend gleiche Trägheitsmomente besitzen.

Da nun jedenfalls die gemachten Untersuchungen keinen sichern Aufschluss über den Sitz und Betrag des Fehlers geben, so sah ich mich zuletzt gezwungen einfach das arithmetische Mittel aus allen Bestimmungen — mit Ausnahme der am 10 Sept., wo die Variationen zu gross waren — als den wahrscheinlichsten Wert von log K anzusehen, und demnach zu setzen:

$$\log K_{15} = 3.379267 \ .$$

Schliesst man alle Bestimmungen mit dem gröbern Fadenbündel aus, so wird das Mittel aus den übrigen 3.379077; die Differenz 0.000190 entspricht bei vollständigen Restimmungen 7 Einheiten der fünften Decimalstelle der Horizontalintensität.

3. **Der (Lamontsche) Induktionskoefficient.** Zur Bestimmung des Induktionskoefficienten versuchte ich zuerst eine von Mascart [1]) dargestellte Methode, nach der man den Magnet teils bifilar in verschiedenen Stellungen, teils unifilar schwingen lässt. Bei der Anstellung dieser Versuche wusste ich noch nicht, dass ein Specialfall derselben Methode schon vorher von Wild geprüft und, wegen mangelnder Genauigkeit, verworfen worden war [2]). Auch mir wollte das Verfahren nicht gelingen, doch glaube ich, dass dies hauptsächlich den angewandten Coconfäden zuzuschreiben ist; diese, welche sehr fein gewählt wurden, damit die eigene Torsionskraft des Fadens vernachlässigt werden könnte, änderten fortwährend ihre Länge; konnten auch nicht dadurch in einen konstanten Zustand gebracht werden, dass ein Gefäss mit Schwefelsäure zum Austrocknen in den Schwingungskasten eingestellt wurde. Hätten mir einige von den neuerfundenen Quarzfäden zu Gebote gestanden, so wäre das Resultat wahrscheinlich viel günstiger geworden. Wie dem auch sei, ich sah mich nun genötigt zur Lamontschen Methode, die auch die einfachste ist, zurückzugreifen. Wie Mascart beweist, müsste dann eigentlich, bei der Anwendung zur Korrektion der Schwingungsdauer, ein entsprechender Koefficient der Transversalinduktion in Abzug gebracht werden; da aber

1) E. Mascart: Recherches sur le magnétisme. Annales de Chemie et de Physique VI: 18 (1889).

2) H. Wild: Vollständige Theorie des Bifilarmagnetometers, etc. Bulletin de l'Ac. imp. des Sciences de S:t Petersbourg XXVI (1880). Derselbe: Bestimmung der Induktionskoefficienten von Stahlmagneten. Mémoires de l'Ac. imp. des Sciences de S:t Petersbourg VII: 34 (1886)

die Länge des benutzten Magnets 20 mal so gross ist als die Breite, so dürfte diese Korrektion vernachlässigt werden können. Bei Bestimmung des longitudinalen Induktionskoeffficienten wurde ein englischer Theodolit (der sogenannte Eugenieapparat) angewandt, welcher den Vorteil gewährt, dass die Änderungen des Ablenkungswinkels, $\delta\varphi$, direkt an einer Skala abgelesen werden können. Es ist dann:

$$\varkappa \, . \, H = \frac{\sin 1' \, . \, \delta\varphi'}{2 \operatorname{tg} i \, . \operatorname{tg} \varphi} \, .$$

Mit $\varphi = 28^{0}0'$ und $i = 70^{0}52'$ bekomme ich:

$\delta\varphi$	$\varkappa \, . \, H$
12.'52	0.00119
12.82	122
12.89	123
12.08	115
12.82	122

und somit im Mittel $\varkappa \, . \, H = 0.00120$.

4. **Bestimmung der Ablenkungskonstante** (k). Vor allem musste dabei die Schiene verificiert werden. Dies geschah vermittelst der schon erwähnten Teilmaschine; zur Kontrole befestigte ich noch den Normalmaassstab direkt an der Schiene und mass die Differenzen vermittelst eines mit Okularmikrometer versehenen Mikroskops. Die Löcher für den Stift des den Magnet tragenden Schlittens befinden sich in der Mitte zwischen je zwei Teilstrichen, so dass die unten angeführten Zahlen Mittel aus je vier Abständen sind. Es ergab die genannte Verifikation:

statt	$12^{cm}.5$	muss	sein	$12^{cm}.498$
»	17.5	»	»	17.496
»	22.5	»	»	22.491
»	27.5	»	»	27.487
»	32.5	»	»	32.487
»	37.5	»	»	37.484
»	42.5	»	»	42.482
	47.5	»	»	47.482
»	52.5	»	»	52.482
»	57.5	»	»	57.480
»	62.5	»	»	62.482
	67.5	»	»	67 481
	72.5	»	»	72.476
	77.5	»	»	77.474

Die Temperatur- und Intensitätskorrektionen sind oben angeführt; die unten mitgeteilten Winkel sind wegen der Ungleichheit der Ablenkungen schon verbessert; die Torsion des Aufhängefadens war kleiner als 10′, die diesbezügliche Korrektion fällt mithin weg; die Induktionskorrektion wird:

bei Ablenkungen in der ersten Hauptlage $\Delta \log \sin \varphi = + \text{Mod.} \varkappa H \sin \varphi$,

» » » » zweiten » $\Delta \log \sin \varphi' = - \text{Mod.} \varkappa H \sin \varphi'$;

dabei ist in unserm Falle: $\log (\text{Mod.} \varkappa H) = 6.7170$. Schliesslich müssen noch vor der Anwendung die Variationsablesungen wegen des Einflusses des Ablenkungsmagnets korrigiert werden, eine Korrektion, die freilich kleiner ausfiel als ich es nach den bisweilen grossen Schwingungen, in die sie gerieten, befürchtete. Die Komponenten der magnetischen Kraft, die ein Magnet vom Momente M in dem grossen Abstande r, dessen Winkel mit der magnetischen Axe ω ist, ansübt, parallel und senkrecht zur magnetischen Axe, sind bekanntlich:

$$X = \frac{M}{r^3} (3 \cos^2 \omega - 1) \ , \quad Y = \frac{M}{r^3} 3 \sin \omega \cos \omega \ .$$

Befindet sich hier eine bewegliche Nadel vom Momente μ und ist der Winkel $(\mu , r) = \omega'$, so ist das auf die Nadel ausgeübte (positive) Drehungsmoment:

$$\Omega = \frac{\mu M}{r^3} [(3 \cos^2 \omega - 1) \sin (\omega' - \omega) + 3 \sin \omega \cos \omega \cos (\omega' - \omega)]$$

$$= \frac{\mu M}{2 r^3} [3 \sin (\omega' + \omega) + \sin (\omega' - \omega)] \ .$$

Nun kann man zuerst die Variationsablesungen, wenn der Ablenkungsmagnet zu beiden Seiten der freien Nadel, aber im übrigen in derselben Lage sich befindet, zu einem Mittel vereinigen; die erheischte Korrektion desselben ist dann, von Gliedern höherer Ordnung abgesehen, dieselbe, wie wenn der Magnet sich selbst parallel auf den Platz der freien Nadel des Theodolits versetzt wird. Die Totalkorrektion der ganzen Reihe der Variationsbeobachtungen ist somit das Mittel aus zwei Korrektionen, bei denen der Ablenkungsmagnet auf dem Platz der freien Nadel in zwei zum Meridian symmetrischen Lagen gedacht wird. Es sei nun:

a und b die Abstände von der Theodolitnadel zu den Variationsinstrumenten für Deklination und Horizontalintensität bezw.
α und β die Winkel vom Meridian zu a und b gerechnet,
v der Winkel vom Meridian zur Richtung des Ablenkungsmagnets gerechnet,
ψ der Ablenkungswinkel des Horizontalvariometers,
alle Winkel positiv von Nord über Ost gezählt. Dann ist für den Deklinationsvariometer $\omega' = \alpha$, $\omega = \alpha - v$ und das Drehungsmoment

$$\Omega_1 = \frac{\mu M}{2a^3}[3 \sin (2\alpha - v) + \sin v] \; ;$$

für den Horizontalvariometer $\omega' = \beta - \psi$, $\omega = \beta - v$, und das Drehungsmoment

$$\Omega_2 = \frac{\mu M}{2b^3}[3 \sin (2\beta - \psi - v) - \sin (\psi - v)] \; .$$

Nun rechnete ich die Winkel positiv über Ost, die Skalaablesungen wachsen aber für westliche Ablenkung, somit ist eben die gesuchte *Korrektion* — da man die kleine Änderung der Direktionskraft ausser Acht lässt — für den Deklinationsvariometer:

$$\Delta n = \frac{\Omega_1 (+v) + \Omega_1 (-v)}{2\mu H \sin \varepsilon} = \frac{3M}{2a^3 H \sin \varepsilon} \cdot \sin 2\alpha \cos v = A \cos v \; ;$$

für den Horizontalvariometer:

$$\Delta n' = \frac{\Omega_2 (+v) + \Omega_2 (-v)}{2\mu H \cos \psi \sin \varepsilon} = \frac{3M}{2b^3 H \cos \psi \sin \varepsilon}\left[\sin (2\beta - \psi) - \frac{1}{3} \sin \psi\right] \cos v =$$

$$= B \cos v \; .$$

Für v hat man bei Ablenkungen in der ersten Hauptlage zu setzen $\frac{\pi}{2} + \varphi$; bei Ablenkungen in der zweiten $\frac{\pi}{2} - \varphi'$, so dass man erhält:

bei der ersten Hauptlage: $\Delta(n' - n) = (A - B) \sin \varphi$

» » zweiten » $\Delta(n' - n) = -(A - B) \sin \varphi' \; .$

Die einfachste Weise die Grössen A und B zu bestimmen ist, den Magnet am Pfeiler der absoluten Bestimmungen dem magnetischen Me-

ridian parallel anzulegen, und zwar zuerst mit dem Nordpol nach Süd, sodann Nordpol nach Nord; A und B sind dann den halben Differenzen der entsprechenden Variationsablesungen gleich (Vorzeichen vergl. oben). In dieser Weise bekam ich $A = +0.70$, $B = -0.18$. Zur Kontrole habe ich noch A und B durch Ausrechnung bestimmt; es ist:

$$a = 438^{cm} \ , \ b = 427^{cm} \ ,$$

$$\alpha = 77°11' \ , \ \beta = 34°42' \ ,$$

ferner ist mit hinreichender Genauigkeit

$$M = \frac{\pi^2 K}{T^2 H} \ , \ H = 0.162 \ , \ \psi = 57°17' \ , \ \varepsilon = 0.'677 \ .$$

Die Einsetzung in die obigen Formeln ergiebt die mit den obigen gut übereinstimmenden Werte $A = +0.58$, $B = -0.18$. Bei der Berechnung der Korrektionen ist das Mittel der beiden A-Werte, 0.64, angewandt. Speciell ist die diesbezügliche Korrektion der Variationsablesungen bei den Schwingungsversuchen einer absoluten Bestimmung $-(A - B) = -0.8$ Skalateile. Um aber die obigen einfachen Formeln bei Ablenkungen anwenden zu können, muss man die Beobachtungen ganz symmetrisch anstellen; da ich nun hier wie immer die Ångströmsche Beobachtungsweise mit 7 Einstellungen, von denen die 3 letzten eine Wiederholung in umgekehrter Ordnung der 3 ersten sind — um Deklinationsvariationen möglichst zu eliminieren —, angewandt habe, so muss der vierten Variationsablesung das doppelte Gewicht beigelegt werden, wie ja dies auch dadurch motiviert ist, dass die entsprechende Theodoliteinstellung bei Berechnung des Ablenkungswinkels doppelt verwendet wird. Die unten neben dem grössten Ablenkungswinkel gegebenen Variationsablesungen stimmen darum mit den zuvor, bei Herleitung des Temperaturkoefficienten, angeführten nicht ganz überein.

Der Theodolit besitzt zur genauen Einstellung der Nadel, senkrecht zur Schiene, bezw. parallel derselben, keine Vorrichtung; dagegen kann man, da Nadel und Fernrohr fest verbunden, aber beweglich im Verhältniss zum Limbus sind, die Nadel um genau 90° drehen, und dies ist auch hinreichend, wenn nur nicht die Abweichung ε vom Parallelismus so gross ist, dass man nicht Grössen von der Ordnung $\sin^2 \varepsilon$ in den Korrektionsgliedern vernachlässigen kann, denn ist dies erlaubt, so

wird man nur $k \cos \varepsilon$ statt k bestimmen[1]); es ist aber eben die erstere Grösse, welche man dann benutzen muss. Die Ablenkungen nach LAMONTS Methode geschahen in den Abständen $e = 37.\bar{4}84$ und $E = 72.476$; da die Nadel die Länge $l' = 1.5$ cm hat, ist also

$$\log Q = \log\left[\eta^3 (1 - \eta^4)\left(7 + 3\,\frac{l'^2}{e^2} \cdot \frac{\eta^2}{1 + \eta^2}\right)\right] = 9.953875\ ,$$

wo η das Verhältniss $e : E$ bezeichnet. Ausserdem habe ich noch k aus den Ablenkungen in der ersten Hauptlage allein in folgender Weise bestimmt. Da die Nadel klein ist, kann man zunächt in den höheren Gliedern deren Länge vernachlässigen; ferner ist es auch erlaubt in diesen einen angenäherten Wert der Poldistanz des Magnets einzuführen; ich setze nach KOHLRAUSCH:

$$\lambda = \frac{5}{6} \cdot \frac{l}{2}\ ,$$

wo λ die halbe Poldistanz, l die Länge des Magnets bezeichnet; und der Restterm R_e, d. h. die Summe der Glieder mit Ausnahme der zwei ersten, würde sein:

$$R_e = \left(1 - \frac{\lambda^2}{e^2}\right)^{-2} - \left(1 + 2\,\frac{\lambda^2}{e^2}\right)\ .$$

Von den dabei vernachlässigten Gliedern hat aber eins eine bemerkbare Grösse, nämlich:

$$-\frac{15}{e^4} \cdot \frac{M_3 M_3'}{M M'} = -15\,\frac{\lambda^2 \lambda'^2}{e^4}\ ;$$

wird diese hinzugefügt, so bekommt man:

$$R_e = \left(1 - \frac{\lambda^2}{e^2}\right)^{-2} - \left(1 + 2\,\frac{\lambda^2}{e^2} + 15\,\frac{\lambda^2 \lambda'^2}{e^4}\right)\ ;$$

der entsprechende Restterm für den grössern Abstand entsteht durch Vertauschung von e mit E. Die Grundgleichungen sind somit:

1) Vergl. C. BÖRGEN: Theorie der Lamontschen Instrumente zur Beobachtung der Variationen des Erdmagnetismus, etc. Ann. d. Hydr. und marit. Meteor. XIII (1885).

$$\frac{e^3}{2}\frac{H}{M}\sin\varphi = 1 + \frac{p}{e^2} + R_e \ ,$$

$$\frac{E^3}{2}\frac{H}{M}\sin\psi = 1 + \frac{p}{E^2} + R_E \ ;$$

durch Elimination erhält man

$$1 + \frac{p}{e^2} + R_e = k = \frac{\eta^3(1 + R_E - \eta^2(1 + R_e))}{\sin\psi - \eta^5\sin\varphi} \cdot \sin\varphi \ ,$$

und dabei ist in unserm Falle:

$$\log[\eta^3(1 + R_E - \eta^2(1 + R_e))] = 9.004868 \ .$$

Es mag hier eine die Lamontsche Methode betreffende kleine Bemerkung eingeschaltet werden. Die Summe der Glieder vierter und höherer Ordnung ist bei der ersten Hauptlage

$$\sigma = \left(1 - \frac{\lambda^2}{e^2}\right)^{-2} - \left(1 + 2\frac{\lambda^2}{e^2} + 3\frac{\lambda^4}{e^4}\right) = 0.00051 \ ,$$

und dementsprechend erhält man für die zweite Hauptlage

$$\sigma' = \left(1 + \frac{\lambda^2}{e^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(1 - \frac{3}{2}\frac{\lambda^2}{e^2} + \frac{15}{8}\frac{\lambda^4}{e^4}\right) = -0.00025 \ ,$$

dagegen werden die Reste für den grössern Abstand verschwindend klein. Setzt man nun aber σ und σ' der ersten, bezw. dritten der Lamontschen Grundgleichungen an und macht die weitere Rechnung durch, so findet man, dass am Schlusse zur Grösse Q nur die Korrektion $-\eta^7(3\sigma + 4\sigma')$ hinzukommen würde; dies verschwindet aber ganz, infolge des Faktors η^7. Von wesentlicher Wichtigkeit ist es dagegen, dass die grössere Distanz so gross gewählt wird, dass die zu ihr gehörigen Korrektionsglieder verschwinden; dies führt aber andererseits den Übelstand mit sich, dass die Winkel ψ und ψ', welche in der Schlussformel

$$\log k = \log Q + \log\sin\varphi - \log[3\sin\psi + 8\sin\psi' - \eta^7(3\sin\varphi + 8\sin\varphi')]$$

von hervorragender Bedeutung sind, zu klein werden, um mit genügender Sicherheit bestimmt werden zu können.

Die Bestimmungen von φ und ψ am 19 Sept. sind mit den Bestimmungen von φ' und ψ' am 26 Sept. zusammengestellt; log k ist nach der Lamontschen Methode berechnet, log k' aus den Ablenkungen in der ersten Hauptlage allein.

Tafel der Bestimmung von log k.

Stunde	Bez. des Winkel	Winkel	t	$n'-n$	log sin korr.	log k	log k'
			Am 17 Sept.				
$11^h\ 0^m$	φ	$38^0 42' 0''$	9.^{0}5	147.1	9.795758		
12 2	ψ	4 34 49	10. 5	149.2	8.901901	0.047158	0.047352
13 6	ψ'	2 10 40	10. 9	155.5	8.579637		
13 58	φ'	15 6 46	10. 9	157.0	9.415978		
			Am 18 Sept.				
10 45	φ'	15 7 11	11. 85	145.5	9.415727		
11 23	ψ'	2 10 58	12. 65	147 6	8.580436	0.046597	0.047139
12 22	ψ	4 34 43	12. 8	151.4	8.902056		
13 5	φ	38 38 27	13. 2	152.0	9.795762		
			Am 19 Sept.				
10 18	ψ	4 34 59	13. 3	144.3	8.902200		
12 30	φ	38 39 12	13. 5	144.9	9.795584	0 046726	0.046686
			Am 21 Sept.				
9 42	φ	38 39 22	12. 0	148.2	9.795623		
10 14	ψ	4 34 46	12. 35	147.1	8.901897	0.046429	0.047167
11 47	φ'	15 7 43	12. 25	145.2	9.416000		
12 20	ψ'	2 11 2	12. 6	146.9	8.580619		
			Am 23 Sept.				
10 31	ψ'	2 11 35	9. 65	131.2	8.581452		
11 0	φ'	15 9 26	10. 6	128.8	9.415903		
12 30	φ	38 40 30	11. 25	145.7	9.795619	0.045692	0.046490
13 16	ψ	4 35 12	11. 6	144.1	8.902374		
			Am 24 Sept.				
9 40	φ	38 44 15	10. 55	137.7	9.795781		
10 18	ψ	4 35 43	11. 5	137.7	8.902888	0.045605	0.045995
12 32	φ'	15 7 58	12. 5	141.7	9.415981		
13 32	ψ'	2 11 23	12. 7	140.1	8.581477		
			Am 26 Sept.				
9 57	ψ'	2 10 56	11. 3	138.8	8.579799		
10 39	φ'	15 7 46	11. 75	138.0	9.415651		
						0.046368	0.046805
						± 0.000169	± 0.000141

Da ich bei diesem Resultat nicht stehen bleiben wollte, habe ich noch eine Methode hinzugezogen, indem ich Ablenkungen in der ersten Hauptlage auch an allen zwischenliegenden Abständen vornahm, um so durch die Methode der kleinsten Quadrate eine direkte Bestimmung der Glieder der Reihenentwickelung zu erhalten. Da aber Glieder mit niedriger Potenz als e^{-4} mit zu kleinen Koefficienten multipliciert werden, um genügend bestimmt werden zu können, habe ich es vorgezogen, für *diese* doch die oben besprochene Berechnung mit dem angenäherten Werte der Poldistanz vorzunehmen und als Korrektion anzubringen. Ferner setze ich:

$$\frac{k-1}{e_1^3 \sin \varphi_1} = y \ ,$$

und erhalte zur Bestimmung von y acht Gleichungen von der Form:

$$e_n^3 \sin \varphi_n \, . \, y = \delta_n + \frac{p}{e_n^2} + \frac{q}{e_n^4}$$

mit den Definitionsgleichungen:

$$\delta_n = 1 + \sigma_n - \frac{e_n^3 \sin \varphi_n}{e_1^3 \sin \varphi_1} \ ,$$

$$\sigma_n = \left(1 - \frac{\lambda^2}{e_n^2}\right)^{-2} - \left(1 + 2\,\frac{\lambda^2}{e_n^2} + 3\,\frac{\lambda^4}{e_n^4}\right) \ , \ \lambda = \frac{5}{6} \cdot \frac{l}{2} = \frac{100}{12}\, cm \ .$$

Die Normalgleichungen sind folglich:

$$y \Sigma e^6 \sin^2 \varphi = \Sigma e^3 \sin \varphi \, . \, \delta + p \Sigma e \sin \varphi + q \Sigma \frac{\sin \varphi}{e} \ ,$$

$$y \Sigma e \sin \varphi = \Sigma \frac{\delta}{e^2} + p \Sigma \frac{1}{e^4} + q \Sigma \frac{1}{e^6} \ ,$$

$$y \Sigma \frac{\sin \varphi}{e} = \Sigma \frac{\delta}{e^4} + p \Sigma \frac{1}{e^6} + q \Sigma \frac{1}{e^8} \ .$$

Ich verstehe den Einwand nicht, den LAMONT gegen diese Methode erhebt [1]). Je mehr Punkte man hinzuzieht, um so genauer muss

1) Siehe LAMONT: Handbuch des Erdmagnetismus, Seite 246.

ja die Bestimmung werden; das Beispiel von der Parabel mit grossen Dimensionen trifft ja gar nicht zu, da von einer Extrapolation nicht die Rede ist.

Bestimmung von log k durch Ablenkungen an 8 Abständen.

Dat.	Stunde	Bez. des Winkels	Winkel	t	$n'-n$	log sin φ (red.)
Sept. 27	9^h57^m	φ_8	$4^0 35' 22''$	$11.^0 2$	139.2	8.902832
	10 30	φ_1	38 41 21	11. 7	138.5	9.795921
	11 3	φ_2	24 47 55	11. 8	134.3	9.622336
	12 27	φ_3	17 10 6	11. 8	140.8	9.470099
	12 54	φ_4	12 28 6	12. 2	144.3	9.334312
	13 26	φ_5	9 22 23	12. 2	144.1	9.211863
	13 56	φ_6	7 14 1	12. 4	145.8	9.100173
	14 24	φ_7	5 42 42	12. 3	143.7	8.997897
Sept. 28	11 16	φ_8	4 35 26	11. 0	134.4	8.902700
	11 40	φ_7	5 43 3	11. 6	137.3	8.997982
	12 3	φ_6	7 14 42	11. 9	140.2	9.100552
	12 23	φ_5	9 22 33	12. 25	143.1	9.211924
	13 8	φ_4	12 28 1	11. 85	145.4	9.334282
Sept. 30	11 10	φ_3	17 10 28	9. 7	141.8	9.469992
	11 36	φ_2	24 47 0	10. 3	140.6	9.622334
	12 20	φ_1	38 41 0	10. 35	142.7	9.795933
	12 45	φ_1	38 40 17	10. 65	144.4	9.795925
	14 11	φ_2	24 45 57	10. 1	149.1	9.622314
	15 10	φ_3	17 9 40	10. 65	149.8	9.470117
Okt. 2	13 24	φ_4	12 28 5	10. 65	147.3	9.334295
	13 52	φ_5	9 22 18	11. 35	149.1	9.211830
Okt. 3	12 30	φ_6	7 14 13	12. 55	146.2	9.100404
	12 58	φ_7	5 42 5	13. 05	147.9	8.997378
	13 39	φ_8	4 34 56	13. 05	144 3	8.902553
	14 7	φ_1	38 38 2	13. 3	145.6	9.795869

Zunächst vereinige ich nun die zusammengehörigen *log sin* zu Mitteln; für die fernere Rechnung wäre dann eigentlich den verschiedenen Mitteln verschiedenes Gewicht beizumessen, was ich jedoch unterlassen habe; wie bald gezeigt werden wird, kann hieraus kein Fehler von einiger Bedeutung entstehen. Bei der Rechnung habe ich, um nicht so viele 10 mit positiven und negativen Exponenten schreiben zu müssen, der Decimeter als Längeneinheit benutzt; k ist eine Zahl und wird dadurch nicht geändert; y ist von der Dimension $[L^{-3}]$, p von der $[L^2]$; q von der $[L^4]$. Durch Ausführung der angezeigten Rechnungsoperationen erhält man nun:

$$y = 0.003387 \pm 0.000012 \text{ dcm}^{-3}$$

$$p = 1.409 \text{ dcm}^2$$

$$q = 2.115 \text{ dcm}^4$$

Eine Tafel der früher angewandten, und der mit diesen Werten von y, p und q berechneten δ' möge noch hier angeführt werden:

Index	δ	δ (ber.)	Δ
1	0.00051	0.00050	+ 0.00001
2	0.02422	0.02425	− 3
3	0.04027	0.04036	− 9
4	0.05192	0.05177	+ 15
5	0.06039	0.06018	+ 21
6	0.06636	0.06662	− 26
7	0.07137	0.07157	− 20
8	0.07568	0.07546	+ 22

Wie man sieht, kommen die grössern Differenzen erst bei höheren Indices vor; dies zeigt, dass die Verteilung der Fehler auch mit gleichem Gewicht für die $\log \sin \varphi$ wenigstens nahezu richtig ist.

Mit den Werten von p und q bekommt man zwei Gleichungen zur Bestimmung des Verhältnisses x zwischen Poldistanz und Stablänge, vorausgesetzt, dass dieses für den Ablenkungsmagnet und für die Nadel dasselbe ist; diese Gleichungen sind:

$$\frac{2l^2 - 3l'^2}{4} x^2 = p \ ,$$

$$\frac{1}{16}\left(3l^4 - 15l^2 l'^2 + \frac{45}{8} l'^4\right) x^4 = q \ .$$

Aus der ersten erhält man $x = 0.843$; aus der zweiten $x = 0.923$; dabei dürfte aber der letzte Wert zu verwerfen sein, da q wegen zu kleiner Koefficienten kaum mit für diesen Zweck genügender Sicherheit bestimmt werden kann; der erstere stimmt, wie man sieht, mit dem oben angenommenen Wert $\frac{5}{6}$ ziemlich gut überein. Ferner giebt die Definitionsgleichung für y den gesuchten $\log k$:

$$\log k = 0.045906 \pm 0.000154 \ .$$

Mit den drei verschiedenen Methoden habe ich somit auch drei verschiedene Werte für $\log k$ bekommen, deren Differenzen die Summe der wahrscheinlichen Fehler beträchtlich übersteigt, bei den am meisten von einander abweichenden sogar mehr als dreimal. Ein Mittel aus allen dreien mit Gewichten, die den Quadraten der wahrscheinlichen

Fehler umgekehrt proportional angesetzt werden, dürfte bei dieser Lage der Sache nicht viel zu bedeuten haben; auch schien mir dies speciell darum nicht ratsam, weil eben die mit der kleinsten Anzahl Messungen erhaltene und von der letzten am meisten abweichende Bestimmung dabei das grösste Gewicht bekommen würde. Dem letzten Werte aber möchte ich in Folge seiner Entstehungsweise eine etwas hervorragende Bedeutung beimessen; ich habe daher zuletzt den freilich etwas willkürlichen Entschluss gefasst, ein Mittel so zu bilden, dass ich diesem Werte das Gewicht 2, den beiden erstern das Gewicht 1 zuteile und bekomme dann $\log k = 0.046246$. Mit diesem Werte für $\log k$ und dem früher gefundenen für $\log K$ erhält man:

$$\log \pi \sqrt{\frac{2kK}{e^3}} = 9.999653$$

$$\log \pi \sqrt{\frac{e^3 K}{2k}} = 4.373915 .$$

Die vollständige Formel für Intensitätsbestimmungen wird dann sein:

$$\log H = 9.999653 - \Big(\log T + \frac{1}{2} Mod.\varkappa H - 38.9(t-15) +$$

$$+ 22.8(n' - n - 0.8) + 10\eta\Big) - \frac{1}{2}(\log \sin \varphi + Mod.\, \varkappa H \,.\, \sin \varphi +$$

$$+ 92.4(t-15) + 45.5(n' - n + 0.5)) ,$$

wo die in Zahlen ausgedrückten Korrektionsglieder in Einheiten der sechsten Decimalstelle angesetzt sind; η bezeichnet hier die Abweichung des Magnets in Minuten bei 360° Drehung des Suspensionsfadens, natürlich vorausgesetzt, dass dieser hinreichend fein ist. Was nun die Induktionskorrektion bei Ablenkungen anbetrifft, so kann sie immer in die Konstante eingerückt werden, wie auch die Intensität und das magnetische Moment sich ändern mögen; dies kann auch bei einem ständigen Observatorium, wenigstens für lange Zeit, mit der Induktionskorrektion bei Schwingungen geschehen, zumal da ihre Veränderungen doch jedenfalls klein sind im Vergleich zu den unvermeidlichen Unsicherheiten der Konstantenbestimmung; ferner kann man, so lange die Bestimmungen an demselben Pfeiler geschehen, dasselbe auch mit den Korrektionen der Variationsablesungen tun, so dass man einfacher erhält:

$$\log H = 9.999236 - (\log T - 38.9(t - 15) + 22.8(n' - n) + 10\eta) -$$

$$- \frac{1}{2}(\log \sin \varphi + 92.4(t - 15) + 45.5(n' - n)) \ .$$

Für das magnetische Moment erhält man in gleicher Weise, wenn $\log T$ und $\log \sin \varphi$ schon nach der letzten Gleichung korrigiert vorausgesetzt verden:

$$\log M = 4.373846 + \frac{1}{2} \log \sin \varphi - \log T \ .$$

Die Bestimmung von k nach der letzten Methode ermöglicht überdies eine Reduktion der Hauptkonstante zu einer der übrigen angewandten Abstände, wodurch eine Kontrole der Unveränderlichkeit von k mit der Zeit erhalten wird, wie dies aus der Zulässigkeit, wenigstens in theoretischer Hinsicht, der zweiten Bestimmungsweise folgt. Bezeichnet man die fraglichen Konstanten mit C_1 und C_n, so ist:

$$C_n = C_1 + \frac{1}{2} \log \frac{\sin \varphi_n}{\sin \varphi_1} + \frac{1}{2} Mod \ . \varkappa H (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_n) +$$

$$+ 0.000022.8(A - B)(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_n) \ .$$

Als der vorteilhafteste Abstand in dieser Hinsicht dürfte der mit Index 3 bezeichnete sein, bei dem der Ablenkungswinkel auf etwas weniger als die Hälfte abgenommen hat, dabei aber noch gross genug ist, um mit Sicherheit gemessen werden zu können. Durch Einsetzung bezüglicher Zahlenwerte erhält man $C_3 = 9.836407$.

Fasst man die Bestimmungen der Schwingungsdauer am 15 Sept. mit der Bestimmung von φ_1 am 17 Sept. zusammen, so erhält man für diesen Zeitpunkt:

$$H_{150} = 0.16190 \ ,$$

$$\log M = 3.379295 \ .$$

Eine andere Intensitätsbestimmung wurde am 14 und 15 Januar 1890 vorgenommen; dabei waren

Jan. 14 $100\,T = 779.498$; $t = 1^{\circ}.0$; $(n' - n)_{15} = 155.2$; $\eta = 3.2$

Jan. 15 $\varphi = 38^{\circ}41'20''$; $t = 0^{\circ}.25$; $(n' - n)_{15} = 161.3$,

und daraus berechnen sich:

$$H_{150} = 0.16188$$
$$\log M = 3.378875 \ .$$

5. **Vergleichung mit den Ergebnissen anderer Beobachter.** Es erübrigt eine Vergleichung zwischen den Werten der Horizontalintensität nach der hier beschriebenen und den zuvor in Upsala ausgeführten Konstantenbestimmungen vorzunehmen, was im Beginn des Juni (1890) geschah. Vorerst möge aber eine bei dieser Gelegenheit gemachte Bestimmung der Empfindlichkeitskonstante des Horizontalvariometers nach der von BÖRGEN in der oben citierten Abhandlung dargestellten Methode angeführt werden; sie ergab als Resultat, in Einheiten der fünften Decimalstelle:

$$\delta H = 1.96(n' - n) + 0.08 n'$$
$$= 2.04(n' - n) + 0.08 n \ ,$$

somit, wenn man von dem bei mässigen Deklinationsänderungen zu vernachlässigenden letzten Korrektionsgliede absieht, bis auf eine Einheit der letzten Decimalstelle die alte Konstante. Die am Anfang dieser Abhandlung vorgenommene Abänderung der Empfindlichkeitskonstante dürfte mithin nicht berechtigt gewesen sein; wie man findet, habe ich aber bei der Konstantenbestimmung die Reihenfolge der bezüglichen Beobachtungen immerfort geändert, so dass durch die zu kleine Empfindlichkeitskonstante wohl kaum eine bemerkbare Änderung des Endresultats entstanden sein kann.

Zunächst machte ich nun Bestimmungen mit den beiden Magneten des oben erwähnten *Eugenieapparats* im Abstande 0.07 engl. Fuss; die bezüglichen Konstanten sind von ÅNGSTRÖM bestimmt worden [1]).

Es ergab sich:

Am 1 Juni 10^h44^m $\varphi = 35°47'0''$, $t = 11°.9$, $n' - n = 141.4$ Magnet R_3
» » » 11^h40^m $\varphi = 31°37'18''$, $t = 12°05$, $n' - n = 143.0$ » B_4
» » » 12^h57^m 100 $T = 476^s.44$, $t = 12°.05$, $n' - n = 145.8$,
$\eta = 34'.0$ » B_4
» 2 » 12^h2^m 100 $T = 470^s.60$, $t = 12°.7$, $n' - n = 140.2$,
$\eta = 31'.8$ » R_3

1) Vergl. A. J. ÅNGSTRÖM: Voyage autour du monde sur la frégate suédoise L'Eugénie. Observations scientifique publiées par l'Ac. roy. des sciences à Stockholm 1858—1874. III. Physique; und: G. LUNDQUIST: Bidrag till kännedomen af den jordmagnetiska intensiteten och inklinationen i mellersta och södra Sverige. Svenska Vet. Akademiens Handl. Bd. 9 N:o 10 (1871).

woraus $H_{150} = 0.16234$ mit Magnet B_4; $H_{150} = 0.16233$ mit Magnet R_3. Ferner ergaben die Messungen mit dem hier oben angewandten Magnet:

Am 3 Juni 11^h13^m 100 $T = 780^s.92$, $t = 11.^0 85$, $n' - n = 134.4$, $\eta = 3.'5$

» » » 12^h42^m $\varphi_1 = 38^0 31' 15''$, $t = 13^0.45$, $n' - n = 139.7$,

woraus $H_{150} = 0.16221$, $\log M = 3.378331$. Am folgenden Tage machte ich noch Ablenkungsbeobachtungen in den beiden oben erwähnten Abständen, wobei:

Am 4 Juni 12^h39^m $\varphi_1 = 38^0 31' 0''$, $t = 13^0.15$, $n' - n = 139.0$

» » » 13^h10^m $\varphi_3 = 17^0 6' 0''$, $t = 13^0.45$, $n' - n = 144.7$.

Kombiniert man diese Ablenkungen mit dem Werte der Schwingungsdauer des vorigen Tags, so erhält man für Abstand 1 $H_{150} = 0.16223$; für Abstand 3 $H_{150} = 0.16221$. Die seit Januar eingetretene Änderung des Nullpunkts des Variometers rührt davon her, dass in der Zwischenzeit der Faden des Deklinationsvariometers unbekannterweise abgerissen war und mit einem neuen ersetzt werden musste, welcher vorerst zwei Wochen lang mit Torsionsbelastung stehen blieb.

Somit erhält man:

nach den Ångströmschen Konstantenbestimmungen mit dem Eugenieapparate: $H = 0.16233._5$;

nach meinen Konstantenbestimmungen mit dem grossen Lamontschen Theodolit und Magnet N:o 1: $H_{150} = 0.16221._7$;

Differenz: $H_{\text{Ångström}} - H_{\text{Solander}} = 0.00011._8$.

Schliesslich hatte Herr Prof. THALÉN die Güte auf mein Ersuchen mit dem von ihm vorzugsweise benutzten Magnet und dem grossen Lamontschen Theodolit eine Reihe Messungen auszuführen; die zur Berechnung nötigen Data finden sich in seinem früher citierten Werke: »Jordmagnetiska bestämningar i Sverige under åren 1869—1871». Die Beobachtungen ergaben im Mittel:

Am 6 Juni, a.m. $\varphi = 25^0 43' 0''$, $t = 15^0.03$, $n' - n = 126.2$,

» » » » 100 $T = 482^s.732$, $t = 15^0.75$, $n' - n = 139.3$,

» » » p.m. 100 $T = 482^s.288$, $t = 15^0.25$, $n' - n = 151.4$,

ferner ist die Torsionskorrektion des Schwingungslogarithmus 0.000100; und somit bekommt man aus den Vormittagsbeobachtungen $H_{150} = 0.16281$

und aus den Schwingungsbeobachtungen Nachmittags mit den Ablenkungen Vormittags $H_{150} = 0.16283$. Die früher in den Jahren 1869 und 1870 ermittelte Differenz zwischen den Angaben des Eugenieapparats und des von Prof. Thalén benutzten Magnets war 0.00030; sie scheint sich somit mit der Zeit um ein weniges vermehrt zu haben.

Zwischen Herr Prof. Thaléns Konstantenbestimmungen und den meinigen wird nach dem obigen die Differenz:

$$H_{\text{Thalén}} - H_{\text{Solander}} = 0.00060_3 \ .$$

Bei den Berechnungen ist der Gang des Kronometers nicht berücksichtigt, wodurch die Differenzen natürlich nicht beeinflusst werden; nach späterer Bestimmung, im Mitte des Juni, betrug derselbe $-2^s.2$ pro 24 Stunden.

Welchen Bestimmungen man den Vorzug geben soll, muss natürlich unentschieden bleiben; die vorliegende Abhandlung dürfte im Gegenteil zu voller Evidenz beweisen, dass man den wahren Wert der Horizontalintensität mit Ablenkungs- und Schwingungs-beobachtungen bis auf wenige — oder gar eine! — Einheiten der fünften Decimalstelle gar nicht zu ermitteln vermag. *Relative* Werte mit einer als bekannt vorausgesetzten Hauptkonstante kann man dagegen mit der obengenannten Genauigkeitsgrenze leicht bekommen; um dabei aber die Angaben verschiedener Länder und Observatorien unter sich in Übereinstimmung zu bringen, erscheint es durchaus geboten, direkte Vergleichsbeobachtungen mit einem und demselben Apparate zu machen. Dies wäre speciell darum sehr wünschenswert, weil die Berechnung der Gaussschen Konstanten in der Reihenentwickelung für das magnetische Potential der Erde sonst mit für grössere Gebiete konstanten Fehlern behaftet wird.

Nachtrag. Nachdem das obige geschrieben war, hat mir Herr D:r van Rijckevorsel einem Separatabzug seines Aufsatzes: »An Attempt to compare the instruments for absolute magnetic measurements at different observatories» gefälligst zugesandt. Derselbe enthält eine sehr minutiöse Vergleichung der Bestimmungen aller drei erdmagnetischen Elemente an den Observatorien zu Kew, Parc S:t Maur, Wilhelmshaven und Utrecht, wobei sich, wie zu erwarten war, ziemlich beträchtliche Unterschiede der bezüglichen Werte der Horizontalintensität herausstellten. Binnen kurzem hoffe ich eine etwas umfassendere Vergleichung der Bestimmungen der Horizontalintensität an verschiedenen Observatorien vornehmen zu können.

DÉDUCTION
DES PROPRIÉTÉS PRINCIPALES
DE LA FONCTION ELLIPTIQUE GÉNÉRALE
DU SECOND ORDRE.

PAR

A. BERGER.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 20 Septembre 1890).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1891.

Dans ce mémoire je me propose, en partant de la périodicité double, d'exposer les propriétés principales de la fonction elliptique générale du second ordre et, en particulier, les propriétés algébriques du polynôme du quatrième ou du troisième degré, qui se trouve dans l'équation différentielle de cette fonction [1]).

§ 1.

INTRODUCTION.

Si l'on désigne par ω, ω' deux quantités différentes de zéro, qui jouissent de la propriété, que la partie réelle du quotient $\frac{\omega'}{\omega i}$ ne s'annule pas, ce qu'on exprime par les inégalites

$$(1) \qquad |\omega| > 0 \ , \ |\omega'| > 0 \ , \ R\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) \gtrless 0 \ ,$$

la fonction $\sigma(u)$ de M. Weierstrass est définie par l'équation

$$(2) \qquad \sigma(u) = u \prod_{w}{}' \left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}} \ ,$$

1) Les travaux sur ce sujet, que j'ai consultés, sont:

Briot et Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques. Paris 1875.

G. Mittag-Leffler, En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna. Helsingfors 1876.

H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Göttingen 1881.

A. Donner, Om uttrycken för entydiga elliptiska funktioner. Helsingfors 1879.

G. H. Halphen, Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications. Paris 1886, 1888.

où $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, et où μ, μ' sont égaux successivement à tous les nombres entiers, excepté que μ, μ' ne soient nuls simultanément. Par une transformation connue on déduit de l'équation (2) la formule

$$(3)\quad \sigma(u) = \frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega}\, e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega' - u)\cdot\sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega' + u)}{\sin^2\frac{\pi n\omega'}{\omega}}\, e^{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi n\omega'}{\omega}}\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)^2} \right\}.$$

Les conditions (1) et l'équation (2) restant invariables en permutant ω et ω', il est évidemment permis de permuter ces deux quantités dans le second membre de l'équation (3), et par suite on en obtiendra la formule

$$(4)\quad \sigma(u) = \frac{2\omega'}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega'}\, e^{\frac{1}{6}\left(\frac{\pi u}{2\omega'}\right)^2} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left\{ \frac{\sin\frac{\pi}{2\omega'}(2n\omega - u)\cdot\sin\frac{\pi}{2\omega'}(2n\omega + u)}{\sin^2\frac{\pi n\omega}{\omega'}}\, e^{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi n\omega}{\omega'}}\left(\frac{\pi u}{2\omega'}\right)^2} \right\}.$$

En posant

$$(5)\qquad \eta = \frac{\pi^2}{2\omega}\left\{\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi n\omega'}{\omega}}\right\},\quad \eta' = \frac{\pi^2}{2\omega'}\left\{\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{\pi n\omega}{\omega'}}\right\},$$

les quantités η, η' seront finies d'après les inégalités (1), et en appliquant ces deux formules aux équations (3) et (4), nous en tirerons

$$(6)\qquad \sigma(u) = e^{\frac{\eta u^2}{2\omega}}\cdot\frac{2\omega}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega' - u)\cdot\sin\frac{\pi}{2\omega}(2n\omega' + u)}{\sin^2\frac{\pi n\omega'}{\omega}}$$

et

$$(7)\qquad \sigma(u) = e^{\frac{\eta' u^2}{2\omega'}}\cdot\frac{2\omega'}{\pi}\sin\frac{\pi u}{2\omega'}\prod_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2\omega'}(2n\omega - u)\cdot\sin\frac{\pi}{2\omega'}(2n\omega + u)}{\sin^2\frac{\pi n\omega}{\omega'}}.$$

Remplaçons u par $u + 2\omega$ dans l'équation (6) et par $u + 2\omega'$ dans l'équation (7), nous en obtiendrons les formules

$$(8)\qquad \sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u),$$

$$\sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u) \quad , \tag{9}$$

et en faisant $u = \omega' - \omega$ dans l'équation (8) et $u = \omega - \omega'$ dans l'équation (9), nous aurons

$$\sigma(\omega+\omega') = -e^{2\eta\omega'}\sigma(\omega'-\omega) \tag{10}$$

et

$$\sigma(\omega+\omega') = -e^{2\eta'\omega}\sigma(\omega-\omega') \quad ; \tag{11}$$

de ces équations on déduit par division

$$e^{2(\eta\omega'-\eta'\omega)} = -1 \quad . \tag{12}$$

et, par suite, on aura

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{m\pi i}{2} \quad , \tag{13}$$

en désignant par m un nombre entier impair. En remplaçant u par $u+2\omega'$ dans l'équation (8) et en y appliquant l'équation (9), nous obtiendrons

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = e^{2(\eta+\eta')u+4\eta\omega'+2\eta\omega+2\eta'\omega'}\sigma(u) \tag{14}$$

ou, d'après l'équation (13), m étant un nombre impair,

$$\sigma(u+2\omega+2\omega') = -e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')}\sigma(u) \quad . \tag{15}$$

En définissant deux quantités ω'', η'' au moyen des formules

$$\omega'' = \omega+\omega' \quad , \quad \eta'' = \eta+\eta' \quad , \tag{16}$$

l'équation (15) peut s'écrire

$$\sigma(u+2\omega'') = -e^{2\eta''(u+\omega'')}\sigma(u) \quad . \tag{17}$$

Par différentiation logarithmique on obtiendra des formules (8), (9), (17)

$$\frac{\sigma'(u+2\omega)}{\sigma(u+2\omega)} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta \quad , \tag{18}$$

$$\frac{\sigma'(u+2\omega')}{\sigma(u+2\omega')} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta' \quad , \tag{19}$$

$$\frac{\sigma'(u+2\omega'')}{\sigma(u+2\omega'')} = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} + 2\eta'' \quad , \tag{20}$$

et par les substitutions $u = -\omega$, $u = -\omega'$, $u = -\omega''$ on tire de ces trois formules, en observant que $\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$ est une fonction impaire de u,

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)} \quad , \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')} \quad , \quad \eta'' = \frac{\sigma'(\omega'')}{\sigma(\omega'')} \quad . \tag{21}$$

D'après cela nous déterminerons le nombre entier m, qui entre dans l'équation (13). Par différentiation logarithmique nous obtiendrons de l'équation (6)

$$\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = \frac{\eta u}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi u}{2\omega} \tag{22}$$

$$+ \frac{\pi}{2\omega} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ - \cot \frac{\pi}{2\omega} (2n\omega' - u) + \cot \frac{\pi}{2\omega} (2n\omega' + u) \right\} \quad ;$$

en faisant $u = \omega'$ dans cette formule, on déduit d'après les équations (21)

$$\eta' = \frac{\eta\omega'}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \cot \frac{\pi\omega'}{2\omega} \tag{23}$$

$$+ \frac{\pi}{2\omega} \lim_{s=\infty} \sum_{n=1}^{n=s} \left\{ - \cot (2n-1) \frac{\pi\omega'}{2\omega} + \cot (2n+1) \frac{\pi\omega'}{2\omega} \right\}$$

ou, après quelques réductions,

$$\eta' = \frac{\eta\omega'}{\omega} + \frac{\pi}{2\omega} \lim_{s=\infty} \cot (2s+1) \frac{\pi\omega'}{2\omega} \quad . \tag{24}$$

Supposons désormais que les deux quantités ω, ω' satisfassent à l'inégalité

$$R\left(\frac{\omega'}{\omega i}\right) > 0 \quad , \tag{25}$$

nous obtiendrons de l'équation (24)

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2} \quad , \tag{26}$$

formule qui montre, que le nombre m est égal à 1. En introduisant dans l'équation (26) les valeurs des quantités η, η', données par les équations (5), et en y faisant

$$\frac{\omega'}{\omega i} = \varrho \quad , \tag{27}$$

on en obtiendra

$$(28)\qquad \varrho\left(\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2 n\pi\varrho i}\right)+\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{6}+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi i}{\varrho}}\right)=\frac{1}{\pi}\ ,$$

ce qui démontre la proposition suivante:

Si l'on désigne par ϱ une quantité, dont la partie réelle est positive, on aura

$$\varrho\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2 n\pi\varrho i}+\frac{1}{\varrho}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi i}{\varrho}}=\frac{1}{\pi}-\frac{1}{6}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}\right)\ .$$

Pour $\varrho=1$ on en déduit la formule

$$(29)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(e^{n\pi}-e^{-n\pi})^2}=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}\right)\ .$$

De l'équation (2) on tire par différentiation logarithmique

$$(30)\qquad \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}=\frac{1}{u}+\sum_{w}{}'\left(\frac{1}{u-w}+\frac{1}{w}+\frac{u}{w^2}\right)\ ,$$

et pour la fonction $p(u)$, qui est définie par l'égalité

$$(31)\qquad p(u)=-\frac{d}{du}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\ ,$$

on en obtiendra l'expression suivante

$$(32)\qquad p(u)=\frac{1}{u^2}+\sum_{w}{}'\left(\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right)\ .$$

Des équations (18), (19), (20) on déduit par différentiation

$$(33)\qquad p(u+2\omega)=p(u)\ ,\ p(u+2\omega')=p(u)\ ,\ p(u+2\omega'')=p(u)\ .$$

En différentiant de nouveau nous obtiendrons des équations (32) et (33)

$$(34)\qquad p'(u)=-2\sum_{w}\frac{1}{(u-w)^3}$$

et

$$(35)\qquad p'(u+2\omega)=p'(u)\ ,\ p'(u+2\omega')=p'(u)\ ,\ p'(u+2\omega'')=p'(u)\ .$$

En faisant $u = -\omega$, $u = -\omega'$, $u = -\omega''$ dans ces trois formules, on en obtiendra, $p'(u)$ étant une fonction impaire de u,

$$p'(\omega) = 0 \ , \ p'(\omega') = 0 \ , \ p'(\omega'') = 0 \ . \tag{36}$$

Des équations (2), (32), (34) on tire

$$\lim_{u=0} \frac{\sigma(u)}{u} = 1 \ , \ \lim_{u=0} u^2 p(u) = 1 \ , \ \lim_{u=0} u^3 p'(u) = -2 \ . \tag{37}$$

Dans ce qui va suivre nous nous servirons d'une fonction $q(u)$, définie par l'équation

$$q(u) = \sigma(u)^2 p(u) \ ; \tag{38}$$

appliquons à cette formule l'équation (31), nous en obtiendrons

$$q(u) = \sigma'(u)^2 - \sigma(u)\sigma''(u) \ , \tag{39}$$

formule qui montre, que la fonction $q(u)$ est une fonction entière de la variable u.

Au moyen de la fonction $\sigma(u)$ on peut former toute fonction elliptique d'après le théorème suivant, que nous supposons connu:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction elliptique aux périodes 2ω, $2\omega'$, *qui a des zéros et des infinis donnés, sont*

1) *que les zéros soient incongrus aux infinis,*
2) *que le nombre des zéros et le nombre des infinis dans un parallélogramme des périodes soient finis,*
3) *que le nombre des zéros dans un parallélogramme des périodes soit égal au nombre des infinis,*
4) *qu'en désignant les zéros par* u_1 , u_2 , . . u_r *et les infinis par* v_1 , v_2 , . . v_r , *on ait*

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} u_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} v_\lambda = 2k\omega + 2k'\omega' \ ,$$

k, k′ *étant des nombres entiers réels,*

et toute fonction elliptique $\varphi(u)$ *ayant les périodes* 2ω, $2\omega'$ *et admettant des zéros et des infinis, qui satisfont à ces conditions, est donnée par la formule*

$$\varphi(u) = C e^{(2k\eta + 2k'\eta')u} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{\sigma(u - u_\lambda)}{\sigma(u - v_\lambda)} \ ,$$

où C *est une constante arbitraire.*

En choisissant les zéros et les infinis de la fonction $\varphi(u)$ de la manière que

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} u_\lambda - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} v_\lambda = 0 \ , \tag{40}$$

ce qui est toujours possible, en ajoutant à ces quantités des multiples des périodes, on aura évidemment

$$k = 0 \ , \ k' = 0 \ , \tag{41}$$

et par suite on obtiendra dans ce cas pour la fonction $\varphi(u)$ l'expression suivante:

$$\varphi(u) = C \prod_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{\sigma(u - u_\lambda)}{\sigma(u - v_\lambda)} \ . \tag{42}$$

Désignons par v une constante, qui n'est pas une somme de multiples des périodes 2ω, $2\omega'$, la quantité $p(v)$ est évidemment finie, et l'expression

$$p(u) - p(v)$$

sera une fonction elliptique du second ordre admettant les zéros v, $-v$ et l'infini double 0; appliquons la formule (42) à cette fonction, nous aurons

$$p(u) - p(v) = C \cdot \frac{\sigma(u - v)\,\sigma(u + v)}{\sigma(u)^2} \ . \tag{43}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par u^2, nous en obtiendrons pour $u = 0$

$$C = -\frac{1}{\sigma(v)^2} \ , \tag{44}$$

et par suite nous déduirons de l'équation (43)

$$p(u) - p(v) = -\frac{\sigma(u + v)\,\sigma(u - v)}{\sigma(u)^2\,\sigma(v)^2} \ , \tag{45}$$

d'où l'on tire, en y appliquant l'équation (38),

$$\sigma(u + v)\,\sigma(u - v) = -\sigma(u)^2\{\sigma(v)^2 p(u) - q(v)\} \ , \tag{46}$$

formule, qui subsiste évidemment pour toutes les valeurs de v.

La fonction $p'(u)$ est une fonction elliptique du troisième ordre ayant les zéros ω, ω', $-\omega''$ et l'infini triple 0; en appliquant la formule (42) à cette fonction, on aura donc

$$p'(u) = C\frac{\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega'')}{\sigma(u)^3} \quad (47)$$

Multiplions les deux membres de cette équation par u^3, nous en obtiendrons pour $u = 0$

$$C = -\frac{2}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega'')} \quad (48)$$

et par suite on tire de l'équation (47)

$$p'(u) = -\frac{2\sigma(u-\omega)\,\sigma(u-\omega')\,\sigma(u+\omega'')}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega'')\,\sigma(u)^3} \quad (49)$$

En remplaçant u par $-u$, on en obtiendra

$$p'(u) = \frac{2\sigma(u+\omega)\,\sigma(u+\omega')\,\sigma(u-\omega'')}{\sigma(\omega)\,\sigma(\omega')\,\sigma(\omega'')\,\sigma(u)^3} \quad (50)$$

des équations (49) et (50) on tire par multiplication et en y appliquant la formule (45)

$$p'(u)^2 = 4(p(u)-p(\omega))\,(p(u)-p(\omega'))\,(p(u)-p(\omega'')) \quad (51)$$

Par introduction des notations

$$e_1 = p(\omega)\ ,\ e_2 = p(\omega'')\ ,\ e_3 = p(\omega') \quad (52)$$

et

$$g_1 = 4(e_1+e_2+e_3)\ ,\ g_2 = -4(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)\ ,\ g_3 = 4e_1e_2e_3 \quad (53)$$

l'équation (51) peut être mise sous la forme

$$p'(u)^2 = 4(p(u)-e_1)\,(p(u)-e_2)\,(p(u)-e_3) \quad (54)$$

ou

$$p'(u)^2 = 4p(u)^3 - g_1\,p(u)^2 - g_2\,p(u) - g_3 \quad (55)$$

La fonction $u^2p(u)$, étant finie pour $u = 0$, peut être développée en série ordonnée suivant les puissances croissantes de u, et par suite nous aurons dans les environs de $u = 0$ une égalité de la forme

$$u^2p(u) = A_0 + A_1u + A_2u^2 + A_3u^3 + \ldots \quad (56)$$

D'après l'équation (32) on a

$$\lim_{u=0}\left(p(u)-\frac{1}{u^2}\right)=0\ ; \tag{57}$$

par conséquent on aura, $p(u)$ étant une fonction paire de u,

$$A_0=1\ ,\ A_2=0\ ,\ A_{2n+1}=0 \text{ pour } n\geqq 0\ , \tag{58}$$

et de l'équation (56) on tire

$$p(u)=\frac{1}{u^2}+A_4u^2+A_6u^4+\ldots . \tag{59}$$

Introduisons cette expression de la fonction $p(u)$ dans l'équation (55) et égalons les coefficients de u^0, u^{-4}, u^{-6} dans les deux membres de l'égalité ainsi obtenue, nous en tirerons

$$g_1=0\ ,\ A_4=\frac{g_2}{20}\ ,\ A_6=\frac{g_3}{28}\ , \tag{60}$$

et des équations (53) et (55) nous déduirons

$$e_1+e_2+e_3=0\ , \tag{61}$$

$$p'(u)^2=4p(u)^3-g_2p(u)-g_3\ . \tag{62}$$

Par différentiation on tire de l'équation (62)

$$p''(u)=6p(u)^2-\frac{g_2}{2} \tag{63}$$

et, en différentiant de nouveau,

$$p'''(u)=12p(u)p'(u)\ . \tag{64}$$

En mettant l'équation (56) sous la forme

$$p(u)=\sum_{h=0}^{h=\infty}A_hu^{h-2}\ , \tag{65}$$

nous en obtiendrons, en différentiant deux fois,

$$p''(u)=\sum_{h=0}^{h=\infty}(h-2)(h-3)A_hu^{h-4}\ . \tag{66}$$

De l'équation (56) on tire

$$p(u)^2 = \sum_{h=0}^{h=\infty} B_h u^{h-4} \ , \tag{67}$$

où les coefficients B_h sont donnés par la formule

$$B_h = \sum_{r=0}^{r=h} A_r A_{h-r} \ , \tag{68}$$

et les équations (63), (66), (67) donnent

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} (h-2)(h-3) A_h u^{h-4} = 6 \sum_{h=0}^{h=\infty} B_h u^{h-4} - \frac{g_2}{2} \ . \tag{69}$$

En égalant les coefficients de u^{h-4} des deux membres de cette équation, nous en obtiendrons pour $h \geqq 5$

$$(h-2)(h-3) A_h = 6 B_h \tag{70}$$

ou, d'après l'équation (68),

$$(h-2)(h-3) A_h = 6 \sum_{r=0}^{r=h} A_r A_{h-r} \ ; \tag{71}$$

pour $h \geqq 8$ cette formule peut s'écrire

$$(h+1)(h-6) A_h = 6 \sum_{r=4}^{r=h-4} A_r A_{h-r} \ . \tag{72}$$

Les coefficients A_4, A_6 étant donnés par les équations (60), on peut calculer A_8, A_{10}, A_{12}, ... au moyen de la formule (72). Pour $h = 8, 10, 12$ on en déduit

$$A_8 = \frac{g_2^2}{1200} \ , \ A_{10} = \frac{3 g_2 g_3}{6160} \ , \ A_{12} = \frac{g_2^3}{156000} + \frac{g_3^2}{10192} \ , \tag{73}$$

et de l'équation (59) on obtiendra

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \frac{g_2^2}{1200} u^6 + \frac{3 g_2 g_3}{6160} u^8 + \cdots \tag{74}$$

Des formules (60) et (72) on peut conclure, que les coefficients A_h sont des fonctions entières à coefficients rationnels des quantités g_2

et g_3. On peut aussi exprimer les coefficients A_h au moyen des périodes 2ω et $2\omega'$. En effet, de l'équation (32) on tire

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_w{}' \frac{1}{w^2} \left\{ \frac{1}{\left(1 - \frac{u}{w}\right)^2} - 1 \right\} \tag{75}$$

ou, en développant en série,

$$p(u) = \frac{1}{u^2} + 2u \sum_w{}' \frac{1}{w^3} + 3u^2 \sum_w{}' \frac{1}{w^4} + 4u^3 \sum_w{}' \frac{1}{w^5} + \ldots\ldots, \tag{76}$$

et des équations (56) et (76) on obtiendra pour $h \geqq 3$

$$A_h = (h-1) \sum_w{}' \frac{1}{w^h} \ldots \tag{77}$$

Pour $h = 4$ et $h = 6$ on déduit des équations (60) et (77)

$$g_2 = 60 \sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \quad g_3 = 140 \sum_w{}' \frac{1}{w^6}. \tag{78}$$

Les coefficients A_h étant des fonctions entières à coefficients rationnels des quantités g_2 et g_3, on conclura des équations (77) et (78), que toutes les séries

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^h},$$

où $h \geqq 3$, sont des fonctions entières à coefficients rationnels des deux séries

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^4}, \quad \sum_w{}' \frac{1}{w^6}.$$

On trouvera par exemple, que

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^8} = \frac{3}{7}\left(\sum_w{}' \frac{1}{w^4}\right)^2, \quad \sum_w{}' \frac{1}{w^{10}} = \frac{5}{11} \sum_w{}' \frac{1}{w^4} \cdot \sum_w{}' \frac{1}{w^6}, \tag{79}$$

$$\sum_w{}' \frac{1}{w^{12}} = \frac{18}{143}\left(\sum_w{}' \frac{1}{w^4}\right)^3 + \frac{25}{143}\left(\sum_w{}' \frac{1}{w^6}\right)^2.$$

Par là la proposition suivante est démontrée:

Si l'on désigne par ω *et* ω' *deux quantités différentes de zéro, dont le quotient n'est pas réel, et par* h *un nombre entier, la série*

$$\sum_{\mu,\mu}{}' \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^h}$$

sera pour $h \geqq 3$ *une fonction entière à coefficients rationnels des deux séries*

$$\sum_{\mu,\mu}{}' \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^4} \quad , \quad \sum_{\mu,\mu}{}' \frac{1}{(2\mu\omega + 2\mu'\omega')^6} \quad .$$

§ 2.

SUR LA FONCTION ELLIPTIQUE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

Soit $\varphi(u)$ une fonction elliptique quelconque du second ordre, et désignons par u_1, u_2 les zéros et par v_1, v_2 les infinis de la fonction $\varphi(u)$; supposons en outre, que l'on ait

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \quad , \tag{80}$$

il s'ensuit par application des équations (40) et (42), qu'on peut mettre $\varphi(u)$ sous la forme

$$\varphi(u) = C \cdot \frac{\sigma(u - u_1)\sigma(u - u_2)}{\sigma(u - v_1)\sigma(u - v_2)} \quad , \tag{81}$$

ce qui démontre ce théorème.

Théorème I. Soit $\varphi(\mathrm{u})$ *une fonction elliptique du second ordre ayant les périodes* 2ω, $2\omega'$ *et admettant les zéros* u_1, u_2 *et les infinis* v_1, v_2, *et supposons, que*

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \quad ,$$

la fonction $\varphi(\mathrm{u})$ *peut être mise sous la forme*

$$\varphi(u) = C \cdot \frac{\sigma(u - u_1)\sigma(u - u_2)}{\sigma(u - v_1)\sigma(u - v_2)} \quad ,$$

en désignant par C *une constante; et inversement cette expression sera une fonction elliptique du second ordre, pourvu que la condition susdite soit remplie et que les quantités* u_1, u_2 *soient incongrues aux quantités* v_1, v_2.

En remplaçant u par $v_1 + v_2 - u$ dans l'équation (81), on en déduira

$$\varphi(v_1 + v_2 - u) = C \cdot \frac{\sigma(u - u_2)\sigma(u - u_1)}{\sigma(u - v_2)\sigma(u - v_1)} , \tag{82}$$

et des équations (81) et (82) on tire

$$\varphi(v_1 + v_2 - u) = \varphi(u) . \tag{83}$$

Théorème II. En désignant par $\varphi(u)$ *une fonction elliptique quelconque du second ordre ayant les infinis* v_1, v_2, *on aura*

$$\varphi(v_1 + v_2 - u) = \varphi(u) .$$

Dans le cas, où $\varphi(u)$ a l'infini double v_1, cette formule peut s'écrire

$$\varphi(2v_1 - u) = \varphi(u) . \tag{84}$$

Soit maintenant P un parallélogramme des périodes quelconque, et désignons par v_1 et v_2 les infinis de $\varphi(u)$, situés dans le parallélogramme P. Distinguons les deux cas suivants.

1) Si la fonction $\varphi(u)$ a les deux infinis simples v_1, v_2, on peut, d'après un théorème connu, mettre cette fonction sous la forme

$$\varphi(u) = \frac{A}{u - v_1} + \frac{B}{u - v_2} + \chi(u) , \tag{85}$$

où A et B désignent des constantes finies différentes de zéro, et où $\chi(u)$ désigne une fonction, qui est finie dans le parallélogramme P; par suite $\chi(v_1)$ et $\chi(v_2)$ seront des quantités finies. En remplaçant u par $v_1 + v_2 - u$ dans l'équation (85) et en y appliquant la formule (83), nous en obtiendrons

$$\varphi(u) = -\frac{B}{u - v_1} - \frac{A}{u - v_2} + \chi(v_1 + v_2 - u) , \tag{86}$$

et des équations (85) et (86) on tire par soustraction

$$(A + B)\left(\frac{1}{u - v_1} + \frac{1}{u - v_2}\right) = \chi(v_1 + v_2 - u) - \chi(u) . \tag{87}$$

Le second membre de cette équation étant fini pour $u = v_1$ et $u = v_2$, il faut, que

$$A + B = 0 , \tag{88}$$

et, par conséquent, on obtiendra de l'équation (85)

$$\varphi(u) = A\left(\frac{1}{u-v_1} - \frac{1}{u-v_2}\right) + \chi(u) \ . \tag{89}$$

2) Si la fonction $\varphi(u)$ a l'infini double v_1, cette fonction peut se mettre sous la forme

$$\varphi(u) = \frac{A}{(u-v_1)^2} + \frac{B}{u-v_1} + \chi(u) \ , \tag{90}$$

où A et B sont des constantes finies, et où A n'est pas nul; la fonction $\chi(u)$ étant finie dans le parallélogramme P, il s'ensuit, que $\chi(v_1)$ est une quantité finie. En remplaçant dans l'équation (90) u par $2v_1 - u$, et en y appliquant la formule (84), on en obtiendra

$$\varphi(u) = \frac{A}{(u-v_1)^2} - \frac{B}{u-v_1} + \chi(2v_1 - u) \ , \tag{91}$$

et par soustraction on tire des équations (90) et (91)

$$\frac{2B}{u-v_1} = \chi(2v_1 - u) - \chi(u) \ . \tag{92}$$

Le second membre de cette équation étant fini pour $u = v_1$, il faut, que

$$B = 0 \ , \tag{93}$$

et par suite on obtiendra de l'équation (90)

$$\varphi(u) = \frac{A}{(u-v_1)^2} + \chi(u) \ . \tag{94}$$

Des formules (89) et (94) résulte ce théorème.

Théorème III. Soit $\varphi(\mathrm{u})$ *une fonction elliptique quelconque du second ordre; si la fonction* $\varphi(\mathrm{u})$ *admet les deux infinis simples* v_1, v_2 *dans un parallélogramme* P *des périodes,* $\varphi(\mathrm{u})$ *est de la forme*

$$\varphi(u) = A\left(\frac{1}{u-v_1} - \frac{1}{u-v_2}\right) + \chi(u) \ ;$$

mais si la fonction a l'infini double v_1 *dans le parallélogramme* P, $\varphi(u)$ *est de la forme*

$$\varphi(u) = \frac{A}{(u - v_1)^2} + \chi(u) \ ;$$

dans les deux cas on désigne par A *une constante, différente de zéro, et par* $\chi(u)$ *une fonction, qui est finie dans le parallélogramme* P.

D'après le théorème I toute fonction elliptique $\varphi(u)$ du second ordre peut s'exprimer au moyen de la fonction $\sigma(u)$; maintenant nous démontrerons, qu'on peut exprimer $\varphi(u)$ au moyen de la fonction $p(u)$. Remplaçons à cet effet u par $u - \frac{u_1 + u_2}{2}$ et v par $\frac{u_2 - u_1}{2}$ dans la formule (46), nous en déduirons

$$\sigma(u - u_1)\sigma(u - u_2) = \tag{95}$$

$$-\sigma\left(u - \frac{u_1 + u_2}{2}\right)^2 \left\{\sigma\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)^2 p\left(u - \frac{u_1 + u_2}{2}\right) - q\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)\right\} ,$$

formule, qui subsiste pour toutes les valeurs des quantités u_1 et u_2; de même nous trouverons

$$\sigma(u - v_1)\,\sigma(u - v_2) = \tag{96}$$

$$-\sigma\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right)^2 \left\{\sigma\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right)^2 p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) - q\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right)\right\} .$$

Appliquons ces deux formules à l'équation (81), nous en obtiendrons, d'après l'équation (80),

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)^2 p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) - q\left(\frac{u_2 - u_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right)^2 p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) - q\left(\frac{v_2 - v_1}{2}\right)} , \tag{97}$$

ce qui démontre le théorème suivant.

Théorème IV. Soit $\varphi(u)$ *une fonction elliptique du second ordre ayant les périodes* 2ω, $2\omega'$ *et admettant les zéros* u_1, u_2 *et les infinis* v_1, v_2, *et supposons que*

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \ ,$$

la fonction $\varphi(u)$ *peut se mettre sous la forme*

$$\varphi(u) = C\,\frac{\sigma\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)^2 p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-q\left(\frac{u_2-u_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{v_2-v_1}{2}\right)^2 p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-q\left(\frac{v_2-v_1}{2}\right)},$$

où l'on désigne par C *une constante.*

D'après ce théorème la fonction elliptique générale du second ordre $\varphi(u)$ peut se mettre sous la forme

$$\varphi(u) = \frac{\alpha p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\beta}{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta}, \tag{98}$$

où α, β, γ, δ désignent des quantités constantes, et où $\alpha\delta-\beta\gamma$ ne s'annule pas, car autrement la fraction du second membre se réduirait à une constante. Cette formule subsiste, quels que soient les infinis v_1 et v_2. En choisissant ces infinis ainsi, que le quotient $\frac{v_2-v_1}{2}$ ne soit pas une somme de multiples des périodes, ce qui est toujours possible, la quantité $\sigma\left(\frac{v_2-v_1}{2}\right)$ ne s'annulera pas, et par suite le coefficient γ ne s'évanouira pas. Dans le cas, où la fonction $\varphi(u)$ admet un infini double v_1, on peut aussi mettre cette fonction sous une autre forme; en effet, faisons $v_2 = v_1$ dans l'équation (97), nous en obtiendrons

$$\varphi(u) = \alpha p(u-v_1)+\beta, \tag{99}$$

où α, β sont des quantités constantes, et où α ne s'annule pas.

Par là nous avons démontré ce théorème.

Théorème V. Soit φ(u) *une fonction elliptique du second ordre ayant les périodes* 2ω, $2\omega'$ *et admettant les infinis* v_1, v_2, *la fonction* φ(u) *peut se mettre sous la forme*

$$\varphi(u) = \frac{\alpha p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\beta}{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta},$$

en désignant par α, β, γ, δ *des quantités constantes, qui jouissent de la propriété, que* $\alpha\delta - \beta\gamma$ *ne s'évanouit pas; en choisissant les infinis* v_1, v_2 *ainsi que la quantité* $\frac{v_2 - v_1}{2}$ *ne soit pas une somme de multiples des périodes, le coefficient* γ *sera différent de zéro. Dans le cas, où* $\varphi(u)$ *a l'infini double* v_1, *on aura aussi*

$$\varphi(u) = \alpha p(u - v_1) + \beta \ ,$$

où α, β *sont des constantes, et où* α *ne s'annule pas.*

Soient $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes 2ω, $2\omega'$, et désignons par v_1, v_2 les infinis de $\varphi(u)$ et par v_1', v_2' les infinis de $\psi(u)$. Supposons de plus, que l'on ait

$$v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \ . \tag{100}$$

En appliquant le théorème précédent aux fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, nous en obtiendrons

$$\varphi(u) = \frac{\alpha p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \beta}{\gamma p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \delta} \tag{101}$$

et

$$\psi(u) = \frac{\alpha' p\left(u - \frac{v_1' + v_2'}{2}\right) + \beta'}{\gamma' p\left(u - \frac{v_1' + v_2'}{2}\right) + \delta'} \ , \tag{102}$$

où $\alpha\delta - \beta\gamma$ et $\alpha'\delta' - \beta'\gamma'$ ne s'annulent pas. De l'égalité (100) on tire

$$p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) = p\left(u - \frac{v_1' + v_2'}{2}\right) \ , \tag{103}$$

et en éliminant cette quantité entre les équations (101), (102), nous en obtiendrons

$$\frac{\delta\varphi(u) - \beta}{\gamma\varphi(u) - \alpha} = \frac{\delta'\psi(u) - \beta'}{\gamma'\psi(u) - \alpha'} \ ; \tag{104}$$

en faisant

$$C_0 = \gamma'\delta - \gamma\delta' \ , \ C_1 = \beta'\gamma - \alpha'\delta \ , \ C_2 = \alpha\delta' - \beta\gamma' \ , \ C_3 = \alpha'\beta - \alpha\beta' \ , \tag{105}$$

l'équation (104) peut s'écrire

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ . \tag{106}$$

Des équations (105) on déduit

$$C_0 C_3 - C_1 C_2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') \ , \tag{107}$$

et, par suite, la quantité $C_0 C_3 - C_1 C_2$ ne s'annulera pas .

Par là nous avons démontré ce théorème.

Théorème VI. Soient $\varphi(u)$ *et* $\psi(u)$ *deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes, et supposons, que la somme des infinis soit la même pour ces deux fonctions, il existe entre elles une relation de la forme*

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ ,$$

où C_0 , C_1 , C_2 , C_3 *sont des constantes, qui jouissent de la propriété, que* $C_0 C_3 - C_1 C_2$ *ne s'annule pas.*

De ce théorème nous déduirons quelques corollaires. Soient $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes; en supposant que la somme des zéros soit la même pour ces fonctions, les expressions

$$\frac{1}{\varphi(u)} \ , \ \frac{1}{\psi(u)}$$

seront évidemment des fonctions elliptiques du second ordre, et pour ces fonctions la somme des infinis sera la même. En appliquant à ces fonctions le théorème précédent, nous obtiendrons une égalité de la forme

$$\frac{C_0}{\varphi(u)\psi(u)} + \frac{C_1}{\varphi(u)} + \frac{C_2}{\psi(u)} + C_3 = 0 \ , \tag{108}$$

où $C_0 C_3 - C_1 C_2$ ne s'évanouit pas. Remplaçons C_0 , C_1 , C_2 , C_3 par C_3 , C_2 , C_1 , C_0 , nous déduirons de l'équation (108)

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ , \tag{109}$$

où la quantité $C_0 C_3 - C_1 C_2$ est différente de zéro.

De là résulte le corollaire suivant.

Corollaire 1. Soient $\varphi(u)$ *et* $\psi(u)$ *deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes, et supposons, que la somme des zéros soit la même pour ces deux fonctions, il existe entre elles une relation de la forme*

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ ,$$

où C_0, C_1, C_2, C_3 *désignent des constantes, qui jouissent de la propriété, que* $C_0C_3 - C_1C_2$ *ne s'annule pas.*

En supposant que les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ admettent les mêmes infinis, nous aurons d'après le théorème VI

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ , \tag{110}$$

où $C_0C_3 - C_1C_2$ ne s'annule pas, d'où l'on tire, en divisant par $\varphi(u)\,\psi(u)$,

$$C_0 + \frac{C_1}{\psi(u)} + \frac{C_2}{\varphi(u)} + \frac{C_3}{\varphi(u)\,\psi(u)} = 0 \ . \tag{111}$$

Désignons par v_1 un infini commun des fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, et faisons $u = v_1$ dans l'équation (111), nous en déduirons

$$C_0 = 0 \ , \tag{112}$$

et par suite l'équation (110) peut s'écrire

$$C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ , \tag{113}$$

où la quantité C_1C_2 est différente de zéro, ce qui démontre ce corollaire.

Corollaire 2. Soient φ(u) *et* ψ(u) *deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes et aux mêmes infinis, il existe entre elles une relation de la forme*

$$C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ ,$$

où C_1, C_2, C_3 *sont des constantes, qui jouissent de la propriété, que* C_1C_2 *ne s'annule pas.*

Supposons, que les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ admettent les mêmes zéros, nous aurons d'après le corollaire 1

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ , \tag{114}$$

où $C_0C_3 - C_1C_2$ ne s'évanouit pas. Soit u_1 un zéro commun des fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$, on obtiendra de l'équation (114) par la substitution $u = u_1$

$$C_3 = 0 \ , \tag{115}$$

et par suite la formule (114) se réduit à

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) = 0 \ , \tag{116}$$

où C_1C_2 ne s'annule pas. De là résulte ce corollaire.

Corollaire 3. Soient φ(u) *et* ψ(u) *deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes et aux mêmes zéros, il existe entre elles une relation de la forme*

$$C_0\varphi(u)\psi(u) + C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) = 0 \ ,$$

où C_0, C_1, C_2 *sont des constantes, qui jouissent de la propriété, que* C_1C_2 *ne s'annule pas.*

Supposons enfin, que les fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ aient les mêmes zéros et les mêmes infinis, nous aurons d'après le corollaire 2

$$C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) + C_3 = 0 \ , \tag{117}$$

où C_1C_2 ne s'évanouit pas. Désignons par u_1 un zéro commun des fonctions $\varphi(u)$, $\psi(u)$, nous tirerons de l'équation (117), en y faisant $u = u_1$,

$$C_3 = 0 \ , \tag{118}$$

et, par suite, l'équation (117) peut s'écrire

$$C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) = 0 \ , \tag{119}$$

ce qui démontre le corollaire suivant.

Corollaire 4. Soient φ(u) *et* ψ(u) *deux fonctions elliptiques du second ordre aux mêmes périodes et aux mêmes zéros et infinis, il existe entre elles une relation de la forme*

$$C_1\varphi(u) + C_2\psi(u) = 0 \ ,$$

où C_1, C_2 *sont des constantes, qui jouissent de la propriété, que* C_1C_2 *ne s'annule pas.*

Soit $\varphi(u)$ une fonction elliptique du second ordre aux périodes 2ω, $2\omega'$, et supposons d'abord, que la fonction $\varphi(u)$ ait les deux infinis simples v_1, v_2, il s'ensuit, que les quatre quantités

$$\frac{v_1+v_2}{2} \ , \ \frac{v_1+v_2}{2}+\omega \ , \ \frac{v_1+v_2}{2}+\omega'' \ , \ \frac{v_1+v_2}{2}+\omega' \tag{120}$$

sont incongrues à v_1 et à v_2; puisque la fonction $\varphi(u)$ ne devient infinie que pour $u \equiv v_1$ et pour $u \equiv v_2$, on en conclura, que les quatre quantités

$$(121) \quad \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right)$$

seront finies.

Dans le cas, où $\varphi(u)$ admet l'infini double v_1, les trois quantités

$$(122) \quad v_1+\omega,\ v_1+\omega'',\ v_1+\omega'$$

sont évidemment incongrues à v_1; puisque dans ce cas la fonction $\varphi(u)$ ne devient infinie que pour $u \equiv v_1$, nous en conclurons, que les trois quantités

$$(123) \quad \varphi(v_1+\omega),\ \varphi(v_1+\omega''),\ \varphi(v_1+\omega')$$

seront finies.

De là résulte ce théorème.

Théorème VII. Si la fonction elliptique $\varphi(\mathrm{u})$ *du second ordre, ayant les périodes* 2ω, $2\omega'$, *admet les deux infinis simples* v_1, v_2, *les quantités*

$$\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right)$$

seront finies; si la fonction $\varphi(\mathrm{u})$ *admet l'infini double* v_1, *les quantités*

$$\varphi(v_1+\omega),\ \varphi(v_1+\omega''),\ \varphi(v_1+\omega')$$

seront finies.

Supposons que la fonction $\varphi(u)$ ait les deux infinis simples v_1, v_2, et désignons par a une quantité telle que la quantité

$$\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+a\right)$$

soit finie, l'expression

$$\varphi(u)-\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+a\right)$$

sera une fonction elliptique du second ordre ayant les infinis simples v_1 et v_2. Cette fonction admet évidemment le zéro

$$(124) \quad u_1' = \frac{v_1+v_2}{2}+a\ ,$$

et puisque la somme des zéros est égale à la somme des infinis, le second zéro sera

$$u_2' = \frac{v_1 + v_2}{2} - a \ . \tag{125}$$

En faisant successivement

$$a = 0 \ , \ a = \omega \ , \ a = \omega'' \ , \ a = \omega' \ , \tag{126}$$

ce qui est permis d'après le théorème VII, nous en conclurons, que chacune des quatre fonctions

$$\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \ , \ \varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega\right) \ , \ \varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega''\right), \tag{127}$$

$$\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'\right)$$

admet les infinis, v_1, v_2, et que la première de ces fonctions a le zéro double $\frac{v_1 + v_2}{2}$, la deuxième a le zéro double $\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega$, la troisième a le zéro double $\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega''$, la quatrième a le zéro double $\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'$. Il s'ensuit, que ces quatre fonctions n'auront pas de zéro commun, et par suite les quatre quantités

$$\varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \ , \ \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega\right) \ , \ \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega''\right) \ , \ \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'\right) \tag{128}$$

seront inégales entre elles.

Supposons, en second lieu, que la fonction $\varphi(u)$ ait l'infini double v_1, et soit a une quantité telle, que la quantité

$$\varphi(v_1 + a)$$

soit finie, l'expression

$$\varphi(u) - \varphi(v_1 + a)$$

sera une fonction elliptique du second ordre, admettant l'infini double v_1. Cette fonction a évidemment le zéro

$$u_1' = v_1 + a \ , \tag{129}$$

et puisque la somme des zéros est égale à la somme des infinis, le second zéro sera

$$u_2' = v_1 - a \ . \tag{130}$$

En y faisant successivement

$$a = \omega \ , \ a = \omega'' \ , \ a = \omega' \ , \tag{131}$$

ce qui est permis d'après le théorème VII, nous trouverons, que chacune des trois fonctions

$$\varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega) \ , \ \varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega'') \ , \ \varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega') \tag{132}$$

admet l'infini double v_1, et que la première de ces fonctions a le zéro double $v_1 + \omega$, la deuxième a le zéro double $v_1 + \omega''$, la troisième a le zéro double $v_1 + \omega'$. Ces trois fonctions n'ayant pas de zéro commun, on en conclura, que les trois quantités

$$\varphi(v_1 + \omega) \ , \ \varphi(v_1 + \omega'') \ , \ \varphi(v_1 + \omega') \tag{133}$$

seront inégales entre elles.

Théorème VIII. Si une fonction elliptique $\varphi(u)$ *du second ordre aux périodes* 2ω, $2\omega'$ *admet les deux infinis simples* v_1, v_2, *les quantités*

$$\varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \ , \ \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega\right) \ , \ \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega''\right) \ , \ \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'\right)$$

seront inégales entre elles; si la fonction $\varphi(u)$ *admet l'infini double* v_1, *les quantités*

$$\varphi(v_1 + \omega) \ , \ \varphi(v_1 + \omega'') \ , \ \varphi(v_1 + \omega')$$

seront inégales entre elles.

Choisissant les infinis v_1 et v_2 de la fonction $\varphi(u)$ de la manière, que le quotient $\frac{v_2 - v_1}{2}$ ne soit pas une somme de multiples des périodes, on peut d'après le théorème V mettre $\varphi(u)$ sous la forme

$$\varphi(u) = \frac{\alpha p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \beta}{\gamma p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \delta} \ , \tag{134}$$

α, β, γ, δ étant des constantes, qui jouissent des propriétés, que $\alpha\delta - \beta\gamma$ et γ ne s'annulent pas. Remplaçons u par $u + \frac{v_1 + v_2}{2}$, nous en obtiendrons

$$\varphi\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \cdot \frac{1}{p(u) + \frac{\delta}{\gamma}} \cdot \tag{135}$$

Maintenant nous développerons cette expression en série. Si l'on désigne par a une quantité finie quelconque, l'expression

$$\frac{1}{p(u) + a}$$

sera une fonction paire de u, qui s'évanouit pour $u = 0$; par suite on aura dans les environs de $u = 0$ une égalité de la forme

$$\frac{1}{p(u) + a} = L_1 u^2 - L_2 u^4 + L_3 u^6 - L_4 u^8 + \ldots . \tag{136}$$

En y appliquant la formule (74), nous en tirerons

$$(L_1 u^2 - L_2 u^4 + L_3 u^6 - L_4 u^8 + \ldots)\left(\frac{1}{u^2} + a + \frac{g_2}{20} u^2 + \frac{g_3}{28} u^4 + \ldots\right) = 1 . \tag{137}$$

Égalons les coefficients de u^0, u^2, u^4, u^6 dans les deux membres de cette équation, nous en obtiendrons

$$L_1 = 1 \ , \ L_2 = a \ , \ L_3 = a^2 - \frac{g_2}{20} \ , \ L_4 = a^3 - \frac{a g_2}{10} + \frac{g_3}{28} \ , \tag{138}$$

et, par suite, l'équation (136) peut s'écrire

$$\frac{1}{p(u) + a} = u^2 - a u^4 + \left(a^2 - \frac{g_2}{20}\right) u^6 - \left(a^3 - \frac{a g_2}{10} + \frac{g_3}{28}\right) u^8 + \cdots \tag{139}$$

Par application de cette formule on déduit de l'équation (135)

$$\varphi\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2} \left\{ u^2 - \frac{\delta}{\gamma} u^4 \right. \tag{140}$$

$$\left. + \left(\frac{\delta^2}{\gamma^2} - \frac{g_2}{20}\right) u^6 - \left(\frac{\delta^3}{\gamma^3} - \frac{\delta g_2}{10\gamma} + \frac{g_3}{28}\right) u^8 + \cdots \right\} .$$

Nous mettons cette équation sous la forme

$$\varphi\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}\right)=c_0+c_1u^2+c_2u^4+c_3u^6+c_4u^8+\ldots\ , \tag{141}$$

où les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 sont donnés par les formules

$$c_0=\frac{\alpha}{\gamma}\ ,\ c_1=-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\ ,\ c_2=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\cdot\frac{\delta}{\gamma}\ , \tag{142}$$

$$c_3=-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\left(\frac{\delta^2}{\gamma^2}-\frac{g_2}{20}\right)\ ,\ c_4=\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\left(\frac{\delta^3}{\gamma^3}-\frac{\delta g_2}{10\gamma}+\frac{g_3}{28}\right)\ .$$

De la deuxième de ces formules on peut conclure, que le coefficient c_1 ne s'annule pas. En éliminant les deux quantités

$$\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\ ,\ \frac{\delta}{\gamma}$$

entre les équations (142), nous en déduirons

$$\frac{c_2^2-c_1c_3}{c_1^2}=\frac{g_2}{20}\ ,\ \frac{2c_1c_2c_3-c_1^2c_4-c_2^3}{c_1^3}=\frac{g_3}{28}\ . \tag{143}$$

Par là nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème IX. Soit $\varphi(u)$ *une fonction elliptique quelconque du second ordre aux périodes* 2ω, $2\omega'$; *en choisissant les infinis* v_1, v_2, *de cette fonction ainsi, que la quantité* $\frac{v_2-v_1}{2}$ *ne soit pas une somme de multiples des périodes, nous aurons dans les environs de* $u=0$ *une égalité de la forme*

$$\varphi\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}\right)=c_0+c_1u^2+c_2u^4+c_3u^6+c_4u^8+\ldots\ ,$$

où les coefficients c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 *jouissent des propriétés, que* c_1 *ne s'annule pas, et que*

$$\frac{c_2^2-c_1c_3}{c_1^2}=\frac{g_2}{20}\ ,\ \frac{2c_1c_2c_3-c_1^2c_4-c_2^3}{c_1^3}=\frac{g_3}{28}\ .$$

§ 3.

SUR LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION ELLIPTIQUE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

En désignant par $\varphi(u)$ une fonction elliptique du second ordre aux périodes 2ω, $2\omega'$, la dérivée $\varphi'(u)$ sera évidemment une fonction elliptique ayant les mêmes périodes, et la fonction $\varphi'(u)$ ne deviendra infinie que pour les valeurs de u, qui rendent $\varphi(u)$ infinie. Si la fonction $\varphi(u)$ admet deux infinis simples v_1, v_2, $\varphi'(u)$ aura les infinis doubles v_1, v_2, et par suite $\varphi'(u)$ sera une fonction elliptique du quatrième ordre, mais si la fonction $\varphi(u)$ a l'infini double v_1, la dérivée $\varphi'(u)$ aura l'infini triple v_1, et par conséquent $\varphi'(u)$ sera une fonction elliptique du troisième ordre. Maintenant nous déterminerons les zéros de la dérivée $\varphi'(u)$. Par différentiation on déduit de l'équation (83)

$$\varphi'(v_1 + v_2 - u) = -\varphi'(u) \ . \tag{144}$$

Supposons, que la fonction $\varphi(u)$ ait les deux infinis simples v_1, v_2, et substituons dans l'équation (144) successivement

$$u = \frac{v_1 + v_2}{2} \ , \ u = \frac{v_1 + v_2}{2} + \omega \ , \ u = \frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'' \ , \ u = \frac{v_1 + v_2}{2} + \omega' \ , \tag{145}$$

nous en tirerons, la fonction $\varphi(u)$ admettant les périodes 2ω, $2\omega'$,

$$\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) = -\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \ , \tag{146}$$

$$\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega\right) = -\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega\right) \ , \tag{147}$$

$$\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega''\right) = -\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega''\right) \ , \tag{148}$$

$$\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'\right) = -\varphi'\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'\right) \ , \tag{149}$$

La dérivée $\varphi'(u)$ étant finie pour toutes les valeurs de u, qui rendent $\varphi(u)$ finie, on conclura du théorème VII, que les quantités, qui

entrent dans les équations (146), (147), (148), (149) sont finies, et par suite on en obtiendra

$$(150)\quad \varphi'\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)=0\ ,\ \varphi'\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right)=0\ ,\ \varphi'\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right)=0\ ,$$

$$\varphi'\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right)=0\ .$$

Supposons, en second lieu, que la fonction $\varphi(u)$ ait l'infini double v_1, la formule (144) peut s'écrire

$$(151)\qquad \varphi'(2v_1-u)=-\varphi'(u)\ ;$$

en y faisant successivement

$$(152)\qquad u=v_1+\omega\ ,\ u=v_1+\omega''\ ,\ u=v_1+\omega'\ ,$$

nous en obtiendrons

$$(153)\qquad \varphi'(v_1+\omega)=-\varphi'(v_1+\omega)\ ,$$

$$(154)\qquad \varphi'(v_1+\omega'')=-\varphi'(v_1+\omega'')\ ,$$

$$(155)\qquad \varphi'(v_1+\omega')=-\varphi'(v_1+\omega')\ .$$

Puisque les quantités, qui entrent dans ces équations sont finies d'après le théorème VII, on en déduira

$$(156)\qquad \varphi'(v_1+\omega)=0\ ,\ \varphi'(v_1+\omega'')=0\ ,\ \varphi'(v_1+\omega')=0\ .$$

Des formules (150) et (156) résulte ce théorème.

Théorème X. Soit $\varphi(u)$ *une fonction elliptique du second ordre aux périodes* 2ω, $2\omega'$; *si la fonction* $\varphi(u)$ *a les deux infinis simples* v_1, v_2, *la dérivée* $\varphi'(u)$ *sera une fonction elliptique du quatrième ordre ayant les zéros simples*

$$\frac{v_1+v_2}{2}\ ,\ \frac{v_1+v_2}{2}+\omega\ ,\ \frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\ ,\ \frac{v_1+v_2}{2}+\omega'$$

et les infinis doubles v_1, v_2; *mais si la fonction* $\varphi(u)$ *a l'infini double* v_1, *la dérivée* $\varphi(u)$ *sera une fonction elliptique du troisième ordre ayant les zéros simples*

$$v_1+\omega\ ,\ v_1+\omega''\ ,\ v_1+\omega'$$

et l'infini triple v_1.

Corollaire. La dérivée d'une fonction elliptique du second ordre n'admet que des zéros simples.

D'après cela nous déduirons une relation entre une fonction elliptique quelconque $\varphi(u)$ du second ordre et sa dérivée; à cet effet nous distinguerons les deux cas suivants.

1) Supposons, que la fonction $\varphi(u)$ ait deux infinis simples v_1, v_2, nous aurons d'après le théorème V

$$\varphi(u) = \frac{\alpha p\left(u - \frac{v_1+v_2}{2}\right) + \beta}{\gamma p\left(u - \frac{v_1+v_2}{2}\right) + \delta}, \tag{157}$$

où $\alpha\delta - \beta\gamma$ et γ ne s'évanouissent pas. D'après le théorème VII les quatre quantités

$$\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right),\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right) \tag{158}$$

sont finies, et des équations (157) et (52) on tire

$$\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) = \frac{\alpha}{\gamma},\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right) = \frac{\alpha e_1+\beta}{\gamma e_1+\delta}, \tag{159}$$

$$\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right) = \frac{\alpha e_2+\beta}{\gamma e_2+\delta},\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right) = \frac{\alpha e_3+\beta}{\gamma e_3+\delta},$$

et par suite les dénominateurs de ces fractions seront différents de zéro. Des équations (157) et (159) on déduit

$$\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\left\{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta\right\}}, \tag{160}$$

$$\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right) = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\left\{p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-e_1\right\}}{(\gamma e_1+\delta)\left\{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta\right\}}, \tag{161}$$

$$\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right) = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\left\{p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-e_2\right\}}{(\gamma e_2+\delta)\left\{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta\right\}} \tag{162}$$

$$(163)\qquad \varphi(u)-\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right)=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\left\{p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-e_3\right\}}{(\gamma e_3+\delta)\left\{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta\right\}}\,.$$

Par différentiation on tire de l'équation (157)

$$(164)\qquad \varphi'(u)=\frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)\,p'\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\left\{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta\right\}^2}\,,$$

et par application de la formule (54), on en obtiendra

$$(165)\qquad \varphi'(u)^2=\frac{4(\alpha\delta-\beta\gamma)^2\left\{p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-e_1\right\}\left\{p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-e_2\right\}\left\{p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)-e_3\right\}}{\left\{\gamma p\left(u-\frac{v_1+v_2}{2}\right)+\delta\right\}^4}\,.$$

Des équations (160), (161), (162), (163), (165) on conclura

$$(166)\qquad \varphi'(u)^2=K\left\{\varphi(u)-\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\right\}\left\{\varphi(u)-\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right)\right\}\,.$$

$$\cdot\left\{\varphi(u)-\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right)\right\}\left\{\varphi(u)-\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right)\right\}\,,$$

où l'on désigne par K une constante différente de zéro.

2) Soit supposé, en second lieu, que la fonction $\varphi(u)$ ait l'infini double v_1, nous obtiendrons d'après le théorème V

$$(167)\qquad \varphi(u)=\alpha p(u-v_1)+\beta\,,$$

où α ne s'annule pas. Les trois quantités

$$(168)\qquad \varphi(v_1+\omega)\,,\ \varphi(v_1+\omega'')\,,\ \varphi(v_1+\omega')$$

étant finies d'après le théorème VII, lés équations (167) et (52) donnent

$$(169)\qquad \varphi(v_1+\omega)=\alpha e_1+\beta\,,\ \varphi(v_1+\omega'')=\alpha e_2+\beta\,,\ \varphi(v_1+\omega')=\alpha e_3+\beta\,,$$

et des équations (167) et (169) on tire

$$(170)\qquad \varphi(u)-\varphi(v_1+\omega)=\alpha\{p(u-v_1)-e_1\}\,,$$

$$(171) \qquad \varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega'') = \alpha\{p(u - v_1) - e_2\} \ ,$$

$$(172) \qquad \varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega') = \alpha\{p(u - v_1) - e_3\} \ .$$

Par différentiation on obtiendra de l'équation (167)

$$(173) \qquad \varphi'(u) = \alpha p'(u - v_1) \ ;$$

en y appliquant la formule (54), nous en tirerons

$$(174) \quad \varphi'(u)^2 = 4\alpha^2\{p(u - v_1) - e_1\}\{p(u - v_1) - e_2\}\{p(u - v_1) - e_3\} \ ,$$

et des équations (170), (171), (172), (174) nous obtiendrons

$$(175) \quad \varphi'(u)^2 = K\{\varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega)\}\{\varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega'')\}\{\varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega')\}.$$

Des formules (166) et (175) résulte le théorème suivant.

Théorème XI. Soit $\varphi(\mathrm{u})$ *une fonction elliptique du second ordre aux périodes* 2ω, $2\omega'$; *si la fonction* $\varphi(\mathrm{u})$ *admet les deux infinis simples* v_1, v_2, *on aura*

$$\varphi'(u)^2 = K\left\{\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right)\right\}\left\{\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega\right)\right\} .$$

$$. \left\{\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega''\right)\right\}\left\{\varphi(u) - \varphi\left(\frac{v_1 + v_2}{2} + \omega'\right)\right\} \ ,$$

mais si la fonction $\varphi(\mathrm{u})$ *a l'infini double* v_1, *on aura*

$$\varphi'(u)^2 = K\{\varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega)\}\{\varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega'')\}\{\varphi(u) - \varphi(v_1 + \omega')\} \ ,$$

en désignant par K *une constante dans les deux formules.*

De ce théorème on peut conclure, qu'il existe entre une fonction elliptique quelconque $\varphi(u)$ du second ordre et sa dérivée $\varphi'(u)$ une relation de la forme

$$(176) \qquad \varphi'(u)^2 = a_0\varphi(u)^4 + 4a_1\varphi(u)^3 + 6a_2\varphi(u)^2 + 4a_3\varphi(u) + a_4 \ ,$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 désignent des constantes telles, que a_0 et a_1 ne s'annulent pas simultanément. Il est évident, qu'il n'existe qu'une seule relation de cette forme entre $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$, car autrement deux fonctions entières de $\varphi(u)$ du troisième ou du quatrième degré à coefficients inégaux

coincideraient pour toutes les valeurs de $\varphi(u)$, ce qui est évidemment impossible.

En posant

$$\psi(u) = \frac{1}{\varphi(u)} , \tag{177}$$

$\psi(u)$ sera aussi une fonction elliptique du second ordre, dont les zéros coincideront avec les infinis de la fonction $\varphi(u)$, et dont les infinis coincideront avec les zéros de $\varphi(u)$, et des équations (176) et (177) on obtiendra

$$\psi'(u)^2 = a_4\psi(u)^4 + 4a_3\psi(u)^3 + 6a_2\psi(u)^2 + 4a_1\psi(u) + a_0 . \tag{178}$$

Des équations (176) et (178) nous déduirons quelques propriétés des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4. En appliquant le théorème VIII au théorème XI et à la formule (176), on trouvera, que le polynôme

$$a_0\varphi^4 + 4a_1\varphi^3 + 6a_2\varphi^2 + 4a_3\varphi + a_4 , \tag{179}$$

considéré comme fonction de φ, n'a que des zéros simples. Maintenant nous distinguerons les cas suivants.

1) Si la fonction $\varphi(u)$ admet deux infinis simples, la fonction $\psi(u)$ aura deux zéros simples; par suite $\psi(u)$ et $\psi'(u)$ n'auront pas de zéro commun, et de l'équation (178) on peut conclure, que a_0 ne s'annule pas.

2) Si la fonction $\varphi(u)$ a un infini double, la fonction $\psi(u)$ aura un zéro double; par suite $\psi(u)$ et $\psi'(u)$ auront un zéro commun, et de l'équation (178) on conclura, que a_0 s'annule.

3) Si la fonction $\varphi(u)$ admet deux zéros simples, les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ n'auront pas de zéro commun, et de l'équation (176) on peut conclure, que a_4 ne s'annule pas.

4) Si la fonction $\varphi(u)$ admet un zéro double, les fonctions $\varphi(u)$ et $\varphi'(u)$ auront un zéro commun; par suite on conclura de l'équation (176), que a_4 s'annule.

Par là nous avons démontré ce théorème.

Théorème XII. Entre une fonction elliptique quelconque du second ordre $\varphi(u)$ *et sa dérivée* $\varphi'(u)$ *il existe une relation de la forme*

$$\varphi'(u)^2 = a_0\varphi(u)^4 + 4a_1\varphi(u)^3 + 6a_2\varphi(u)^2 + 4a_3\varphi(u) + a_4 ,$$

où a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 *désignent des quantités constantes, qui jouissent des propriétés suivantes.*

1) Le polynôme

$$a_0\varphi^4 + 4a_1\varphi^3 + 6a_2\varphi^2 + 4a_3\varphi + a_4 \ ,$$

considéré comme fonction de φ, *est du quatrième ou du troisième degré, et ce polynôme n'a que des zéros simples.*

2) Si la fonction $\varphi(u)$ *admet deux zéros simples et deux infinis simples* a_0 *et* a_4 *ne s'annuleront pas.*

3) Si la fonction $\varphi(u)$ *admet deux zéros simples et un infini double,* a_0 *s'annulera, mais* a_4 *ne s'annulera pas.*

4) Si la fonction $\varphi(u)$ *admet un zéro double et deux infinis simples,* a_0 *ne s'annulera pas, mais* a_4 *sera égal à zéro.*

5) Si la fonction $\varphi(u)$ *admet un zéro double et un infini double,* a_0 *et* a_4 *s'annuleront.*

§ 4.

SUR LES INVARIANTS DE LA FONCTION ENTIÈRE DU QUATRIÈME DEGRÉ.

Soit $f(x)$ une fonction entière de la variable x, dont le degré est au plus égal à n, on peut mettre $f(x)$ sous la forme

$$(180) \qquad f(x) = a_0x^n + \frac{n}{1}a_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a_2x^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}a_{n-1}x + a_n \ ,$$

en désignant par $a_0, a_1, \ldots a_n$ des quantités constantes. Par les deux substitutions

$$(181) \qquad x = \beta y + \gamma \ , \ x = \frac{1}{\beta y} \ ,$$

où l'on désigne par y une nouvelle variable et par β, γ deux quantités constantes quelconques, excepté que β ne s'annule pas, la fonction $f(x)$ se transforme en

$$(182) \quad f(\beta y + \gamma) = A_0y^n + \frac{n}{1}A_1y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_2y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}A_{n-1}y + A_n$$

et en

$$(183) \quad f\left(\frac{1}{\beta y}\right) = \frac{1}{\beta^n y^n}\left\{B_0y^n + \frac{n}{1}B_1y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}B_2y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}B_{n-1}y + B_n\right\} ,$$

où les coefficients A_0, A_1 . . . A_n et B_0, B_1, . . . B_n dépendent de a_0, a_1 . . . a_n et des coefficients de substitution β et γ. Cela posé, nous établissons la définition suivante.

Soit

$$f(x) = a_0x^n + \frac{n}{1}a_1x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}a_2x^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}a_{n-1}x + a_n$$

une fonction entière, dont le degré est au plus égal à n, et supposons, que par les substitutions

$$x = \beta y + \gamma \ , \ x = \frac{1}{\beta y}$$

cette fonction se transforme en

$$f(\beta y + \gamma) = A_0y^n + \frac{n}{1}A_1y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}A_2y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}A_{n-1}y + A_n$$

et en

$$f\left(\frac{1}{\beta y}\right) = \frac{1}{\beta^n y^n}\left\{B_0y^n + \frac{n}{1}B_1y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}B_2y^{n-2} + \ldots + \frac{n}{1}B_{n-1}y + B_n\right\} \ ;$$

s'il y a une fonction entière homogène

$$H(a_0 \ , \ a_1 \ , \ a_2 \ , \ \ldots \ a_n)$$

des coefficients a_0 , a_1 , a_2 , . . . a_n, qui satisfait aux égalités

$$H(A_0 \ , \ A_1 \ , \ \ldots \ A_n) = \beta^w H(a_0 \ , \ a_1 \ , \ \ldots \ a_n)$$

et

$$H(B_0 \ , \ B_1 \ , \ \ldots \ B_n) = \beta^w H(a_0 \ , \ a_1 \ , \ \ldots \ a_n) \ ,$$

w étant un nombre entier, l'expression

$$H(a_0 \ , \ a_1 \ , \ \ldots \ a_n)$$

est dite invariant de la fonction $f(x)$.

Cela établi, nous montrerons l'existence d'invariants de la fonction entière

(184) $$f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \ ,$$

dont le degré est au plus égal à 4. Par les substitutions (181) ce polynôme se transforme en

$$f(\beta y+\gamma)=A_0y^4+4A_1y^3+6A_2y^2+4A_3y+A_4 \tag{185}$$

et en

$$f\left(\frac{1}{\beta y}\right)=\frac{1}{\beta^4y^4}(B_0y^4+4B_1y^3+6B_2y^2+4B_3y+B_4)\ , \tag{186}$$

où les nouveaux coefficients sont donnés par les formules

$$A_0=a_0\beta^4\ ,\ A_1=(a_0\gamma+a_1)\beta^3\ ,\ A_2=(a_0\gamma^2+2a_1\gamma+a_2)\beta^2\ , \tag{187}$$

$$A_3=(a_0\gamma^3+3a_1\gamma^2+3a_2\gamma+a_3)\beta\ ,$$

$$A_4=a_0\gamma^4+4a_1\gamma^3+6a_2\gamma^2+4a_3\gamma+a_4$$

et

$$B_0=a_4\beta^4\ ,\ B_1=a_3\beta^3\ ,\ B_2=a_2\beta^2\ ,\ B_3=a_1\beta\ ,\ B_4=a_0\ . \tag{188}$$

Des équations (187) on tire

$$A_0A_2-A_1^2=\beta^6(a_0a_2-a_1^2)\ , \tag{189}$$

et des équations (187), (189) on obtiendra

$$A_0^2A_3-A_1^3=3a_0\beta^9\gamma(a_0a_2-a_1^2)+\beta^9(a_0^2a_3-a_1^3) \tag{190}$$

et

$$-3A_1(A_0A_2-A_1^2)=-3a_0\beta^9\gamma(a_0a_2-a_1^2)-3a_1\beta^9(a_0a_2-a_1^2)\ ; \tag{191}$$

en ajoutant ces égalités, on en déduira

$$A_0^2A_3-3A_0A_1A_2+2A_1^3=\beta^9(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)\ . \tag{192}$$

Des équations (187), (189), (192) résultent les trois formules suivantes:

$$A_0^3A_4-A_1^4=6\beta^{12}\gamma^2a_0^2(a_0a_2-a_1^2)+4\beta^{12}\gamma a_0(a_0^2a_3-a_1^3)+\beta^{12}(a_0^3a_4-a_1^4)\ , \tag{193}$$

$$-4A_1(A_0^2A_3-3A_0A_1A_2+2A_1^3)=4\beta^{12}\gamma a_0(-a_0^2a_3+3a_0a_1a_2-2a_1^3) \tag{194}$$

$$-4\beta^{12}a_1(a_0^2a_3-3a_0a_1a_2+2a_1^3)\ ,$$

$$(195)\quad -6A_1^2(A_0A_2-A_1^2) = -6\beta^{12}\gamma^2 a_0^2(a_0a_2-a_1^2) + 4\beta^{12}\gamma a_0(-3a_0a_1a_2+3a_1^3) - 6\beta^{12}a_1^2(a_0a_2-a_1^2)\ ,$$

et en ajoutant ces trois égalités, on aura

$$(196)\quad A_0^3A_4 - 4A_0^2A_1A_3 + 6A_0A_1^2A_2 - 3A_1^4 = \beta^{12}(a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4)\ .$$

Des équations (189) et (196) on déduit

$$(197)\quad 3(A_0A_2-A_1^2)^2 + A_0^3A_4 - 4A_0^2A_1A_3 + 6A_0A_1^2A_2 - 3A_1^4 = \beta^{12}\{3(a_0a_2-a_1^2)^2 + a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4\}$$

ou, d'après quelques réductions et en y appliquant la première des formules (187),

$$(198)\quad A_0A_4 - 4A_1A_3 + 3A_2^2 = \beta^4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)\ .$$

Des formules (188) on tire

$$(199)\quad B_0B_4 - 4B_1B_3 + 3B_2^2 = \beta^4(a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2)\ ,$$

et des équations (198) et (199) on conclura, que l'expression

$$(200)\quad J_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$$

sera un invariant de la fonction (184).

Des équations (189), (192), (196) on déduit

$$(201)\quad (A_0A_2-A_1^2)(A_0^3A_4 - 4A_0^2A_1A_3 + 6A_0A_1^2A_2 - 3A_1^4) - (A_0^2A_3 - 3A_0A_1A_2 + 2A_1^3)^2 - (A_0A_2-A_1^2)^3 = \beta^{18}\{(a_0a_2-a_1^2)(a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 + 6a_0a_1^2a_2 - 3a_1^4) - (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)^2 - (a_0a_2-a_1^2)^3\}\ ;$$

en réduisant et en y appliquant la première des formules (187), on aura

$$(202)\quad A_0A_2A_4 + 2A_1A_2A_3 - A_0A_3^2 - A_1^2A_4 - A_2^3 = \beta^6(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3)\ .$$

Des formules (188) on tire

$$B_0B_2B_4 + 2B_1B_2B_3 - B_0B_3^2 - B_1^2B_4 - B_2^3 = \beta^6(a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3) \quad (203)$$

et, d'après les équations (202) et (203), l'expression

$$J_3 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 \quad (204)$$

sera un invariant de la fonction (184).

Par là nous avons démontré ce théorème:

Théorème XIII. La fonction entière

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 ,$$

dont le degré est au plus égal à 4, a les invariants

$$J_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2$$

et

$$J_3 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 .$$

Soit x une fonction de la variable indépendante u, et supposons, que l'on satisfasse à l'équation différentielle à coefficients constants

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \quad (205)$$

dans les environs de $u = 0$ en prenant

$$x = c_0 + c_1u^2 + c_2u^4 + c_3u^6 + c_4u^8 + \cdots , \quad (206)$$

où le coefficient c_1 ne s'annule pas. Par la substitution

$$x = y + c_0 \quad (207)$$

on trouvera, que l'on satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = a_0(y + c_0)^4 + 4a_1(y + c_0)^3 + 6a_2(y + c_0)^2 + 4a_3(y + c_0) + a_4 \quad (208)$$

par la série

$$y = c_1u^2 + c_2u^4 + c_3u^6 + c_4u^8 + \cdots . \quad (209)$$

Après quelques réductions l'équation (208) peut être mise sous la forme

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = b_0 y^4 + 4 b_1 y^3 + 6 b_2 y^2 + 4 b_3 y + b_4 \ , \tag{210}$$

où les coefficients b_0, b_1, b_2, b_3, b_4 dépendent des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et de la quantité c_0. Mais puisque le second membre de l'équation (205) se transforme en le second membre de l'équation (210) par la substitution (207), dans laquelle le coefficient de y est égal à l'unité, on conclura du théorème XIII, que

$$a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 = b_0 b_4 - 4 b_1 b_3 + 3 b_2^2 \tag{211}$$

et

$$a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 = b_0 b_2 b_4 + 2 b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 - b_2^3 \ . \tag{212}$$

Introduisons la valeur de y, donnée par l'équation (209), dans l'équation (210), et égalons les coefficients de u^0, u^2, u^4, u^6, u^8 dans les deux membres de l'équation ainsi obtenue, nous en tirerons

$$\left\{\begin{array}{l} b_4 = 0 \ , \ 4 b_3 c_1 = 4 c_1^2 \ , \ 4 b_3 c_2 + 6 b_2 c_1^2 = 16 c_1 c_2 \ , \\ 4 b_3 c_3 + 12 b_2 c_1 c_2 + 4 b_1 c_1^3 = 24 c_1 c_3 + 16 c_2^2 \ , \\ 4 b_3 c_4 + 6 b_2 (2 c_1 c_3 + c_2^2) + 12 b_1 c_1^2 c_2 + b_0 c_1^4 = 32 c_1 c_4 + 48 c_2 c_3 \ . \end{array}\right. \tag{213}$$

Le coefficient c_1 ne s'annulant pas, nous obtiendrons de ces équations

$$\left\{\begin{array}{l} b_0 = \dfrac{28 c_1^2 c_4 - 36 c_1 c_2 c_3 + 12 c_2^3}{c_1^5} \ , \ b_1 = \dfrac{5 c_1 c_3 - 2 c_2^2}{c_1^3} \ , \\ b_2 = \dfrac{2 c_2}{c_1} \ , \ b_3 = c_1 \ , \ b_4 = 0 \ , \end{array}\right. \tag{214}$$

et, par conséquent, nous aurons

$$b_0 b_4 - 4 b_1 b_3 + 3 b_2^2 = \frac{20 (c_2^2 - c_1 c_3)}{c_1^2} \tag{215}$$

et

$$b_0 b_2 b_4 + 2 b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 - b_2^3 = \frac{28 (2 c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_2^3)}{c_1^3} \ . \tag{216}$$

Par application des équations (211), (212) nous en tirerons

$$a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = \frac{20(c_2^2 - c_1c_3)}{c_1^2} \tag{217}$$

et

$$a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 = \frac{28(2c_1c_2c_3 - c_1^2c_4 - c_2^3)}{c_1^3} \tag{218}$$

ou, d'après les formules (200) et (204),

$$\frac{J_2}{20} = \frac{c_2^2 - c_1c_3}{c_1^2}, \quad \frac{J_3}{28} = \frac{2c_1c_2c_3 - c_1^2c_4 - c_2^3}{c_1^3}, \tag{219}$$

ce qui démontre le théorème suivant.

Théorème XIV. Soient a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 *des quantités constantes, et supposons que l'on satisfasse à l'équation différentielle*

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

dans les environs de $u = 0$ *en prenant*

$$x = c_0 + c_1u^2 + c_2u^4 + c_3u^6 + c_4u^8 + \dots .$$

où le coefficient c_1 *ne s'annule pas; en désignant par* J_2 *et* J_3 *les invariants du polynôme*

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 ,$$

à savoir

$$J_2 = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 ,$$

$$J_3 = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_2^3 ,$$

on aura

$$\frac{J_2}{20} = \frac{c_2^2 - c_1c_3}{c_1^2}, \quad \frac{J_3}{28} = \frac{2c_1c_2c_3 - c_1^2c_4 - c_2^3}{c_1^3} .$$

§ 5.

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA FONCTION ELLIPTIQUE GÉNÉRALE DU SECOND ORDRE.

Si l'on désigne par $\varphi(u)$ une fonction elliptique quelconque du second ordre aux périodes 2ω, $2\omega'$, on aura d'après le théorème XII

$$\varphi'(u)^2 = a_0\varphi(u)^4 + 4a_1\varphi(u)^3 + 6a_2\varphi(u)^2 + 4a_3\varphi(u) + a_4 \ , \tag{220}$$

formule qui subsiste pour toutes les valeurs de u. Par suite la fonction

$$x = \varphi(u) \tag{221}$$

satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \ . \tag{222}$$

Désignons par k une quantité constante quelconque, et remplaçons u par $u + k$ dans l'équation (220), nous en obtiendrons

$$\varphi'(u+k)^2 = a_0\varphi(u+k)^4 + 4a_1\varphi(u+k)^3 + 6a_2\varphi(u+k)^2 + 4a_3\varphi(u+k) + a_4 \ , \tag{223}$$

formule qui montre, que la fonction

$$x = \varphi(u + k) \tag{224}$$

satisfait à l'équation différentielle (222), quelle que soit la constante k. En choisissant les infinis v_1 et v_2 de la fonction $\varphi(u)$ ainsi, que la quantité $\frac{v_2 - v_1}{2}$ ne soit pas une somme de multiples des périodes, et en faisant

$$k = \frac{v_1 + v_2}{2} \ , \tag{225}$$

nous trouverons, que la fonction

$$x = \varphi\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2}\right) \tag{226}$$

satisfait à l'équation différentielle (222).

Par application du théorème IX il s'ensuit, que l'on satisfait à l'équation différentielle (222) par une série de la forme

$$x = c_0 + c_1 u^2 + c_2 u^4 + c_3 u^6 + c_4 u^8 + \dots , \tag{227}$$

où c_1 ne s'annule pas, et où c_1 , c_2 , c_3 , c_4 jouissent des propriétés, que

$$\frac{c_2^2 - c_1 c_3}{c_1^2} = \frac{g_2}{20} , \quad \frac{2 c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_2^3}{c_1^3} = \frac{g_3}{28} . \tag{228}$$

Mais puisque la série (227), où c_1 ne s'annule pas, satisfait à l'équation différentielle (222), on conclura du théorème XIV, que

$$\frac{J_2}{20} = \frac{c_2^2 - c_1 c_3}{c_1^2} , \quad \frac{J_3}{28} = \frac{2 c_1 c_2 c_3 - c_1^2 c_4 - c_2^3}{c_1^3} , \tag{229}$$

et des équations (228), (229) on déduit

$$J_2 = g_2 , \ J_3 = g_3 . \tag{230}$$

Par là nous avons démontré le théorème suivant.

Théorème XV. Toute fonction elliptique

$$x = \varphi(u)$$

du second ordre aux périodes 2ω , $2\omega'$ *satisfait à une équation différentielle de la forme*

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 ,$$

où a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , a_4 *sont des quantités constantes, et en désignant par* J_2 *et* J_3 *les invariants du polynôme*

$$a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4 ,$$

à savoir

$$J_2 = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 ,$$

$$J_3 = a_0 a_2 a_4 + 2 a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3 ,$$

on aura

$$J_2 = g_2 , \ J_3 = g_3 .$$

D'après le théorème I la fonction elliptique générale $\varphi(u)$ du second ordre est de la forme

$$\varphi(u) = C\frac{\sigma(u-u_1)\sigma(u-u_2)}{\sigma(u-v_1)\sigma(u-v_2)}\ , \tag{231}$$

où

$$u_1 + u_2 = v_1 + v_2\ . \tag{232}$$

Conformément à la définition (2) la fonction $\sigma(u)$ contient les deux constantes arbitraires 2ω, $2\omega'$, et puisque les quatre quantités u_1, u_2, v_1, v_2 ne sont liées entre elles que par la condition (232), la fonction $\varphi(u)$ renferme d'après la formule (231) six constantes, indépendantes les unes des autres, à savoir

1) les deux périodes 2ω, $2\omega'$,
2) trois des quantités u_1, u_2, v_1, v_2,
3) le facteur constant C,

et par ces six constantes la fonction $\varphi(u)$ sera parfaitement déterminée. Puisque la fonction $x = \varphi(u)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4\ , \tag{233}$$

mais ne satisfait pas à d'autres équations différentielles de la même forme, les coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 seront parfaitement déterminés par les six constantes susdites, et en général ces coefficients dépendront de toutes ces constantes. Quant aux invariants J_2, J_3, ceux-ci sont égaux à g_2, g_3 d'après le théorème précédent; donc on peut conclure des formules (78), que J_2, J_3 ne dépendront que des périodes 2ω, $2\omega'$, et que ces quantités seront indépendantes des zéros et des infinis de la fonction $\varphi(u)$ et de la constante C.

Maintenant nous introduisons les racines du polynôme, qui se trouve dans le second membre de l'équation différentielle de la fonction $\varphi(u)$.

1) Supposons, que la fonction $\varphi(u)$ admette deux infinis simples, le coefficient a_0 ne s'annulera pas; le polynôme

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \tag{234}$$

sera donc du quatrième degré; en désignant ses racines par x_0, x_1, x_2, x_3, nous aurons

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{4a_1}{a_0}\ , \tag{235}$$

$$(236) \qquad x_0x_1 + x_0x_2 + x_0x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{6a_2}{a_0} ,$$

$$(237) \qquad x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = -\frac{4a_3}{a_0} ,$$

$$(238) \qquad x_0x_1x_2x_3 = \frac{a_4}{a_0} .$$

Des équations (235) et (236) on tire

$$(239) \qquad x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \frac{16a_1^2 - 12a_0a_2}{a_0^2} .$$

Par multiplication on déduit des équations (235) et (237), en y appliquant l'équation (238),

$$(240) \quad x_0^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + x_1^2(x_0x_2 + x_0x_3 + x_2x_3) + x_2^2(x_0x_1 + x_0x_3 + x_1x_3)$$
$$+ x_3^2(x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2) = \frac{16a_1a_3 - 4a_0a_4}{a_0^2} .$$

En élevant au carré on obtiendra de l'équation (237) par application des formules (236), (238)

$$(241) \qquad x_0^2x_1^2x_2^2 + x_0^2x_1^2x_3^2 + x_0^2x_2^2x_3^2 + x_1^2x_2^2x_3^2 = \frac{16a_3^2 - 12a_2a_4}{a_0^2} .$$

Cela établi, nous définissons trois quantités y_1, y_2, y_3 au moyen des égalités

$$(242) \qquad y_1 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0x_1 + x_2x_3) ,$$

$$(243) \qquad y_2 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0x_2 + x_1x_3) ,$$

$$(244) \qquad y_3 = \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0x_3 + x_1x_2) ,$$

et nous nous proposons de former l'équation du troisième degré, dont les racines sont y_1, y_2, y_3. Des équations (242), (243), (244) on tire par application de la formule (236)

$$(245) \qquad y_1 + y_2 + y_3 = 0 ;$$

ensuite on obtiendra de ces trois formules

$$(246)\qquad \left(y_2-\frac{a_2}{2}\right)\left(y_3-\frac{a_2}{2}\right)=\frac{a_0^2}{16}\left(x_0^2x_2x_3+x_1^2x_2x_3+x_2^2x_0x_1+x_3^2x_0x_1\right),$$

$$(247)\qquad \left(y_3-\frac{a_2}{2}\right)\left(y_1-\frac{a_2}{2}\right)=\frac{a_0^2}{16}\left(x_0^2x_1x_3+x_1^2x_0x_2+x_2^2x_1x_3+x_3^2x_0x_2\right),$$

$$(248)\qquad \left(y_1-\frac{a_2}{2}\right)\left(y_2-\frac{a_2}{2}\right)=\frac{a_0^2}{16}\left(x_0^2x_1x_2+x_1^2x_0x_3+x_2^2x_0x_3+x_3^2x_1x_2\right).$$

En ajoutant les équations (246), (247), (248) et en y appliquant les formules (240) et (245), on en déduira

$$(249)\qquad y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=-\frac{a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2}{4}$$

ou, d'après l'équation (200),

$$(250)\qquad y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=-\frac{J_2}{4}.$$

Des équations (242), (243), (244) on tire

$$(251)\qquad \left(y_1-\frac{a_2}{2}\right)\left(y_2-\frac{a_2}{2}\right)\left(y_3-\frac{a_2}{2}\right)=-\frac{a_0^3}{64}\{x_0^2x_1^2x_2^2+x_0^2x_1^2x_3^2+x_0^2x_2^2x_3^2$$

$$+x_1^2x_2^2x_3^2+x_0x_1x_2x_3(x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2)\},$$

et par application des formules (238), (239), (241) on en obtiendra l'égalité

$$(252)\qquad \left(y_1-\frac{a_2}{2}\right)\left(y_2-\frac{a_2}{2}\right)\left(y_3-\frac{a_2}{2}\right)=-\frac{2a_0a_3^2-3a_0a_2a_3+2a_1^2a_4}{8},$$

d'où l'on déduit, au moyen des formules (245) et (249),

$$(253)\qquad y_1y_2y_3=\frac{a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3}{4}$$

ou, d'après l'équation (204),

$$(254)\qquad y_1y_2y_3=\frac{J_3}{4}.$$

Il s'ensuit des équations (245), (250), (254), que les quantités y_1, y_2, y_3 sont les racines de l'équation du troisième degré

$$4y^3 - J_2 y - J_3 = 0 \ , \tag{255}$$

et par suite on conclura des équations (230), que y_1, y_2, y_3 sont les racines de l'équation

$$4y^3 - g_2 y - g_3 = 0 \ . \tag{256}$$

Mais d'après les formules (53) et (61) cette équation a les racines e_1, e_2, e_3; donc les quantités y_1, y_2, y_3 coïncideront avec les quantités e_1, e_2, e_3, et d'après les équations (242), (243), (244) nous pouvons poser

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0 x_1 + x_2 x_3) = e_1 \ , \tag{257}$$

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0 x_2 + x_1 x_3) = e_2 \ , \tag{258}$$

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0 x_3 + x_1 x_2) = e_3 \ . \tag{259}$$

2) Soit supposé, en second lieu, que la fonction $\varphi(u)$ ait un infini double, le coefficient a_0 s'annulera. Les coefficients a_0 et a_1 ne s'évanouissant pas simultanément, le polynôme

$$4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 \tag{260}$$

sera du troisième degré, et en désignant ses racines par x_1, x_2, x_3, on aura

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3a_2}{2a_1} \ , \tag{261}$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_3}{a_1} \ , \tag{262}$$

$$x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_4}{4a_1} \ . \tag{263}$$

Définissons dans ce cas trois quantités y_1, y_2, y_3 par les égalités

$$y_1 = \frac{a_2}{2} + a_1 x_1 \ , \ y_2 = \frac{a_2}{2} + a_1 x_2 \ , \ y_3 = \frac{a_2}{2} + a_1 x_3 \ , \tag{264}$$

nous en obtiendrons au moyen des équations (261), (262) et (263)

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0 \ , \tag{265}$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = -\frac{-4a_1a_3 + 3a_2^2}{4} \tag{266}$$

et

$$y_1y_2y_3 = \frac{2a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_2^3}{4} \tag{267}$$

ou, d'après les équations (200) et (204), en observant que $a_0 = 0$,

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = -\frac{J_2}{4} \tag{268}$$

et

$$y_1y_2y_3 = \frac{J_3}{4} \ . \tag{269}$$

D'après les équations (265), (268), (269) les quantités y_1 , y_2 , y_3 sont les racines de l'équation

$$4y^3 - J_2y - J_3 = 0 \ , \tag{270}$$

et, par conséquent, on conclura des équations (230), que ces quantités sont les racines de l'équation

$$4y^3 - g_2y - g_3 = 0 \ . \tag{271}$$

Mais puisque cette équation a les racines e_1 , e_2 , e_3 , les quantités y_1 , y_2 , y_3 coïncideront avec les quantités e_1 , e_2 , e_3 , et par suite nous obtiendrons des équations (264)

$$\frac{a_2}{2} + a_1x_1 = e_1 \ , \ \frac{a_2}{2} + a_1x_2 = e_2 \ , \ \frac{a_2}{2} + a_1x_3 = e_3 \ . \tag{272}$$

Des formules (257), (258), (259), (272) résulte ce théorème.

Théorème XVI. Soit $\varphi(u)$ *une fonction elliptique quelconque du second ordre aux périodes* 2ω , $2\omega'$, *et*

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$$

son équation différentielle. Si la fonction $\varphi(u)$ *admet deux infinis simples, le coefficient* a_0 *ne s'annulera pas, et en désignant par* x_0, x_1, x_2, x_3 *les racines du polynôme*

$$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 ,$$

convenablement rangées, on aura

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0x_1 + x_2x_3) = e_1 ,$$

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0x_2 + x_1x_3) = e_2 ,$$

$$\frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{4}(x_0x_3 + x_1x_2) = e_3 ;$$

si la fonction $\varphi(u)$ *admet un infini double, le coefficient* a_0 *s'annulera, mais* a_1 *sera différent de zéro, et en désignant par* x_1, x_2, x_3 *les racines du polynôme*

$$4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 ,$$

convenablement rangées, on aura

$$\frac{a_2}{2} + a_1x_1 = e_1 , \quad \frac{a_2}{2} + a_1x_2 = e_2 , \quad \frac{a_2}{2} + a_1x_3 = e_3 .$$

§ 6.

DES RAPPORTS ANHARMONIQUES.

Soient r_0, r_1, r_2, r_3 quatre quantités quelconques, le quotient

$$\frac{(r_0 - r_1)(r_2 - r_3)}{(r_0 - r_3)(r_2 - r_1)}$$

est appelé, comme on connait, le rapport anharmonique des quantités r_0, r_1, r_2, r_3. Si une de ces quantités, par exemple r_0, devient infinie, nous trouverons, que le rapport anharmonique des quantités ∞, r_1, r_2, r_3 sera égal à

$$\frac{r_2 - r_3}{r_2 - r_1}$$

Dans ce paragraphe nous appliquerons la notion de rapport anharmonique aux quelques formules démontrées auparavant. Nous désignons, pour cet effet, par $\varphi(u)$ une fonction elliptique quelconque du second ordre aux périodes 2ω, $2\omega'$, et nous distinguerons les deux cas suivants.

1) Supposons que la fonction $\varphi(u)$ ait deux infinis simples, nous obtiendrons des formules (257), (258), (259), en combinant celles-ci entre elles,

$$(273) \qquad -\frac{a_0}{4}(x_0 - x_1)(x_2 - x_3) = e_2 - e_3 \ ,$$

$$(274) \qquad -\frac{a_0}{4}(x_0 - x_2)(x_3 - x_1) = e_3 - e_1 \ ,$$

$$(275) \qquad -\frac{a_0}{4}(x_0 - x_3)(x_1 - x_2) = e_1 - e_2 \ ,$$

et de ces équations on tire, par division,

$$(276) \qquad \frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_0 - x_3)(x_2 - x_1)} = \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1} \ ,$$

$$(277) \qquad \frac{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{e_3 - e_1}{e_3 - e_2} \ ,$$

$$(278) \qquad \frac{(x_0 - x_3)(x_1 - x_2)}{(x_0 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \ .$$

L'une quelconque de ces trois formules peut être déduite des deux autres. Il s'ensuit de l'équation (276), que le rapport anharmonique des quantités x_0, x_1, x_2, x_3 sera égal au rapport anharmonique des quantités ∞, e_1, e_2, e_3.

2) En supposant, que la fonction $\varphi(u)$ ait un infini double, nous déduirons des équations (272)

$$(279) \quad a_1(x_2 - x_3) = e_2 - e_3 \ , \ a_1(x_3 - x_1) = e_3 - e_1 \ , \ a_1(x_1 - x_2) = e_1 - e_2 \ ,$$

et, par conséquent,

$$(280) \qquad \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_1} = \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1} \ , \ \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{e_3 - e_1}{e_3 - e_2} \ , \ \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} \ .$$

On peut déduire l'une quelconque de ces trois formules des deux autres, et de la première formule on conclura, que le rapport anharmonique des quantités ∞, x_1, x_2, x_3 sera égal au rapport anharmonique des quantités ∞, e_1, e_2, e_3.

Théorème XVII. Désignons par $\varphi(u)$ *une fonction elliptique du second ordre aux périodes* 2ω, $2\omega'$, *et soit*

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

son équation différentielle. Si la fonction $\varphi(u)$ *admet deux infinis simples, le coefficient* a_0 *ne s'annulera pas, et en désignant par* x_0, x_1, x_2, x_3 *les racines du polynôme*

$$a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 ,$$

convenablement rangées, le rapport arharmonique des quantités x_0, x_1, x_2, x_3 *sera égal au rapport anharmonique des quantités* ∞, e_1, e_2, e_3. *Si la fonction* $\varphi(u)$ *a un infini double, le coefficient* a_0 *s'annulera, mais* a_1 *sera différent de zéro, et en désignant par* x_1, x_2, x_3 *les racines du polynôme*

$$4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 ,$$

convenablement rangées, le rapport anharmonique des quantités ∞, x_1, x_2, x_3 *sera égal au rapport anharmonique des quantités* ∞, e_1, e_2, e_3.

Soient maintenant v_1, v_2 les infinis de la fonction $\varphi(u)$, nous aurons d'après le théorème V

$$\varphi(u) = \frac{\alpha p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \beta}{\gamma p\left(u - \frac{v_1 + v_2}{2}\right) + \delta} \tag{281}$$

α, β, γ, δ étant des constantes, qui jouissent de la propriété, que $\alpha\delta - \beta\gamma$ ne s'annule pas. En désignant par a, a'', a' trois quantités quelconques, nous obtiendrons de l'équation (281)

$$\varphi\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2}\right) = \frac{\alpha p(u) + \beta}{\gamma p(u) + \delta} , \quad \varphi\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2} + a\right) = \frac{\alpha p(u+a) + \beta}{\gamma p(u+a) + \delta} , \tag{282}$$

$$\varphi\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2} + a''\right) = \frac{\alpha p(u+a'') + \beta}{\gamma p(u+a'') + \delta} , \varphi\left(u + \frac{v_1 + v_2}{2} + a'\right) = \frac{\alpha p(u+a') + \beta}{\gamma p(u+a') + \delta} ,$$

et de ces égalités nous déduirons

$$(283)\quad \frac{\left\{q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}\right)-q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a\right)\right\}\left\{q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a''\right)-q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a'\right)\right\}}{\left\{q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}\right)-q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a'\right)\right\}\left\{q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a''\right)-q\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a\right)\right\}}$$

$$= \frac{\{p(u)-p(u+a)\}\{p(u+a'')-p(u+a')\}}{\{p(u)-p(u+a')\}\{p(u+a'')-p(u+a)\}} ,$$

formule, qui démontre le théorème suivant.

Théorème XVIII. Soit $\varphi(u)$ *une fonction elliptique quelconque du second ordre ayant les périodes* 2ω, $2\omega'$ *et admettant les infinis* v_1, v_2; *en désignant par* a, a'', a' *trois quantités quelconques, le rapport anharmonique des fonctions*

$$\varphi\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}\right) , \varphi\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a\right) , \varphi\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a''\right) ,$$

$$\varphi\left(u+\frac{v_1+v_2}{2}+a'\right)$$

sera égal au rapport anharmonique des fonctions

$$p(u) , p(u+a) , p(u+a'') , p(u+a') .$$

Faisons $u=0$ dans ce théorème, nous en conclurons, que le rapport anharmonique des quantités

$$\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right) , \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+a\right) , \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+a''\right) , \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+a'\right)$$

sera égal au rapport anharmonique des quantités

$$\infty , p(a) , p(a'') , p(a') .$$

En y introduisant

$$(284)\qquad a=\omega , a''=\omega'' , a'=\omega' ,$$

nous trouverons, que le rapport anharmonique des quantités

$$\varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\ ,\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega\right)\ ,\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega''\right)\ ,\ \varphi\left(\frac{v_1+v_2}{2}+\omega'\right)$$

sera égal au rapport anharmonique des quantités

$$\infty\ ,\ e_1\ ,\ e_2\ ,\ e_3\ .$$

Errata.

Page	12,	ligne	18,	au	lieu	de	v_1 , v_2	lisez $\mathrm{v_1}$, $\mathrm{v_2}$
»	15,	»	21,	»	»	»	$\varphi(u)$	» $\varphi(\mathrm{u})$
»	24,	»	17,	»	»	»	$-)\,a^3\,-$	» $-(a^3-$
»	27,	»	24,	»	»	»	$\varphi(\mathrm{u})$	» $\varphi'(\mathrm{u})$
»	32,	»	6,	»	»	»	*simples* $\mathrm{a_0}$	» *simples*, $\mathrm{a_0}$

RECHERCHES

SUR

LA ROTATION DU SOLEIL

PAR

N. C. DUNÉR.

(Présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 14 Février 1891).

UPSAL
EDV. BERLING, IMPRIMEUR DE L'UNIVERSITÉ.
1891.

Grâce à la généreuse libéralité du conseil d'administration de la fondation »Lars Hjertas Minne» à Stockholm, une somme d'environ 5000 francs était mise en 1884 à ma disposition afin d'être employée à la construction d'un spectroscope d'une puissance aussi grande que l'on pourrait obtenir. Cet instrument devait en outre avoir une construction telle, qu'il pût être appliqué à un réfracteur parallactique et par conséquent pût servir à des recherches spéciales sur les propriétés spectroscopiques des différents points du disque solaire.

J'entrais aussitôt en correspondance avec différents opticiens bien connus, ainsi qu'avec quelques-uns de mes collègues les plus expérimentés dans cette sorte de recherches scientifiques. Je fus bientôt d'avis que le spectroscope à réseaux de diffraction sur métal était indubitablement l'instrument qui se prêtait avec le plus d'avantage aux recherches qui réclamaient une très grande puissance dispersive. Je reconnus aussi que les réseaux tracés au moyen de la machine à diviser de M. le professeur Rowland à Baltimore étaient également les seuls préférables, M. Hasselberg m'ayant communiqué les observations qu'il avait faites à ce sujet avec le réseau de Rowland, qu'avait donné à l'observatoire de Poulkowa l'université de John Hopkins à Baltimore.

Une difficulté cependant se présentait, c'était de savoir comment acquérir ces réseaux. Les seuls qui existaient alors en Europe étaient celui qui appartient à l'observatoire de Poulkowa, et un autre que possède l'école polytechnique de Paris et qui a servi aux belles recherches de M. Cornu sur les raies atmosphériques dans le spectre solaire; tous deux avaient été donnés à ces institutions et aucun de mes correspondants ne pouvait me donner des renseignements à cet effet. Je m'adressai alors directement à M. Rowland, le priant d'excuser une démarche que je faisais au nom de l'interêt scientifique. Je reçus bientôt une lettre très bienveillante de M. Rowland, dans laquelle, tout en me signalant les difficultés qui se présentaient pour la confection des réseaux

de très grandes dimensions, il m'informait qu'il ferait de son mieux pour m'en procurer un. Encouragé par sa lettre, je lui écrivis de nouveau, le priant de vouloir bien me faire construire un réseau aussi grand et aussi parfait que possible, surtout au point de vue de la possibilité de faire des mesures dans les spectres d'un ordre assez élevé. M. Rowland me répondit qu'il venait de confier à un excellent opticien de Pittsburg, M. Brashear, actuellement à Allegheny le polissage des miroirs pour les réseaux et que toute la confection était entre ses mains. M. Rowland voulut lui-même en surveiller la fabrication et soumettre les réseaux à de sérieuses épreuves afin d'en pouvoir garantir leur haute qualité et M. Rowland m'exposait encore une fois les grandes difficultés que rencontrerait la confection des grands réseaux.

Par suite de cette lettre, j'entrai en correspondance avec M. Brashear, et au printemps de 1885 il m'envoyait un réseau, mais de bien moindres dimensions que celles que j'avais désirées, me disant que jusqu' alors il lui avait été impossible d'obtenir des réseaux parfaits d'une plus forte grandeur.

Ce réseau forme un carré de 61^{mm} de côté sur lequel se trouve un plan rehaussé de forme circulaire et d'un diamètre égal au côté du carré mentionné Ce plan est d'un haut poli et le réseau qui fait $35^{mm} \times 50^{mm}$ y est gravé, et porte 29000 traits. Chaque 100^{me} trait est prolongé en dehors du réseau proprement dit afin d'en pouvoir examiner la division et en déterminer les erreurs.

Cependant M. Brashear me promit de m'envoyer un autre réseau plus grand aussitôt qu'on aurait pu l'obtenir. Ce dernier ne me parvint qu'en l'été de 1886, et M. Brashear m'avertissait cette fois qu'il ne voyait aucune possibilité d'en faire de plus grands avec la machine à diviser qu'on employait alors.

Ce réseau magnifique est tracé semblablement à l'autre, mais sur une plaque de 100^{mm} de côté et consiste en 46000 traits d'une longueur de 53^{mm}, repartis sur une largeur de 81^{mm}.

Déjà bien longtemps avant l'obtention de ce second réseau j'étais entré en pourparlers avec des mécaniciens au sujet de la construction du spectroscope, et me décidai enfin à la confier à M. Jürgensen de Copenhague. En mai 1886 M. Jürgensen m'avait déjà envoyé une esquisse de l'instrument faite d'après mes indications. J'avais examiné et corrigé à fond cette esquisse, afin qu'on pût commencer la construction de l'instrument aussitôt que le réseau me serait parvenu et que ses dimensions et son poids me seraient connus. L'instrument et le statif

étaient déjà prêts au mois de mars 1887, mais les contrepoids qui devaient rétablir l'équilibre du réfracteur ne furent entièrement prêts qu'au commencement de mai, à mon retour de la conférence astrophotographique de Paris.

Le spectroscope consiste en un tube en laiton d'un diamètre extérieur de 84^{mm} et de 98^{cm} de longueur. Il porte, à des distances de 24^{cm} de chacun de ses bouts, deux anneaux en métal rouge qui reposent dans les coussinets du statif. A son bout inférieur, pris dans le sens où se trouve le tube quand le spectroscope est attaché an refracteur et celui-ci dirigé vers le ciel, il est entouré d'un autre anneau qui forme une pièce avec deux bras, très forts et parallèles entre eux.

Ces bras vont d'abord dans une direction verticale contre les tangentes entre le tube et les plans qui le touchent dans les deux points diamétralement opposés l'un à l'autre où ils cohèrent avec l'anneau. Après avoir suivi cette direction sur une longueur de $9,5^{cm}$ de l'anneau, les bras se coudent et prennent une direction parallèle à l'axe du tube principal jusqu'à $26,5^{cm}$ du coude où ils s'attachent aux deux côtés d'une plaque circulaire d'un diamètre de 8^{cm} et de $17,5^{mm}$ d'épaisseur. A cette plaque est fixé à l'aide de trois paires de vis de correction, un cercle, divisé de 10 à 10 minutes et à ce cercle un petit canon dans lequel tourne un axe en acier, lequel porte le bras de deux microscopes, à l'aide desquels on lit directement les 5 secondes. Sur ce bras, on applique, à l'aide de deux grandes vis, qui ont chacune sur leurs deux côtes des vis de correction, les cassettes au dedans desquelles sont fixés les réseaux. Les cassettes consistent en deux boîtes quadrangulaires, l'une ajustée au dédans de l'autre. La position de la boîte intérieure peut être changée à volonté à l'aide de trois paires de vis de correction. On peut ainsi rendre les traits du réseau parallèles à l'axe de rotation. La cassette intérieure est garnie de velours et le réseau y est retenue par quatre ressorts très mous, également garnis de velours, et qui ne le touchent à peine aux quatre coins, laissant ainsi la partie circulaire entièrement libre. Il n'y a aucun danger, par conséquent, que ces ressorts produisent trace de flexion dans les réseaux. Il y a, naturellement, une telle double cassette pour chacun des réseaux.

Tout au commencement, nous avons dit que le tube principal avait un diamètre de 84^{mm}. Ceci n'est pas tout à fait exact pour la partie de 24^{cm} de longueur entre les deux anneaux inférieurs. Cette partie a

en effet un diamètre de 96^{mm}; au dedans d'elle il y a un tirage qui porte à son bout inférieur un objectif de 81^{mm} de diamètre et de 118^{cm} de distance focale [1]). Cet objectif sert en même temps comme objectif de collimateur et objectif de lunette d'observation. Pour prévenir les réflexions sur les différentes surfaces de cet objectif qui sans cela iraient très gravement compromettre la vision, on a apposé sur sa surface supérieure une petite plaque de carton noirci d'un diamètre de 10^{mm}.

Au bout supérieur, le tube principal est prolongé par un tube de 8^{cm} de longueur et d'un diamètre de 67^{mm}, dans lequel il y a un tirage qui porte la fente, dont les tranches sont fabriquées d'un alliage de platine et d'iridium, et qui s'ouvre à l'aide d'une vis à tête divisée. 5 tours entiers de cette vis ouvrent la fente d'un millimètre; par conséquent, le tambour étant divisé en 50 parties égales, une division répond à 0,004^{mm}. A une distance de 63^{mm} devant de la fente, il y a une plaque de laiton noirci, portée par quatre appuis. Cette plaque est pendant les observations placée dans le foyer du grand réfracteur; elle est percée de trois trous, dont l'un est pratiqué au centre de la plaque et les autres des deux côtés sur une ligne parallèle à la fente et à une distance l'un de l'autre égale au diamètre moyen de l'image focale du soleil dans le réfracteur.

Dans le trou du milieu est vissé un tube court en laiton, dans lequel peut glisser un autre tube aussi court, qui, à son bout inférieur, porte une lentille achromatique d'un diamètre de 5^{mm} et de 15^{mm} de distance focale. Cette lentille, étant placée au milieu entre l'image focal et la fente, jette sur celle-ci l'image de la partie du soleil qui se projette sur le trou. Sur le côté inférieur de la plaque et des deux côtés des trous latéraux, il y a des coulisses dans lesquelles on peut faire glisser, à l'aide des vis, la partie supérieure d'une paire de tubes semblables à celui du trou du milieu, à cette exception près qu'ils sont un peu plus longs, et que la distance focale des lentilles qu'ils portent est de 20^{mm}. A l'aide du déplacement qui vient d'être décrit, on peut, quel que soit le diamètre du soleil, faire entrer dans les axes optiques de ces lentilles les images des parties opposées du bord solaire. Les rayons sortant des lentilles rencontrent sur la plaque de la fente deux prismes rectangulaires, également ajustables, aux hypothénuses desquelles elles subissent une réflexion totale, de sorte qu'elles deviennent parallèles à

1) En 1887 il y était un objectif avec une distance focale de 121^{cm}, mais qui fut plus tard échangé contre l'objectif actuel.

la fente. Au-dessus du milieu de la fente on peut à l'aide de deux vis faire glisser deux autres prismes rectangulaires qui réfléchissent de nouveau les rayons et les font entrer par la fente dans une direction parallèle à l'axe de l'objectif du spectroscope. A l'aide de cette disposition [1]) on a, dans le spectroscope, tout près l'un de l'autre, les spectres de deux points opposés du bord solaire. Quand on fait ainsi entrer la lumière des bords du soleil, le trou du milieu est bouché par une plaque en laiton.

La pièce oculaire se trouve sur le côté du tube principal aussi près que possible du bout supérieur de celui-ci. Elle consiste en un tube d'une longueur de 100^{mm} et d'un diamètre de 50^{mm} et qui porte à son bout intérieur un prisme rectangulaire, lequel se trouve tout près de l'axe du tube principal, toutefois sans intercepter en aucune façon le cone des rayons qui sortent de la fente. Ce cône rencontre l'objectif qui rend les rayons parallèles, après quoi elles tombent sur le réseau qui les disperse dans leurs rayons monochromatiques. Si l'on donne au réseau une inclinaison suffisante, en tournant le bras des microscopes autour de l'axe sur lequel il est fixé, il faut qu'une partie du spectre d'un ou de plusieurs ordres en retournant par l'objectif, rencontre le prisme qui vient d'être mentionné, y subit une reflexion totale et sort du tube principal dans une direction sensiblement verticale contre l'axe optique de l'objectif. L'image focale se forme à l'intérieur du tube qui porte le prisme et on peut à l'aide d'un bouton à crémaillère faire glisser le tirage du micromètre dans ce tube, jusqu'à ce que les fils se trouvent au même plan que l'image focale.

Quant au micromètre, il est construit de sorte que la vis amène à la fois les fils et l'oculaire. Ces fils étaient, en 1887 et 1888, au nombre de quatre et parallèles deux à deux; ils s'entrecroisaient sous des angles de 60^0. On avait donc, au milieu du champ, un rhombe dont le plus grand diamètre était parallèle aux raies spectrales et qui avait une longueur presque double de celles-ci. Avant de commencer les mesures en 1889, je fis introduire un cinquième fil au milieu de l'une des paires de fils et parallèle à eux. Le rhombe que nous venons de mentionner devenait, par conséquent, coupé en deux rhomboïdes, et au lieu de quatre points d'intersection entre les fils on en avait six. Un pas de la vis a une hauteur d'un quart de millimètre, et le tambour a un diamètre de

1) C'est M. LANGLEY qui l'a inventée. V. SCHELLEN *Die Spectralanalyse* etc. 3^{me} édition, Tome II p. 224.

40^{mm} et est divisé en 100 parties égales. On lit les pas entiers sur une échelle, qui se trouve sur l'une des coulisses latérales.

Le micromètre est muni de 5 oculaires achromatiques, fabriqués, de même que l'objectif, les lentilles et les prismes par MM. Reinfelder & Hertel à Munich. Ces oculaires ont les suivantes distances focales équivalentes, savoir:

Oculaire.	*Distance focale.*
I	2 pouces
II	1 »
III	$^2/_3$ »
IV	$^1/_2$ »
V	$^1/_3$ »

L'oculaire III est celui que j'emploie ordinairement pour les mesures; on peut encore faire usage de l'oculaire IV dans des circonstances très favorables, tandis que l'oculaire II est reservé pour les circonstances plus défavorables qu'à l'ordinaire et pour l'examen du spectre du cinquième ordre. Au contraire l'oculaire I est excellent, quand on veut étudier, au spectroscope, le chromosphère et les protubérances. L'oculaire V est inutile pour le spectroscope proprement dit; on verra plus tard qu'il peut être employé avec avantage à la photographie spectrale de certains points du bord solaire.

Pour attacher le spectroscope au réfracteur de l'observatoire de Lund, on ôte à celui-ci le micromètre et tout le grand tirage, sur lequel est fixé le micromètre; on enlève aussi les deux lourds contrepoids qui sont fixés aux bouts inférieurs des deux balanciers, qui servent à diminuer la flexion de la lunette, selon la méthode imaginée par Fraunhofer pour la construction de la grande lunette de Dorpat. Puis on applique le statif du spectroscope et on le fixe à l'aide de quatre grosses vis, dont deux entrent dans les bouts des balanciers, et deux dans l'annean inférieur de la grande lunette.

Le statif mentionné consiste en un grand manchon qui entoure la partie inférieure de la lunette du réfracteur et le tube plus rétréci dans lequel glisse le tirage du micromètre. Ce manchon est, comme nous venons de le dire, fixé à la lunette par deux fortes vis, qui entrent dans l'anneau inférieur de la lunette. Mais pour augmenter la stabilité, et aussi pour diminuer le poids du spectroscope sur la lunette, j'ai fait appliquer sur ce manchon deux bras forts qui s'adaptent aux deux ba-

lanciers dans la position que ceux-ci ont dans la position verticale de la lunette. Par conséquent on peut, dans cette position, fixer ces bras aux balanciers à l'aide de deux grandes vis, et on obtient ainsi une parfaite stabilité du manchon par rapport à la lunette. Dans une position plus ou moins horizontale, les balanciers exercent une très forte pression en haut, et cette pression dévient encore plus grande par l'application aux bouts supérieurs des balanciers des deux contrepoids qui sont nécessaires pour redonner à l'instrument son équilibre. La partie la plus étroite du manchon est de 32^{cm} long; la partie la plus large n'a au contraire qu'une longueur de 36^{mm}. Deux anneaux très solidement fixés l'un à l'autre tournent autour de cette partie du manchon à l'aide des roulettes de friction, et on peut lire sur un cercle, gradué sur le bord inférieur du manchon, l'angle dont on fait tourner cette partie.

Par ces deux anneaux passent quatre tubes en laiton d'une longueur de 115^{cm} et d'un diamètre de 26^{mm}. Ces tubes portent à leurs bouts inférieurs l'un des coussinets et 50^{cm} plus haut l'autre coussinet dans lesquels reposent les deux anneaux qui se trouvent sur le tube principal du spectroscope. Aussitôt qu'on a placé le spectroscope dans ces coussinets, on l'y retient à l'aide de deux arcs de cercle en laiton qu'on fixe aux coussinets avec des vis.

MM. REINFELDER & HERTEL avaient livré une serie de verres de différentes couleurs et qu'on pouvait visser sur les oculaires. Cependant, j'ai trouvé les couleurs de ces verres de beaucoup trop impures pour qu'ils puissent servir avec avantage à séparer les spectres des différents ordres. Ils affaiblissaient considérablement même les couleurs spectrales qui étaient en apparence à peu près les mêmes que celles dont ils étaient teints eux-mêmes. Pour éviter cet inconvénient, j'ai fait appliquer sur les oculaires le prisme à vision directe qui appartient au petit spectroscope de la construction indiquée par Zöllner et qui est designé par SsO dans mon mémoire sur les spectres des étoiles de la troisième classe p. 11. Pour séparer les spectres des différents ordres, on fait tourner ce prisme de sorte que son bord réfringent devient parallèle à l'extension logitudinale des spectres. La hauteur des spectres étant fort petite, les spectres des différents ordres deviennent ainsi tout à fait séparés, à moins qu'on n'emploie les deux oculaires les plus forts, auquel cas ils se touchent par la tranche.

Il me faut finalement remarquer qu'on peut fixer le bras des microscopes à l'aide d'une pince et lui faire subir de petits changements en position par une vis micrométrique.

Pour pouvoir faire des levés photographiques des parties du spectre solaire, on enlève le micromètre, et on introduit à sa place la chambre noire. Celle-ci fait le prolongement d'un tube de même forme et de même grandeur que le tirage du micromètre et muni d'une pareille crémaillère. Ce tube contient un petit objectif antiplanétique de M. Steinheil. Derrière cet objectif, il y a un beau prisme à vision directe, également de M. Steinheil. Ce prisme, qui sert à séparer les spectres des différents ordres, se trouve déjà en dedans de la chambre noire proprement dite, laquelle consiste en un tube quadrangulaire en forme de pyramide tronqué et d'une longueur de 32^{cm}, fait en plaques de laiton très minces. Il porte, à son bout extérieur, soit un cadre avec une plaque de glace pour la mise au point, soit le châssis. Le châssis est muni de deux volets qui, l'un et l'autre, ont 10^{mm} de largeur; par conséquent, les plaques photographiques ayant 8^{cm} de longueur et 4^{cm} de largeur, on peut faire deux levés photographiques sur chacune. Pour ce but, on peut appliquer le châssis dans deux positions différentes, de sorte que l'image du spectre rencontre l'un ou l'autre des volets. On obtient ainsi des images fortement agrandies des parties du spectre; mais ces parties n'embrassent qu'une très petite fraction du spectre entier, et ne sont donc que d'un usage fort restreint. Les poses devant être fort longues, surtout quand il s'agit des moins réfrangibles parties du spectre, il est indispensable d'avoir un moyen de retenir sur la fente, pendant tout ce temps, la même partie du disque solaire. Dans ce but, j'ai fait usage du chercheur ordinaire du réfracteur, en y adaptant une pièce oculaire particulière, fabriquée comme toute la chambre noire par M. Sandström, mecanicien de l'université de Lund. Cette pièce consiste en un anneau en laiton qu'on peut visser dans le tube du chercheur, au lieu de l'oculaire ordinaire. Cet anneau porte l'oculaire V du spectroscope, attaché sur deux châssis, de sorte qu'on peut le déplacer dans deux directions verticales l'une à l'autre. Sur un diaphragme dans l'anneau il y a deux fils d'araignée, s'entrecroisant sous un angle droit. Si l'on éloigne suffisamment l'oculaire de ce réticule, après que celui-ci a été placé an foyer de l'objectif du chercheur, on obtient, sur un écran, à la fois l'image du soleil et celle des fils. Cet écran est porté par une verge en laiton, fixée sur l'anneau. Lors des photographies spectrales, on déplace l'oculaire à l'aide des châssis sur lesquels il est ménagé, jusqu'à ce que le point d'intersection des fils touche le bord précédant ou suivant du soleil en même temps que l'image du point voulu du disque solaire rencontre la fente. On retient l'image du point d'intersection en contact avec celle du bord solaire pendant tout le temps que dure la pose.

De ce qui précède, on a vu que notre spectroscope a des dimensions extraordinaires. Malgré cela, ce sont en première ligne les rares qualités optiques du plus grand réseau qui le rendent incomparable. Dans le but de faciliter l'emploi des spectres d'un ordre élevé, tous les réseaux de ROWLAND, sont tracés de telle sorte, que les spectres d'un côté sont plus brillants que ceux de l'autre côté. Dans mon réseau, un heureux hasard a introduit une autre anomalie encore plus favorable pour ce but. C'est que, tandis que le spectre du second ordre est assez faible, celui du troisième ordre est au moins aussi brillant que celui du premier ordre et même le spectre du quatrième ordre ne lui est pas considérablement inférieur. Encore le spectre du cinquième ordre est-il suffisamment brillant pour se prêter, du moins dans ses parties les plus brillantes, avec avantage aux mesures. Pour cette raison, notre spectroscope donne une dispersion vraiment énorme. Je donnerai quelques exemples du dédoublement des raies doubles excessivement étroites, et dont la duplicité, à mon su, n'a pas encore été annoncée. Commençons en disant que la duplicité des b_3, b_4, de la raie de la couronne et même celle de E_1 est trop facilement reconnue pour être avancée comme une preuve de la force optique de l'instrument.

Dans la liste suivante de ces nouvelles raies doubles ou multiples, les longueurs d'onde sont données d'après l'atlas spectroscopique de M. FIEVEZ[1]). On réduit ces longueurs d'onde à celles de M. ROWLAND[2]) en leur ajoutant 0,8 unités de ÅNGSTRÖM.

Raie.	Description.
5196,0	La plus réfrangible est peut-être un peu plus forte; *très facile.*
5201,4	La plus réfrangible est un peu plus faible que l'autre; *difficile.*
5203,3	Les deux raies sont de la même intensité; *difficile.*
5205,3	La moins réfrangible est beaucoup plus faible que l'autre; *très serrées.*
5205,6	La raie la plus réfrangible est un peu plus faible que l'autre; *facile.*
5207,2	La moins réfrangible un peu plus faible que l'autre; *assez difficile.*
5214,5	La moins réfrangible est plus faible que l'autre; *très facile.*
5215,5	La moins réfrangible est la plus faible; *très facile.*
5224,2	La plus réfrangible est un peu plus forte que l'autre; *pas difficile.*
5232,1	Triple; deux raies entourent la grosse raie principale. La raie la plus réfrangible est un peu plus faible que l'autre. Une quatrième raie encore plus

1) *Annales de l'Observatoire de Bruxelles.* Nouv. Série. T. IV.

2) *Philosophical Magazine.* V Sér. Vol. 23. Pp. 262—264.

Raie.	Description.
	réfrangible se trouve dans le voisinage. La raie principale m'a parfois paru double, mais je n'en suis pas sûr.
5234,6	La raie la moins réfrangible est beaucoup plus faible que l'autre; *serrées.*
5240,4	La plus réfrangible est moins forte que l'autre; *difficile.*
5241,2	La raie la plus réfrangible est faible; *facile.*
5241,7	La plus réfrangible un peu plus faible que l'autre; *facile.* La longueur d'onde est de 5242,2.
5242,7	La raie la moins réfrangible est considérablement plus faible que l'autre.
5247,9	La moins réfrangible est la plus forte; *pas très difficile.*
5249,7	La plus réfrangible est faible; *difficile.*
5254,0	La moins réfrangible est la plus faible; *facile.*
5254,6	*Très serrée et difficile*
5260,5	La moins réfrangible est beaucoup plus faible que l'autre; *assez facile.*
5261,0	La raie la plus réfrangible est plus faible que l'autre; *très serrées.*
5262,0	La raie la plus réfrangible est faible; *difficile.*
5262,4	La plus réfrangible est un peu plus faible que l'autre; *très facile.*
5273,9	Au milieu de cette raie double il y a une troisième raie plus faible; *très facile.*
5275,1	La raie la moins réfrangible est la plus faible; *très difficile.*
5282,6	La raie la plus réfrangible est assez faible; *difficile.*
5298,3	La raie la moins réfrangible est un peu plus faible que l'autre. *Serrée et difficile.*
5340,0	La raie la moins réfrangible est un peu plus faible que l'autre. *Extrêmement serrée et difficile.*
5352,4	La moins réfrangible est faible; *assez difficile.*
5361,6	La plus réfrangible est un peu plus faible que l'autre; *pas très difficile.*
5370,5	La raie la plus réfrangible est considérablement plus faible que l'autre; *serrées.*
5399,5	La moins réfrangible est la plus faible; *difficile.*

Outre ces raies je citerai *la duplicité des deux D.* En effet, on reconnaît déjà dans le quatrième spectre sans trop de difficulté au milieu de la grosse raie D_2 un mince filet de lumière, et quelquefois, bien que rarement, j'ai vu la même apparence en D_1. Au cinquième spectre tout cela se présente avec une précision bien plus grande. Quant à ce trait de lumière, je serais presque porté à croire qu'en analogie avec ce qu'on a souvent vu dans les spectres des taches et des protubérances, cela n'est qu'une double réversion, qui, avec un spectroscope suffisamment fort, se fait sentir sur tout le disque solaire. J'ai vu un autre phénomène très curieux dans le groupe *b*, savoir l'affaiblissement très consi-

dérable des trois grosses raies qui appartiennent au magnésium. Au cinquième spectre cet affaiblissement est si considérable, que le composant le plus réfrangible de b_4 n'est reconnaissable qu'avec un peu de difficulté, en effet plus difficilement que dans le quatrième spectre, tandis que le composant moins réfrangible de b_4 ainsi que les deux composants de b_3, tous les trois dûs au nickel et au fer, gardent toute leur netteté. Quant à b_2, elle est comme on sait entourée de deux raies métalliques. Avec une dispersion assez, mais pas trop considérable cependant, la raie b_2 se montre de beaucoup plus forte que même la plus réfrangible de ces raies; mais au cinquième spectre de notre spectroscope, la b_2 est sensiblement plus faible que la moins réfrangible de ces raies. Aussi b_1 se montre excessivement affaiblie. Ces phénomènes semblent pouvoir être expliqués par une réversion partielle, tandis que les raies des métaux plus réfractaires ne subissent pas de changement pareil. Une raison cependant pourrait se produire contre une telle supposition: la raie de la couronne solaire, qui d'ailleurs présente, en général, les mêmes phénomènes de réversion comme les raies du magnésium, n'est en aucune façon affaiblie dans le spectre du cinquième ordre.

Le soleil se trouvant actuellement dans une époque de peu d'activité, je n'ai pu que très rarement employer mon instrument pour l'examen des taches et des protubérances. Cependant, j'ai profité de quelques occasions où se laissaient voir des taches pas trop petites pour examiner si l'observation très remarquable de M. C.-A. YOUNG est réellement exacte, examen qui n'a pas été fait que je sache par aucun astronome, aussi bien que cette observation ne semble avoir attiré que fort peu l'attention.

M. YOUNG dit[1]) avoir examiné les spectres de nombreuses taches avec un spectroscope à diffraction d'une puissance au moins égale à celle du mien, à condition qu'on y puisse employer des spectres d'un ordre aussi élevé. Ce spectroscope était d'ailleurs attaché au réfracteur de 23 *inches* à l'observatoire de Halsted.

Le point principal dans l'observation de M. YOUNG est que »*in certain regions the spectrum of the spot-nucleus, instead of appearing as a mere continuous shade, crossed here and there by markings dark and light, is resolved into a countless number of lines, exceedingly fine and closely packed, interrupted frequently by lines as bright as the spectrum outside the*

1) *American Journal of Science.* Third series. Vol. XXV Pp. 333—336.

spot». M. Young ajoute: »*When seeing is at best and everything favorable, close attention enables one to trace nearly all these lines out beyond the spot and its penumbra. But they are so exceedingly faint on the suns general surface that usually they cannot be detected outside the spot-spectrum*» et finalement: »*The bright lines of which there are six between b_1 and b_4, are generally about as wide as the components of b_3. They are sharply defined at both edges, and are brighter at the center than at the edge, a fact which rather bears in favor of the idea that they are merely interruptions in the dark line series and not really superposed bright lines*». M. Young remarque aussi, que c'est surtout dans les parties verte et bleue du spectre qu'il lui a été possible de décomposer de la sorte le spectre des taches.

Les observations que j'ai faites confirment amplement la justesse des observations de M. Young. J'ai en effet vu le spectre des taches perdant tout-à fait l'apparence d'une bande unie plus sombre que le reste du spectre solaire, laquelle il présente dans un spectroscope d'une dispersion moyenne, et montrant de très nombreuses raies sombres, projetées sur un fond du même éclat que le spectre général du disque solaire. Ces raies ne sont pas cependant uniformément réparties et à la même distance l'une de l'autre comme les lattes d'une grille. Au contraire, on voit avec une pleine sûreté, surtout en portant son attention sur les espaces qui dans le spectre solaire sont vides de toutes raies tant soit peu fortes — je cite comme exemples les lacunes 5352 ..... 5361 et 5287,5 ..... 5292 — qu'elles sont agroupées en doublets, triplets etc., séparées par des interstices plus larges que ceux qui séparent les raies constituantes de ces groupes. Tous les interstices, autant que j'ai pu le voir, m'ont semblé être du même éclat que ceux qui se trouvent entre les groupes des raies dans le spectre solaire. En examinant très attentivement le spectre solaire, dans le prolongement d'un tel groupe dans le spectre des taches, il m'est quelquefois arrivé de découvrir un trait nébuleux excessivement faible. En un mot; tout ce que j'ai vu, me semble prouver qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre le spectre solaire général et celui des taches. Il est au contraire fort probable, que celui-ci se forme, pour ainsi dire, par l'exagération des caractères essentiels de celui-là, les raies excessivement faibles, presque imperceptibles, devenant parfaitement visibles, et les raies qui, dans le spectre solaire ordinaire, sont fortes devenant élargies et renforcées. La couche absorbante dans les taches ayant, à de légères modifications près, la même composition chimique que celle du photosphère, il est

difficile d'imaginer une autre forme des taches que celle d'une cavité remplie par des gaz métalliques soit tourbillonants comme le veut M. FAYE, soit en repos comme le croyait SECCHI, bien que l'immobilité des raies qui appartiennent au spectre des taches proprement dit, constaté par M. YOUNG et moi, semble plus en accord avec la théorie de SECCHI. Mais on ne saurait guère admettre que les taches aient la forme d'un nuage planant dans l'atmosphère solaire. Car les nuages tels que nous les connaissons en l'atmosphère de la terre sont composés de parties demi-fluides, demi-gazeuses, par conséquent à peine demi-diaphanes. Il faudrait donc que les nuages solaires eussent un spectre généralement voilé. Un spectre composé de raies sombres, nombreuses, sur un fond clair ne saurait être expliqué par cette hypothèse. M. YOUNG a aussi, dans la note que nous venons de mentionner, emis cette même opinion. Il dit: »*Of course the resolution of the spot-spectrum into lines tends to indicate that the absorption which darkens the center of a sun-spot is produced, not by granules of solid or liquid matter, but by matter in the gaseous form*».

Si mes observations sur les spectres des taches solaires ne sont pas très nombreuses, elles se sont portées encore plus rarement sur le chromosphère et sur les protubérances. La raison en a été que les opinions généralement émises sur les conditions de la visibilité des raies chromosphériques et des protubérances ne sont pas très exactes. On dit en général qu'une forte dispersion est indispensable pour les voir, et que plus la dispersion est forte, plus on les aperçoit facilement. De ces deux assertions celle-ci est très erronée, et l'autre n'est vraie que jusqu'à un certain point.

Déjà, pendant les observations que j'ai faites, il y a quelques années, dans le but d'établir la graduation du spectroscope universel de MERZ qui appartient à l'observatoire de Lund, j'ai été frappé du grand éclat des raies chromosphériques quand on n'a introduit, dans cet instrument, que le système à vision directe le plus faible (dispersion $A—G = 5^0$). Pour cette cause, j'ai essayé, après avoir obtenu un autre prisme encore plus faible (dispersion $A—G = 2^0,3$) si ces raies pourraient être vues encore avec cette dispersion très faible du spectroscope universel. La réussite fut si complète, même la raie D_3 étant facilement visible malgré l'éclat éblouissant de la partie jaune du spectre quand la lumière solaire directe entrait dans la fente, que je résolus de pousser mes essais encore plus loin en essayant deux spectroscopes tout faibles,

savoir un des petits spectroscopes stellaires, construits par M. Heustreu à Kiel, d'après les indications de M. Vogel et un encore plus petit spectroscope de M. Hilger. Pour ces essais il me fallut opérer avec une grande prudence, afin d'éviter que la lumière directe n'entrât dans la fente. Cependant il m'arriva quelquefois, même sans emploi d'aucun verre rouge d'apercevoir la raie C et même une fois la F et la D_3.

S'il est prouvé par ces essais qu'on peut apercevoir les raies chromosphériques à l'aide des plus faibles spectroscopes, mes observations avec le grand spectroscope semblent prouver qu'une dispersion et un grossissement trop considérables peuvent totalement empêcher la visibilité des raies en question. A mes premières observations, j'ai fait usage de l'oculaire II et du troisième spectre sans être en état de bien voir seulement la raie C. L'observation réussissait à merveille au contraire, quand j'employais l'oculaire I et le spectre du premier ordre, et j'ai pu voir, non seulement les raies spectrales, mais aussi l'image du chromosphère avec ses points et ses filaments avec une netteté bien plus grande que celle que donne le spectroscope de Merz.

Cet exposé ne serait pas complet si je negligeais entièrement les inconvénients que présente notre instrument. Ils sont causés par ses grandes dimensions et le poids considérable que ses parties différentes ont dû obtenir. Ce poids est cause que des flexions se produisent dans certaines parties de l'instrument. La plus fâcheuse de ces flexions est celle dans le bras des microscopes et dans les autres parties qui supportent le pesant réseau. Ces flexions peuvent faire que parfois les spectres n'entrent pas au champ de vision, ou du moins qu'ils ne coïncident pas avec quelqu'un des points où les fils du micromètre se croisent, à moins d'ajuster la position du réseau avant de commencer une observation; et si les observations durent longtemps, il devient parfois, bien que seulement dans des cas exceptionels, nécessaire de la corriger encore une fois, afin d'amener de nouveau cette coïncidence. La correction dont je viens de parler est un grave inconvénient, les vis de correction sur la cassette qui porte le réseau étant inaccessibles, lorsqu'on a l'œil à l'oculaire de l'instrument, et par conséquent un assistant exercé dans ces corrections étant indispensable à chaque observation.

D'ailleurs, l'instrument est assez compliqué et exige par conséquent une foule d'autres corrections, mais on n'a que très rarement à s'occuper d'elles, après que l'instrument a été une fois dûment ajusté.

Jusqu'à présent, les seules mesures que j'ai faites avec le spectroscope ont consisté en mesures micrométriques des distances entre

certaines raies du spectre solaire. Aussi les erreurs périodiques et progressives de la vis micrométrique sont-elles les seules erreurs dans les appareils de mesure de l'instrument dont je me sois soucié.

A l'examen des erreurs périodiques, je me suis servi du même instrument que j'ai employé pour déterminer les erreurs périodiques de la vis micrométrique du réfracteur de Lund[1]). Cependant, la construction différente du micromètre du spectroscope, la vis entraînant aussi avec elle l'oculaire, a nécessité un changement dans l'appareil. Il fallut prolonger le microscope d'un tube qui descendait à peu près jusqu'à la plaque supérieure du micromètre, et l'oculaire qui produisait l'image agrandie des fils fut vissé dans ce tube au lieu de l'être dans le micromètre.

A cette recherche sur les erreurs périodiques, j'ai cru pouvoir me limiter à celle des valeurs exactes, en parties décimales d'un pas entier de la vis, des différents quatrièmes d'un tour lus sur le tambour. J'ai trouvé, en 1887, ce qui suit:

$0^r,0-0^r25$	$0^r,25-0^r,50$	$0^r,50-0^r,75$	$0^r,75-1^r,00$
0,2520	0,2488	0,2468	0,2524
0,2512	0,2508	0,2472	0,2508
0,2511	0,2511	0,2474	0,2504
0,2513	0,2500	0,2490	0,2497
Moyenne 0,2514	0,2502	0,2476	0,2508

On a donc les vraies valeurs des lectures sur le tambour et les erreurs périodiques suivantes:

Lecture	*Lecture corrigée*	*Correction*
$0^r,0000$	$0^r,0000$	$0^r,0000$
0,2500	0,2514	+ 0,0014
0,5000	0,5016	+ 0,0016
0,7500	0,7492	− 0,0008

On voit que les erreurs périodiques trouvées ne surpassent pas de beaucoup leurs erreurs probables et l'erreur inévitable d'une lecture sur le tambour. Il devrait donc être permis de les negliger entièrement,

1) N. C. DUNÉR, *Mesures micrométriques d'étoiles doubles.* P. XIV et suiv.

d'autant plus qu'aux différentes mesures de la distance entre deux raies spectrales il arrive presque inévitablement que les mesures se portent chaque jour sur des parties différentes de la vis, et que par conséquent ces erreurs s'éliminent presque entièrement dans la moyenne d'un grand nombre de mesures. Cependant j'ai préféré de rien négliger, et j'ai déduit la formule suivante pour les corrections qu'il convient d'appliquer aux lectures:

$$\text{Corr.} = + 0^r,0006 + 0^r,0014 \text{ Sin } (v - 36^0)$$

Cette formule donne pour

v =	0^0	90^0	180^0	270^0
Err. pér. =	$-0^r,0002$	$+0^r,0017$	$+0^r,0014$	$-0^r,0005$
Obs. – calcul. =	+ 0,0002	– 0,0003	+ 0,0002	– 0,0003

A l'aide de la formule trouvée, j'ai calculé la table suivante qui donne les corrections, exprimées en unités de la quatrième décimale, qu'il faut appliquer aux lectures sur le tambour:

Table des erreurs périodiques en 1887.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$0^r,0$	– 2	– 1	– 1	+ 0	+ 1	+ 2	+ 3	+ 4	+ 4	+ 5
0,1	+ 6	+ 7	+ 8	+ 9	+ 9	+10	+11	+12	+13	+13
0,2	+14	+15	+15	+16	+16	+17	+17	+18	+18	+19
0,3	+19	+20	+20	+20	+20	+20	+20	+20	+20	+20
0,4	+19	+19	+18	+18	+18	+17	+16	+16	+15	+15
0,5	+14	+13	+13	+12	+11	+10	+ 9	+ 9	+ 8	+ 7
0,6	+ 6	+ 5	+ 4	+ 4	+ 3	+ 2	+ 1	+ 0	– 1	– 1
0,7	– 2	– 3	– 4	– 4	– 5	– 6	– 6	– 6	– 7	– 7
0,8	– 7	– 8	– 8	– 8	– 8	– 8	– 8	– 8	– 8	– 8
0,9	– 7	– 7	– 7	– 6	– 6	– 6	– 5	– 4	– 4	– 3

En 1888, il m'a fallu réitérer ces recherches. En construisant le micromètre, M. Jürgensen avait commis l'erreur de faire le ressort à boudin trop court. Par conséquent, celui-ci exerçait une si forte pression sur la vis, lorsqu'on s'avançait aux plus hautes valeurs de l'échelle des tours entiers, qu'il était presque impossible d'atteindre la lecture 40,0 et pas prudent de surpasser la lecture 33. Je priai donc M. Jürgensen de remédier à ce défaut pendant l'hiver 1887—1888, en changeant le

micromètre de sorte que le ressort pût avoir presque la double longueur. Ce travail, pendant lequel le micromètre fut complètement démonté, occasionna naturellement aussi un changement très sensible dans les erreurs de la vis. J'ai donc, pendant l'été de 1888, entrepris une nouvelle détermination aussi des erreurs périodiques, détermination qui a donné les résultats suivants:

Tour	$0^r,00-0^r,25$	$0^r,25-0^r,50$	$0^r,50-0^r,75$	$0^r,75-1^r,00$
19	0,2486	0,2497	0,2520	0,2497
	0,2465	0,2496	0,2522	0,2517
	0,2503	0,2492	0,2521	0,2484
	0,2489	0,2502	0,2505	0,2505
20	0,2482	0,2503	0,2516	0,2500
	0,2471	0,2503	0,2534	0,2495
	0,2503	0,2501	0,2511	0,2485
	0,2499	0,2499	0,2530	0,2494
Moyennes	0,2487	0,2499	0,2520	0,2494

On a donc les vraies valeurs suivantes des lectures sur le tambour et par conséquent les erreurs périodiques qui suivent:

Lecture	*Lecture corrigée*	*Correction*
$0^r,0000$	$0^r,0000$	$0^r,0000$
0,2500	0,2487	− 0,0013
0,5000	0,4986	− 0,0014
0,7500	0,7506	+ 0,0006

Ces corrections donnent la formule suivante pour les corrections qu'il faut appliquer aux lectures:

$$\text{Corr} = -0^r,0005 + 0^r,00117 \sin (v + 137^0)$$

Les erreurs restantes sont resp.

Obs. − Calcul:	$-0^r,0003$	$+0^r,0001$	$-0^r,0001$	$+0^r,0002$

En comparant cette formule à celle trouvée plus haut, on voit que les erreurs périodiques de la vis sont restées les mêmes, mais que le tambour a été tourné de 180^0 sur l'arbre de la vis.

A l'aide de cette formule, on obtient la suivante

Table des erreurs périodiques en 1888 et 1889.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	+ 3	+ 2	+ 2	+ 1	+ 1	0	− 1	− 2	− 3	− 3
0,1	− 4	− 5	− 6	− 6	− 7	− 7	− 8	− 9	−10	−11
0,2	−11	−12	−12	−13	−14	−14	−15	−15	−15	−16
0,3	−16	−16	−16	−16	−17	−17	−17	−16	−16	−16
0,4	−16	−16	−16	−15	−15	−15	−14	−14	−14	−13
0,5	−13	−12	−12	−11	−11	−10	− 9	− 9	− 8	− 7
0,6	− 6	− 6	− 5	− 4	− 4	− 3	− 3	− 2	− 1	0
0,7	+ 1	+ 2	+ 3	+ 3	+ 4	+ 4	+ 5	+ 5	+ 5	+ 6
0,8	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 7	+ 7	+ 7	+ 6	+ 6	+ 6
0,9	+ 6	+ 6	+ 6	+ 6	+ 5	+ 5	+ 4	+ 4	+ 3	+ 3

J'ai dit plus haut que les fils qui sont ménagés dans le micromètre forment, dans le champ de vision, un petit rhombe dont la plus petite diagonale est parallèle à l'extension longitudinale du spectre. Cette diagonale étant à peu près égale à deux tours de la vis micrométrique, je l'ai mesurée, sous le même microscope que j'ai employé à la détermination des erreurs périodiques, mais avec des tours différents de la vis du micromètre. Il est évident que, si la vis était exempte d'erreurs progressives, on devrait obtenir partout la même valeur de cette diagonale. En effet, j'ai trouvé des valeurs qui montrent assez distinctement que la valeur d'un tour n'est pas partout exactement la même. Cependant, les valeurs trouvées en 1887 ne suivent pas la loi à laquelle elles devraient obéir, si les erreurs étaient simplement proportionnelles aux numéros des tours employés. Car, tandis que les valeurs trouvées ne diffèrent que très peu l'une de l'autre entre 3^r et 27^r, elles augmentent sensiblement entre 27^r et 39^r; par conséquent, les pas de la vis diminuent de plus en plus entre ces limites. Cette diminution rappelle l'action qui devait se produire par une pression qui, d'abord faible, allât en augmentant d'intensité à mesure qu'on se rapproche du bout de la vis. En effet nous avons déjà fait observer que le ressort à boudin qui devait prévenir les pas perdus de la vis était trop court et, que par conséquent, la pression qu'il exerçait devenait très dure dans les derniers pas de la vis.

Trois séries de mesures ont donné, pour la longueur de la diagonale mentionnée du rhombe formé par les fils du micromètre, les valeurs suivantes, exprimées en unités des tours de la vis du micromètre:

Pas moyen	*Sér. 1*	*Sér. 2*	*Sér. 3*	*Moyenne*	*Err. résid.*
4r,0	2,089	2,088	2,089	2,0887	− 20
6,0	091	092	092	0917	+ 20
8,0	991	086	090	0890	− 1
10,0	084	088	089	0870	− 14
12,0	089	087	087	0877	− 3
14,0	089	089	088	0887	+ 7
16,0	088	091	088	0890	+ 7
18,0	089	089	086	0888	− 1
20,0	090	089	088	0890	− 4
22,0	089	090	088	0890	− 10
24,0	089	091	093	0910	+ 2
26,0	090	091	093	0913	− 2
28,0	094	093	093	0933	+ 9
30,0	094	092	092	0927	− 4
32,0	093	095	092	0933	− 7
34,0	094	094	092	0933	− 18
36,0	100	092	101	0977	+ 20
38,0	096	098	095	0963	− 3

Pour mieux éliminer les erreurs accidentelles, j'ai réuni successivement ces moyennes, trois à trois, aux nouvelles moyennes suivantes.

Pas moyen	*Observation*	*Calcul.*
6,0	2,0898	2,0897
8,0	0892	0891
10,0	0879	0885
12,0	0878	0881
14,0	0885	0881
16,0	0888	0883
18,0	0889	0889
20,0	0889	0894
22,0	0898	0900
24,0	0904	0907
26,0	0919	0914
28,0	0924	0922
30,0	0931	0929
32,0	0931	0937
34,0	0948	0946
36,0	0958	0954

Ensuite, j'ai marqué les donnés ainsi obtenus sur du papier quadrillé, de sorte, que j'ai pris les numéros des pas entiers pour abscisses et les distances trouvées pour ordinates, après quoi j'ai tracé une courbe

parabolique aussi près que possible des points ainsi dessinés. Par des mesures sur cette courbe, j'ai obtenu des valeurs interpolées pour 0,1 etc. Puis, j'ai divisé tous ces nombres par celui qui est valable pour 20,0 et enfin, j'ai interpolé au milieu. En partant du nombre valable pour 20,0 qui naturellement est 20,0000, j'ai, des deux côtés, soustrait resp. additionné les valeurs trouvées, et après avoir soustrait les nombres entiers (0 jusqu'à 40) j'ai trouvé la suivante

Table des erreurs progressives de la vis en 1887.

Lecture	*Corr.*	*Lecture*	*Corr.*
0r,0	− 4	21,0	− 1
1,0	− 18	22,0	− 3
2,0	− 30	23,0	− 7
3,0	− 39	24,0	− 12
4,0	− 46	25,0	− 20
5,0	− 52	26,0	− 29
6,0	− 54	27,0	− 40
7,0	− 55	28,0	− 53
8,0	− 54	29,0	− 68
9,0	− 52	30,0	− 85
10,0	− 48	31,0	− 103
11,0	− 43	32,0	− 124
12,0	− 36	33,0	− 146
13,0	− 30	34,0	− 171
14,0	− 23	35,0	− 198
15,0	− 17	36,0	− 227
16,0	− 11	37,0	− 258
17,0	− 6	38,0	− 291
18,0	− 3	39,0	− 326
19,0	− 1	40,0	− 365
20,0	0		

C'est en combinant ces corrections avec la valeur 2,0894 à 20r,0 que j'ai obtenu les valeurs calculées de la plus petite diagonale du rhombe formé par les fils du micromètre.

En répétant, en 1888, cette même recherche, j'ai mesuré, au lieu du diamètre du rhombe formé par les fils du micromètre, le côté d'un petit réseau tracé sur glace. En faisant les mesures de la manière déjà expliquée, j'ai obtenu les valeurs suivantes:

Pas Moyen	*Sér. 1*	*Sér. 2₁*	*Sér. 2₂*	*Sér. 3*	*Sér. 4*	*Sér. 5*	*Sér. 6₁*	*Sér. 6₂*	*Moyennes*
2,0	3,9282	3,9362	3,9346	3,9329	3,9404	3,9432	3,9341	3,9408	3,9363
6,0	9359	9444	—	9421	9420	9496	9458	9401	9428
10,0	9463	9468	—	9473	9464	9421	9468	—	9460
14,0	9402	9433	—	9428	9451	9409	9413	—	9434
18,0	9394	9438	—	9393	9469	9426	9452	—	9429
22,0	9382	9428	—	9399	9434	9361	9433	—	9406
26,0	9409	9401	—	9432	9387	9428	9346	—	9401
30,0	9441	9434	—	9453	9353	9467	9415	9449	9430
34,0	9424	9412	—	9425	9389	9437	9392	—	9413
38,0	9372	9374	—	9394	9374	9339	9357	—	9368

Puis, j'ai marqué les moyennes sur du papier quadrillé et par des mesures sur la courbe menée aussi près que possible par les points ainsi marqués, j'ai trouvé des valeurs pour 0,5 1,5 etc. jusqu'à 39,5. Après avoir divisé ces nombres par celui qui est valable pour 20,0, j'ai déduit d'une méthode analogue de celle employée pour les mesures en 1887 la suivante

Table des erreurs progressives de la vis en 1888 et 1889.

Lecture	*Corr.*	*Lecture*	*Corr.*
0r,0	+ 43	21r,0	+ 1
1,0	+ 60	22,0	+ 2
2,0	+ 73	23,0	+ 5
3,0	+ 82	24,0	+ 8
4,0	+ 88	25,0	+ 11
5,0	+ 90	26,0	+ 13
6,0	+ 88	27,0	+ 14
7,0	+ 83	28,0	+ 14
8,0	+ 75	29,0	+ 12
9,0	+ 65	30,0	+ 9
10,0	+ 55	31,0	+ 6
11,0	+ 45	32,0	+ 3
12,0	+ 36	33,0	+ 1
13,0	+ 28	34,0	+ 0
14,0	+ 20	35,0	+ 1
15,0	+ 14	36,0	+ 5
16,0	+ 9	37,0	+ 12
17,0	+ 5	38,0	+ 22
18,0	+ 2	39,0	+ 34
19,0	+ 1	40,0	+ 50
20,0	0		

En m'accordant la somme dont j'ai parlé en commençant, le conseil d'administration de »Lars Hjertas Minne» avait exprimé le désir que le spectroscope fût employé à une recherche aussi approfondie que possible sur la question de savoir, si la longueur d'onde d'un rayon lumineux monochromatique est altérée proportionellement au mouvement de la source lumineuse selon le »principe de Doppler», dont la justesse a été si vivement contestée. Cependant, avant de passer aux observations à l'aide desquelles je crois avoir tranché la question, il me faut d'abord rendre compte, au moins sommairement, des travaux antérieurs sur ce champ de recherches si éminemment intéressant.

En 1842, Chrétien Doppler publia son fameux mémoire sur la lumière colorée des étoiles doubles[1]). Dans ce mémoire, il soutient d'abord[2]) la thèse fondamentale que, quand on parle des ondes lumineuses ou acoustiques comme les causes des perceptions de la lumière ou du son, et non seulement comme des procès objectifs, il ne faut pas demander dans quels intervalles de temps et avec quels dégrés d'intensités ces vibrations se font en réalité, mais plutôt dans quels intervalles de temps et avec quelle force elles sont reçues et perçues par l'œil ou l'oreille d'un observateur quelconque. Car la couleur et l'intensité d'un rayon lumineux, ainsi que la hauteur et la force d'un ton musical dépendent de ces déterminations purement subjectives et non pas des procédés réels. Par conséquent, s'il arrive, en quelque sorte, qu'il y ait une différence entre le procédé objectif et le résultat subjectif, il faut indubitablement se tenir aux déterminations subjectifs.

Partant de ce théorème, qu'on peut bien avoir tout lieu de considérer comme axiomatique, Doppler passe à l'examen de l'influence d'un mouvement soit de l'observateur, soit de la source lumineuse. Sa manière de raisonner — abstraction faite de quelques inexactitudes, probablement des erreurs typographiques — est d'ailleurs la suivante:

Soit (Fig. 1) Q la source lumineuse, supposée en repos, A et O resp. le commencement et la fin d'une onde lumineuse et soit O la position de l'observateur au moment, où la vibration est arrivée en A et soit α la vitesse avec laquelle l'observateur est entrainé dans la direction OQ; soit a la vitesse de la lumière, n le temps que la lumière emploie

1) *Über das farbige Licht der Doppelsterne und einiger anderer Gestirne des Himmels. — Versuch einer das Bradleysche Aberrationstheorem als integrirenden Theil in sich schliessenden allgemeineren Theorie. Abhandlungen der königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften.* V Folge Bd. 2.

2) l. c. p. 469 § 2.

pour passer de A à O et x le temps qu'elle met à parvenir à l'observateur en O'. Alors on a

$$OA = an\ , \qquad O'A = ax\ , \qquad OO' = \alpha x\ .$$

Par conséquent

$$ax + \alpha x = an$$

ou si le mouvement du point O est dirigé dans le sens opposé

$$ax - \alpha x = an\ ;$$

donc

$$x = \frac{an}{a + \alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Si au contraire le point d'observation est immobile, tandis que la source lumineuse se rapproche ou recède avec une vitesse α , il faut, avant tout, tenir compte de l'influence de ce mouvement sur l'onde la plus rapprochée de la source lumineuse, les ondes déjà formées ne pouvant plus s'altérer par leur passage à travers l'espace jusqu'à l'observateur éloigné.

Pendant que la première onde passe de Q à A (Fig. 2) en parcourant un chemin égal à an , la source lumineuse même s'est transportée à Q' en parcourant un chemin égal à αn , et il faut que la seconde onde s'exécute dans le temps nécessaire à la lumière pour parcourir l'éspace AQ'. Ce temps étant égal à x , AQ' devient égal à ax et l'on a:

$$an - \alpha n = ax$$

d'où

$$x = \left(\frac{a - \alpha}{a}\right) . n$$

ou

$$x = \left(1 - \frac{\alpha}{a}\right) n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Si au lieu de s'approcher de l'observateur, la source lumineuse s'en éloigne, la formule (2) se transforme en

$$x = \left(1 + \frac{\alpha}{a}\right) n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Dans les trois formules (1), (2) et (3) est compris le »principe de Doppler». Doppler lui même croyait, à l'aide de ce principe, pouvoir expliquer bien des phénomènes célestes jusque là inexpliqués, savoir, les couleurs des étoiles doubles, les étoiles nouvelles et variables, etc., mais les conclusions auxquelles il arrivait n'étaient pas justes. En effet, le mouvement d'une étoile quelque rapide qu'il soit ne saurait produire un changement de couleur ni d'éclat, que sous des circonstances exceptionnelles. Car la lumière de la plupart des étoiles semble consister en des rayons de toutes longueurs d'onde possibles, les rayons visibles étant bordés des deux côtés par des rayons invisibles dont les longueurs d'onde sont resp. plus grandes ou plus petites. Si donc les longueurs d'onde des rayons émanées d'une étoile étaient soit raccourcies, soit rallongées par le mouvement de l'étoile, le seul effet serait que certains rayons d'un des côtés du spectre visuel déviendraient invisibles, mais en même temps remplacées par d'autres rayons qui, bien qu'en réalité d'une longueur d'onde plus grande ou plus pétite, présenteraient à l'observateur absolument les mêmes couleurs que les rayons dévenues invisibles. Un changement de couleur ne pourrait se produire que dans le cas où l'un des côtés du spectre serait réduit par de fortes absorptions dans l'atmosphère de l'étoile. Mais dans ce cas, ces absorptions seules suffisent amplement pour expliquer les couleurs de ces étoiles, sans qu'on ait besoin de recourir à l'hypothèse peu probable d'un mouvement assez rapide pour produire un changement considérable des longuers d'onde des rayons.

Peut-être le principe de Doppler doit-il sa célébrité en premier lieu à la grande portée que son auteur croyait pouvoir y attribuer. Autrement on n'aurait guère eu besoin de tant de persévérance et d'un tel excès d'érudition pour chercher à renverser une théorie qui réellement était sans influence sur les mesures spectrales les plus raffinées qu'on était alors en état de faire.

Le premier, qui porta un jugement sur la théorie de Doppler fut Bolzano[1]) qui non seulement était un partisan de cette théorie, mais qui aussi cherchait à écarter une difficulté à laquelle Doppler lui-même la croyait sujette; savoir, qu'elle serait compromise sinon entièrement refutée, si l'opinion était fondée que la lumière consiste en des vibrations transversales. Bolzano fait en effet valoir, que les fondateurs de cette hypothèse déduisent les couleurs exclusivement de la vitesse de la lumière dans son mouvement progressif.

1) Poggendorffs *Ann.* 1843 T. 60 p. 83 et suiv.

BUYS BALLOT cherchait aussi à consolider la partie physique de la théorie en faisant des expériences acoustiques sur le chemin de fer entre Utrecht et Maarsen [1]). Il examinait tantôt en se plaçant tout près du chemin de fer le ton émis par un instrument musical joué par un musicien placé sur une locomotive lancée à toute vitesse et il trouvait toujours le ton le plus élevé quand la locomotive s'approche et le plus bas quand elle s'éloignait; tantôt, en se plaçant lui-même sur la locomotive, et mettant le musicien tout près des rails, il trouvait aussi des élevations ou des abaissements du ton dans le sens voulu par la théorie. Il va sans dire qu'il se déclara comme adhérent à cette partie de la théorie et en outre trouva indiscutable qu'elle fût valable aussi pour les ordres lumineuses.

BUYS BALLOT était au contraire un adversaire décidé de l'application de la théorie Dopplerienne, sur l'explication des couleurs des étoiles, et il allégua [2]), entre autres raisons, contre elle, celle que nous avons déjà exposée. Contrairement à DOPPLER, BUYS BALLOT croyait que les couleurs des étoiles étaient causées par leur nature différente, et cite à l'appui de son opinion les différences qu'avait trouvé FRAUNHOFER entre les spectres de différentes étoiles et il conclut en disant qu'il serait intéressant d'étendre les recherches spectrales de FRAUNHOFER aux étoiles variables. On sait que ces voeux ont été réalisés, bien que vingt années se fussent écoulées avant qu'aucun astronome n'embrassât l'opinion qu'il y avait quelque chose à gagner à l'étude des spectres stellaires.

DOPPLER cherchait à atténuer les objections de BUYS BALLOT [3]) mais il faut reconnaître que sa défense n'est pas très heureuse. D'ailleurs, cette partie de sa théorie ayant été complètement réfutée par l'analyse spectrale de la lumière des étoiles il n'y a aucune raison de s'y arrêter.

M. FIZEAU communiqua en 1848 à la Société Philomatique [4]) une note sur cette question qu'il a plus tard fait réimprimer [5]). Il commence par la remarque que si l'on considère un corps émettant un son toujours

1) POGG. *Ann.* 1845. T. 66 pp. 321—351.

2) L. c. § 13.

3) POGG. *Ann.* 1846. T. 68 p. 1.

4) Il ne m'a pas été possible de trouver un exemplaire du Bulletin de la Société Philomatique pour 1848. Pas même la grande Bibliothèque Nationale de France ne possédait un seul des tomes de la première série de ce bulletin.

5) *Annales de Chimie et de Physique* IV Série Tome IX (1870) p. 211—221.

identique et si l'on suppose qu'on lui imprime un mouvement de translatation rapide, il faut que, l'air environnant ne participant pas au mouvement, les ondes sonores se propagent indépendamment du mouvement du corps vibrant; de sorte qu'en avant les ondes successives soient plus rapprochées, en arrière plus éloignées, et que leurs distances soient à droite et à gauche les mêmes que si le corps sonore était en repos. Alors un observateur placé dans ces diverses positions percevra des sons plus aigus, s'il est en avant, plus graves s'il est en arrière. On peut aussi considérer le cas inverse, celui où l'observateur est en mouvement et le corps sonore fixe; cette supposition conduit à des conséquences semblables.

M. Fizeau a aussi cherché à constater l'existence de ces phénomènes par des expériences. Dans ce but, il a employé une roue tournante de $0{,}5^{m}$ de rayon qui portait sur son bord et perpendiculairement à lui une carte qui à la rotation de la roue rencontrait les dents de l'un ou de l'autre de deux arcs de 20° qui se trouvaient au-dessus et au-dessous de la roue. Chacun de ces arcs portait cinq dents. Lorsque la roue fut mise en mouvement, le choc de la carte sur les dents fixes produisit un son qui varia avec la position, de sorte que l'observateur, placé à quelques mètres en avant de l'appareil entendit un son plus aigu, tandis qu'en arrière le son était plus grave que celui qu'on entendait en se plaçant près de l'appareil. L'expérience devenait encore plus frappante par l'arrangement qu'avait pris M. Fizeau que pendant quelques instants le son ne fût produit que par l'arc supérieur, puis aussitôt après par l'arc inférieur et ainsi alternativement. De cette façon M. Fizeau pouvait constater les intervalles donnés par le calcul; le demiton, le ton et la tierce mineur, et la tierce majeure s'obtenait encore. La vérification de la théorie était donc parfaite.

Puis M. Fizeau passe aux variations de longueur d'onde que doivent subir les raies spectrales du soleil et des étoiles. Il trouve que l'énorme vitesse de la lumière est un grand obstacle à la vérification des formules, mais il exprime cependant l'espoir qu'elle réussira.

M. Fizeau avait non seulement appuyé la théorie de Doppler par son développement théorique, mais il en avait aussi donné une vérification expérimentale relative aux ondes acoustiques. Sestini [1]) croyait pouvoir faire de même pour les ondes lumineuses. Il donne d'abord la démonstration suivante de la théorie.

1) Gould: *Astronomical Journal* 1850. Vol. I pp. 88—90.

Soit E (Fig. 3) l'oeil et P le point lumineux. Soit t le temps qu'il faut à une ondulation pour parcourir la distance PE et soit $t + \vartheta$ le temps pendant lequel la même ondulation parcourt la distance $P'E$ et soit n le nombre des ondulations pendant une seconde. Si P se transporte en P' dans T secondes, il faut que la première des nT ondulations qui se sont formées pendant ce temps arrive en E après t secondes et que la dernière d'elles y parvienne après le temps $(t + \vartheta) + T$; donc, $(t + \vartheta) + T - t$ étant égal à $T + \vartheta$, il faut que nT vibrations dans l'oeil de l'observateur pendant le temps $T + \vartheta$ correspondent au même nombre de vibrations faites par le point lumineux dans T secondes. Si, au contraire, le point est immobile en P, toutes les vibrations depuis la première jusqu'à la dernière exigent le même temps t pour arriver à E, et par conséquent l'oeil est frappé par nT vibrations pendant le temps T. Par conséquent, le nombre de pulsations qui rencontre la rétine pendant un intervalle donné est différent si le point lumineux est en repos ou en mouvement, et la relation est comme

$$1 : \frac{T}{T + \vartheta} .$$

Si le point lumineux se meut vers E la relation dévient

$$1 : \frac{T}{T - \vartheta} .$$

SESTINI s'imaginait avoir trouvé une verification expérimentale de cette théorie, ayant cru avoir constaté des variations dans la couleur de certaines étoiles. Inutile de dire que les évaluations des couleurs des étoiles sont trop peu sûres pour qu'on puisse admettre ces conclusions.

DOPPLER était cependant d'un avis tout différent. Il déclare [1]) qu'il est maintenant prouvé que toutes les étoiles sont en effet blanches ou blanc jaune clair et que les couleurs plus prononcées qu'on aperçoit dans quelques-unes sont produites par leurs mouvements propres. Il est même porté à regarder les différences qu'il y a entre les évaluations de couleur faites par SESTINI à Rome et à Georgetown comme ayant une origine objective, par conséquent, comme étant causées par un changement dans la direction ou dans la vitesse des mouvements. Il trouve

1) *Sitzungsberichte der Wiener Akad.* 1852 $^{22}/_{1}$ T. VIII pp. 91—97.

cet avis appuyé par la circonstance que Sestini avait en général vu les étoiles doubles présenter des couleurs différentes à Rome et à Georgetown. Il croit par conséquent qu'on pourrait bien établir sur les changements des couleurs dans les étoiles d'importantes recherches sur leurs mouvements.

Jusque-là Doppler avait eu la satisfaction de voir sa théorie acceptée presque sans réserve, malgré l'étonnement qu'elle avait éveillé d'abord; et de plus, toutes les expériences qu'on avait faites l'avaient confirmé ou du moins n'avaient en aucune façon été en désaccord avec elle. Mais dans le même fascicule des *Sitzungsberichte* où se trouve la dernière note de Doppler, Petzval a publié un mémoire intitulé *Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre: Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer* [1]), dans lequel, sans faire d'ailleurs allusion à la théorie de Doppler, il commence par faire une rigoureuse distinction entre »la petite et la grande science». Pour celle-la, il compte entre autres les observations p. ex. »celles qui conduisaient à la découverte des lois de Kepler» pour celle-ci »*die riesigen Denkmethoden der mathematischen Wissenschaften*». Fidèle à ces principes, il passe ensuite à une recherche mathématique sur les vibrations, produites par une source lumineuse ou acoustique dans un milieu où les molécules se trouvent en mouvement rectiligne. Il parvient par l'intégration des équations différentielles auxquelles le problème le conduit à ce résultat, que, *dans tout mouvement oscillatoire la durée des oscillations est une constante qui ne dépend ni de la densité du milieu ni des courants qui peuvent se trouver au dedans de lui.* Il avoue, cependant, que l'amplitude des oscillations et même leur longueur d'onde pourraient bien être sujettes à des variations, causées par ces courants. Il croyait par cette déduction »avoir érigé un phare, capable de protéger les moins expérimentés contre certains bancs et récifs qui se trouvent au milieu de l'océan de la science».

Doppler et von Ettingshausen, qui depuis ce temps se joignait à lui comme allié, étaient cependant d'une opinion tout différente sur la portée et l'importance du principe de Petzval pour la question dont il s'agissait. Doppler [2]) fit valoir que Petzval s'était tenu exclusivement aux procès intérieurs, purement objectifs et mécaniques. Mais quand on s'occupe de ceux-ci, il ne faut pas — sous peine d'être mal compris —

1) *Sitzungsberichte der Wiener Akad. der Wissensch.* 1852 Jan. 22 T. VIII, pp. 134—156.

2) *Sitzungsber. der Wiener-Akad.* 1852. T. VIII pp. 587—593.

identifier les notions corrélatives, mais qu'on ne peut pas directement substituer les unes aux autres, de ton et de couleur, lesquelles n'ont trait qu'aux sentiments, on ne doit pas même employer de tels mots. Quant à l'influence du mouvement sur le ton ou sur la couleur, DOPPLER fait observer qu'elle peut être prouvée avec toute sûreté possible sans qu'on ait besoin de faire des expériences. Si une source lumineuse A émet dans chaque seconde n ondes, il est évident qu'un point B en reçoit n dans chaque seconde, aussi longtemps que la distance AB est invariable. Mais si cette distance augmente ou diminue par le mouvement de l'un ou des deux points, il faut que le nombre des ondes reçues soit resp. plus petit ou plus grand, les ondes ayant à parcourir un chemin qui devient de plus en plus grand ou petit. Mais quand la vitesse est constante, un chemin plus petit est parcouru dans un temps plus court et un plus grand nombre d'ondes arrivées en B est la conséquence nécessaire d'un temps de trajet plus court. Ces considérations sont d'une nature purement phoronomique et n'ont rien à faire avec les procès intérieurs de la formation des ondes. Suppose-t-on le point B remplacé par un observateur, on voit que: *quand une source lumineuse ou acoustique et un observateur s'approchent ou s'éloignent l'une de l'autre, la couleur ou le ton subit une variation correspondante.* Cette thèse étant évidente par elle-même, elle n'a pas proprement besoin d'être prouvée par des expériences. De ce que PETZVAL néglige les expériences faites par BUYS BALLOT et autres, il fait preuve du peu d'estime qu'il a en général pour les observations. Mais aussi les équations différentielles peuvent tromper si l'on ne les interprète avec jugement. En même temps que DOPPLER, VON ETTINGSHAUSEN fit ressortir [1]) une thèse, reconnue depuis longtemps par les mathématiciens, savoir que, quand il s'agit du mouvement imprimé à un milieu élastique par l'influence d'un corps oscillant, pendant un certain laps de temps, chaque impulsion exercée pendant un temps infiniment petit offre un état initial spécial du milieu, lequel produit sa propre action. Le mouvement dans chaque point du milieu, à un moment suivant, est le résultat de la réunion des mouvements individuels qui se produisent au point en question au moment donné. Cette thèse conduit, pourvu que le corps se trouve dans un mouvement progressif, précisément à la théorie de DOPPLER. D'ailleurs, les ondes préliminaires, remplissant toute l'espace qui forment l'objet des recherches de PETZVAL, ne sont pas celles qui influencent nos organes en qualité de lumière ou

1) *Sitzungsber. der Wiener-Akademie.* T. VIII p. 593—594.

de son, mais elles ne sont que des moyens pour parvenir aux ondes réellement efficaces qui sont obtenues par leur composition.

Déjà, avant que Doppler et von Ettingshausen eussent présenté à l'Académie des sciences de Vienne ces objections contre la critique de Petzval, celui-ci avait dû remarquer, pendant des entretiens avec plusieurs savants qu'on ne partageait nullement la réfutation de la théorie de Doppler. A cause de cela, il publia encore deux mémoires sur le même sujet [1]). Dans le premier, il commence par une attaque nouvelle contre les »manières populaires de voir» en faisant des objections contre l'idée que les ondes lumineuses ou acoustiques sont quelque chose de progrédiant, de matériel qui fait sur l'oeil ou l'oreille l'impression de différents couleurs ou de différents tons, par les chocs plus ou moins nombreux qu'il exerce sur ces organes. Si l'on leur attribue en outre la réalité, il est évident que l'oeil ou l'oreille accepte un nombre plus grand ou plus petit d'ondes à mesure que l'observateur se rapproche ou s'éloigne de la source d'oscillation. Mais selon Petzval il n'y a, dans les ondes, absolument rien de matériel et de progressif, mais seulement une forme, c'est à dire le lieu géometrique où un certain cosinus a la valeur 1. On ne peut non plus parler d'aucun choc ou coup. Ce qu'il y a d'ailleurs d'incorrect, dans les »idées populaires», c'est qu'on a admis

1° que le milieu transmet l'oscillation, mais non pas le mouvement progressif de la source:

2° que l'oscillation n'est pas communiquée au milieu et à l'oeil ou à l'oreille pendant un certain laps de temps, mais soudainement par une sorte de choc ou d'explosion.

Chacune de ces suppositions suffirait à elle seule pour rendre fausse la théorie du procédé qu'on voudrait y établir.

Pour mieux éclaircir la question, Petzval entreprenait une telle recherche en partant de cette supposition qu'une oscillation est imposée à un milieu, de telle sorte que les molécules qui se trouvent dans un plan acceptent une phase d'oscillation, ceux qui se trouvent dans le plan voisin, la phase suivante, etc., de sorte que le point où a lieu l'agitation se déplace dans l'espace. Alors l'onde plane se divise en au moins deux qui se meuvent avec la même vitesse constante dans des sens opposés. Si donc le déplacement primitif du point est $\xi = 2f(x)$ où $f(x)$ n'a une

1) *Sitzungsber. der Wiener-Akad.* (1852 $^{21}/_{5}$ et $^{1}/_{6}$) VIII p. 567—586 et IX p. 699—737.

valeur qui diffère sensiblement de zéro que dans le voisinage de $x = 0$, on a après le temps t

$$\xi = f(x - st) + f(x + st) \ .$$

Cette expression ne diffère sensiblement de zéro que dans le voisinage de

$$x = + st \text{ ou } x = - st \ .$$

S'il y a en outre une suivante agitation correspondante au temps $t = \vartheta$ et qui a lieu dans un plan parallèle au premier et qui est à une distance égale à b de lui, on a le déplacement

$$\xi' = f[x - b - s(t - \vartheta)] + f[x - b + s(t - \vartheta)] \ .$$

S'il y a enfin un nombre illimité de très petites agitations qui ont lieu dans le laps de temps infiniment petit $d\vartheta$, dont l'intensité est proportionnelle à $d\vartheta$ et dont le lieu géométrique avance dans l'espace avec la vitesse c; on a pour chacune d'elles

$$b = c\vartheta \ ,$$

et le déplacement ξ devient

$$\xi = \int_0^t f[x - c\vartheta - s(t - \vartheta)]\, d\vartheta + \int_0^t f[x - c\vartheta + s(t - \vartheta)]\, d\vartheta \ .$$

Si, au contraire, l'agitation progressive était de nature périodique et son intensité n'était pas proportionnelle à $d\vartheta$, mais p. ex. au produit $\frac{Sin\, k\vartheta \ .\ d\vartheta}{t}$, on aurait

$$\xi = \int_0^t f[x - c\vartheta - t(t - \vartheta)]\, Sin\, k\vartheta \ .\ d\vartheta + \int_0^t f[x - c\vartheta + s(t - \vartheta)]\, Sin\, k\vartheta \ .\ d\vartheta .$$

Pour effectuer l'intégration, on fait les substitutions

$$\left.\begin{aligned} x - c\vartheta - s(t - \vartheta) &= u \\ x - c\vartheta - s(t - \vartheta) &= u' \end{aligned}\right|$$

et l'on obtient

$$\xi = \frac{C}{s-c} \sin \frac{k}{s-c}(st-x) - \frac{C'}{s+c} \sin \frac{k}{s+c}(st+x) .$$

Cette expression représente deux traits d'ondes dont les amplitudes sont proportionnelles à

$$s-c \quad \text{et} \quad s+c$$

et dont les longueurs d'onde sont

$$\frac{2\pi(s-c)}{k} \quad \text{et} \quad \frac{2\pi(s+c)}{k} .$$

En outre, les mouvements de ces deux traits d'ondes se font, dans l'espace, dans des directions qui sont diamétralement opposées l'une à l'autre.

Petzval lui-même désapprouve absolument les résultats auxquels il est parvenu, comme étant basés sur une fausse hypothèse. Cependant, si l'on a moins de préjugés que n'avait Petzval, on remarquera, qu'en raison du peu de diamètre des corps sonores, le milieu ambiant ne prendra qu'une très faible part à leur mouvement. Quand il s'agit de la lumière, il semble indubitable, et même un adversaire aussi décidé de la théorie Dopplerienne que l'était Van der Willigen le reconnaît, que les corps célestes n'entraînent pas du tout l'éther avec eux. Par conséquent, les formules de Petzval ne prêtent à aucune objection quant à la lumière.

Si d'autre part on considère la portée de ces formules sur la question qui nous occupe, on remarque qu'elles tranchent la question précisément en faveur de la théorie Dopplerienne, c'est à dire qu'il y a, en avant, des ondes raccourcies et en arrière des ondes prolongées.

Dans la suite de ce mémoire, Petzval continue ses attaques contre la théorie de Doppler, et il fait aussi entrevoir ce qui lui déplaisait si souverainement en elle, en demandant: »que d'utile pour le calculateur peut d'ailleurs se trouver dans une déduction de huit lignes, basée seulement sur la théorie des équations du premier dégré avec un seul inconnu?» Ce que Petzval regrettait, dans la théorie, était sans doute l'emploi des équations différentielles sans lesquelles selon lui une théorie ne peut jamais entrer dans la catégorie de la »grande science». En passant ensuite à une recherche plus profonde, Petzval se propose de

mettre en regard les unes des autres les conséquences de la théorie de DOPPLER dans sa forme primitive, celles de la même théorie ennoblie par la recherche déjà citée de PETZVAL, par conséquent exempte de l'hypothèse erronée de la communication explosive de la vibration au milieu, et enfin celles de la sienne qui tiendrait compte aussi du mouvement du milieu.

PETZVAL commence par la théorie »ennoblie» et parvient, en supposant que la source de la vibration ait la forme d'un plan, aux résultats déjà donnés ci-dessus. Mais il traite aussi les cas où la théorie de DOPPLER semble conduire à des résultats absurdes, à savoir ceux quand la source a une vitesse égale ou plus grande que celle du son ou de la lumière. Dans le premier cas, il trouve en effet une longueur d'onde nulle et par conséquent un ton infiniment haut, mais l'amplitude et par conséquent l'intensité en est aussi zéro. Dans le second cas, comme il est d'ailleurs facile à prévoir, la source laisse derrière elle l'un et l'autre des deux traits d'ondes formés, mais toujours on obtient les mêmes valeurs des longueurs d'onde.

Finalement PETZVAL prend en considération le cas où la source lumineuse a la forme d'une sphère et il trouve:

$$\xi = \int_0^t \frac{Sin\, k\vartheta \,.\, d\vartheta}{\sqrt{(x - c\vartheta)^2 + y^2 + z^2}} \cdot f\left[\sqrt{(x - c\vartheta)^2 + y^2 + z^2} - s(t - \vartheta)\right] +$$

$$+ \int_0^t \frac{Sin\, k\vartheta \,.\, d\vartheta}{\sqrt{(x - c\vartheta)^2 + y^2 + z^2}} \cdot f\left[\sqrt{(x - c\vartheta)^2 + y^2 + z^2} + s(t - \vartheta)\right] .$$

Il recule cependant devant les difficultés de ces intégrations et se limite de les effectuer dans la supposition que

$$y^2 + z^2 = 0 \ ,$$

d'où en faisant successivement les substitutions

$$x - st + \vartheta(s - c) = R + u$$

$$x + st - \vartheta(s + c) = R + u \ ,$$

R étant le rayon de la sphère, on obtient

$$(4) \quad \xi = \frac{A}{s(x - ct) - cR} \cdot Sin\, k \,.\, \frac{R - x + st}{s - c} +$$

$$+ \frac{B}{s(x - ct) + cR} \cdot Sin\, k \,.\, \frac{R - x - st}{s + c} \ .$$

Les amplitudes sont resp.

$$(5) \quad . \quad . \quad \alpha = \frac{A}{s(x-ct) - cR} \text{ et } \alpha' = \frac{B}{s(x-ct) + cR}$$

et les longueurs d'onde:

$$(6) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \lambda = \frac{2\pi(s-c)}{k} \text{ et } \lambda' = \frac{2\pi(s+c)}{k} .$$

Si au lieu de s et de c, on introduit V et v, celui-là étant la vitesse de la lumière et celui-ci la vitesse de la source lumineuse et λ_0 la longueur d'onde vraie du rayon qu'on considère, et pour laquelle on a $v = c = 0$, donc

$$\lambda_0 = \frac{2\pi V}{k} ,$$

on obtient:

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad \lambda = \lambda_0\left(1 - \frac{v}{V}\right) \quad ; \quad \lambda' = \lambda_0\left(1 + \frac{v}{V}\right) .$$

Ces formules sont précisement celles qui expriment le principe de Doppler.

D'après ce qu'avait dit tout d'abord Petzval, il eût dû maintenant passer aux deux autres théories. Mais il se limite à quelques expressions dédaigneuses sur la théorie non »ennoblie» de Doppler. Quant à la sienne propre, il n'en dit presque mot. On serait tenté de croire que tout en développant la théorie »ennoblie», Petzval a commencé d'en reconnaître la vérité, et bien qu'un sentiment obstiné l'empêche de l'avouer en toute franchise, il finit son mémoire en déclarant que la question sur l'influence du mouvement de la source lumineuse sur les longueurs d'onde n'est pas entièrement tranchée. Dans un mémoire suivant, *Ångströms experimentelle Untersuchung über das Spectrum des electrischen Funkens in Beziehung auf die Farbe der Doppelsterne*[1]), Petzval dit même avoir trouvé »qu'avec les méthodes de la théorie de l'ondulation, suivies jusqu'ici, on ne peut rien trouver qui serve à éclaircir la question». Un pas de plus et il eût avoué que la théorie des ondulations conduit inévitablement à la théorie de Doppler. Mais c'eût été plus qu'on ne pourrait demander d'un savant, si prompt à nier la possibilité

1) *Sitzungsberichte der Kais. Akad. der Wissenschaften.* Bd. XLI. 5 Juli 1860.

de découvrir, à l'aide des calculs élémentaires, un grand et fécond principe de la physique céleste.

Nous nous sommes arrêtés, fort en détail, à ces mémoires de PETZVAL, non pas parce que nous les regardons comme une importante objection contre la théorie de DOPPLER, mais tout au contraire parce qu'on y trouve une des plus belles démonstrations que nous connaissons de la vérité de cette théorie, et contre laquelle il n'y a aucune raison bien sérieuse de critique, tout au moins quand il s'agit des ondes lumineuses et des mouvements lents de la source lumineuse. Nous passerons plus sommairement sur les autres écrits polémiques de cette question.

VON ETTINGSHAUSEN [1]) reconnut tout juste la portée du second mémoire de PETZVAL, en remarquant que loin de réfuter la théorie de DOPPLER il en prouvait la justesse.

DOPPLER [2]) fit ressortir les nombreuses expériences qui avaient été faites, dans le but d'examiner la justesse de sa théorie, et qui toutes avaient donné des résultats à sa faveur. Il remarque que PETZVAL semblait les négliger avec intention et lui reproche cet *horror experientiæ*. Il remarque, en outre, que jamais des considérations théoriques ne peuvent réfuter des expériences bien conduites, et il déclare ne plus vouloir entrer dans des controverses avec PETZVAL, à moins que celui-ci n'essaye de réfuter les expériences déjà faites par d'autres faits encore plus nombreux et plus importants.

Parmi les adversaires de la théorie de DOPPLER et le seul qui a cru pouvoir la réfuter par des expériences était ÅNGSTRÖM [3]). Il énonçait contre elle qu'en faisant jaillir l'étincelle d'induction, dans une direction oblique, au devant de la fente d'un spectroscope, il faudrait que les raies spectrales d'une même substance eussent des longueurs d'onde différentes dans les deux traits de feu qui sortent de l'une et de l'autre électrode, dans des directions opposées et avec des vitesses relatives de 160—180 kilomètres dans la seconde.

M. MACH qui était de ceux qui ont non seulement le plus clairement compris la justesse générale de la théorie Dopplerienne, mais aussi les imperfections qu'il y avait dans la méthode dont DOPPLER lui-même avait cherché à la démontrer, traite la question dans plusieurs mémoires [4]).

---

1) *Sitzungsber. der Wiener Akad.* Bd. IX pp. 27—30.

2) *Sitzungsber. der Wiener Akad.* Bd. IX pp. 217—225.

3) POGG. *Ann.* Bd. XCIV p. 141.

4) Réunis dans: E. MACH. *Beiträge zur Dopplerschen Theorie der Ton- und Farbenänderung durch Bewegung.* Prag 1874.

M. Mach commence par déclarer que ce n'est pas son intention de défendre sans réserve les mémoires de Doppler. Au contraire, il trouve bien fondées les critiques de Petzval contre la démonstration qu'a donné Doppler de son principe. En effet, celle-ci s'appuie plutôt sur des analogies que sur des recherches approfondies. On ne saurait non plus nier l'excellence des déductions mathématiques de Petzval. Mais d'autre part il n'est pas juste de rejeter une théorie, parce qu'elle est démontrée d'une manière imparfaite. Quant aux objections de Petzval contre la théorie Dopplérienne, il n'est même pas juste de lui reprocher comme une erreur absolue qu'elle suppose une communication du son par explosions, car il y a en effet des tons explosifs, par exemple, ceux produits par une sirène à des trous petits et fort éloignés l'un de l'autre, et aussi ceux qui sont émis par la roue dentée de Savart.

Encore moins fondée est la reproche que fait Petzval contre Doppler de n'avoir pris en considération que la moyenne prenne part au mouvement de la source sonore ou lumineuse. Car aussitôt que l'observateur et la source ne sont pas considérés ni comme des surfaces infinies ni comme enfermés dans un tuyau, il faut que la condensation produite par le mouvement s'égalise des deux côtés, et cela surtout quand il s'agit des ondes lumineuses, et des vélocités modérées, telles qu'elles le sont toujours en réalité.

M. Mach fait en outre observer que la demande souvent réitérée de Petzval à Doppler d'appliquer à la question le principe de la constance du temps d'oscillation n'a aucun sens; on ne saurait substituer au mouvement relatif de l'observateur et de la source des ondes, un courant dans le milieu. Cela ne serait pas plus raisonnable que de croire que le vent pourrait changer un ton musical. D'ailleurs, M. Mach rend pleine justice à la recherche théorique de Petzval dans laquelle il voit une ample confirmation de la théorie Dopplérienne. Cependant, il trouve tout comme Petzval lui-même que cette recherche ne contient pas la solution complète et rigoureuse du problème, et tout en indiquant le chemin à suivre pour parvenir à ce but, il ose espérer pouvoir trouver la solution des difficiles équations différentielles auxquelles on parvient. Cet espoir ne semble pas s'être réalisé et je ne sache pas qu'un autre savant ait été plus heureux.

Quant à l'expérience de Ångström, négative en apparence, M. Mach croit que Ångström a confondu l'avancement de l'incandescence avec celui des parts incandescentes, et il trouve une confirmation de cette opinion dans la remarque de Ångström que, malgré la direction

oblique du trait de feu, les parties métalliques furent poussées en haut, probablement par un courant d'air, ce qui eût été impossible, si elles avaient été douées d'une vitesse de près de 1000 kilomètres.

Outre ces déductions théoriques, M. MACH a aussi, par des expériences ingénieuses prouvé la justesse du principe Dopplérien pour le son, et quant à la vérification expérimentelle pour la lumière, il se prononcait, en 1860, comme suit: »L'image de chaque étoile doit être décomposée par le prisme en un spectre, dans lequel on observera deux espèces différentes de raies sombres; celles qui ont l'origine dans notre atmosphère et celles qui proviennent de l'étoile. Il faut que celles-ci changent leur position en raison du mouvement de l'étoile, et par ce déplacement on déterminera la vitesse de l'étoile».

Dans ce peu de mots est comprise l'application importante qu'a fait l'astronomie moderne de la théorie de DOPPLER à l'étude des mouvements propres des étoiles le long de la rayon visuelle.

Les discussions dont nous avons parlé jusqu'ici s'appuyaient d'une part sur des considérations théoriques, d'autre part sur des expériences acoustiques. La vitesse énorme de la lumière, en comparaison de laquelle toutes les vitesses qu'on peut imprimer à des sources lumineuses, dans les expériences de laboratoire doivent être regardées comme nulles, mettait un obstacle, insurmontable, semblait-il, à la vérification de la theorie de DOPPLER pour la lumière. Mais à cette époque fut introduite l'analyse spectrale dans la science, comme une des plus importantes méthodes de recherche, et ce fut elle qui offrit un moyen facile et sûr pour trancher la question. A mesure que la longueur d'onde d'un rayon lumineux change, la raie spectrale qui lui correspond doit changer de position, dans le spectre du corps céleste qui l'émet. Si donc on trouve, soit dans le spectre solaire, que la position d'une raie spectrale provenant d'une partie de la surface solaire diffère de celle de la même raie dans d'autres parties, soit que, dans le spectre d'un corps céleste la position d'une raie spectrale est autre que celle de la même raie, émise par le gaz de la substance chimique à laquelle elle est due, ces deux changements doivent être regardés comme une preuve de la justesse du principe de DOPPLER. Et à peine eut-on changé le spectroscope ordinaire en téléspectroscope, en l'appliquant à des lunettes parallactiques, que les preuves expérimentales de la théorie de DOPPLER surabondaient. En examinant comme le fit LOCKYER et plus tard YOUNG [1]) et beaucoup d'autres,

1) YOUNG. *The Sun* p. 99.

astronomes, les spectres des taches solaires, aux époques où elles présentaient leurs convulsions les plus violentes, on ne tardait pas à découvrir que souvent les raies spectrales de l'hydrogène, du magnésium, du fer et d'autres substances se montraient courbées, entortillées, parfois même déchirées, pour ainsi dire. Pendant les observations des protubérances en plein jour, auxquelles conduisit la mémorable découverte de M. Janssen, faite aussi indépendamment par M. Lockyer, observations probablement faites par tous les astronomes qui ont entrepris des recherches dans l'astrophysique, presque tous auront à plusieurs reprises observé des changements pareils dans les raies spectrales des protubérances éruptives. Dans ces observations, le phénomène du déplacement des raies spectrales des protubérances devient d'autant plus saillant que la lumière d'une partie tranquille du chromosphère entre ordinairement par la fente en même temps que celle de la protubérance éruptive. Par conséquent, on a, côte à côte, la raie chromosphérique droite, non déplacée et la raie courbe et déplacée de la protubérance.

Déjà en 1868 M. Huggins [1]) fit la découverte que les raies spectrales de certaines étoiles ne coïncidaient pas avec les raies données par des tubes spectrales contenant les mêmes gaz, et qu'elles étaient déplacées soit vers le rouge, soit vers le violet, par le mouvement de l'étoile. Cette observation fut constatée par M. Vogel, alors à Bothkamp et par d'autres.

Enfin M. Vogel [2]) constatait aussi que la longueur d'onde d'une même raie spectrale n'était pas la même sur les bords est et ouest du soleil et qu'elle variait à peu près de la quantité qu'exige le principe de Doppler.

Il semble que tant de preuves données par des savants de premier ordre devaient suffire pour convaincre les plus sceptiques. En effet, on trouve désormais le principe de Doppler adopté partout comme une vérité indiscutable. Une dernière et très violente attaque contre lui fut cependant faite par le celèbre physicien Van der Willigen, qui dans son mémoire *Sur la fausseté de la proposition que la réfraction des rayons lumineux est modifiée par le mouvement de la source lumineuse et du prisme* [3]) fait tous ses efforts pour renverser cette théorie. Dans ce mémoire Van der Willigen met en doute la compétence de Petzval pour traiter

1) *Phil. Transact.* 1868 p. 529—564.
2) *A. N.* LXXXII 291.
3) *Archives du Musée Teyler.* Vol. III pp. 305—376.

les équations différentielles et celle de HUGGINS, de LOCKYER, de VOGEL, de SECCHI, etc. de se servir comme il convient de leurs spectroscopes; il déclara enfin que »dût-il être seul de son avis, il ne croit pas qu'on ait le droit de donner d'un phénomène aisément explicable une interprétation arbitraire, l'ériger ensuite en loi naturelle inattaquable, et finalement en déduire les conséquences les plus importantes sur les mouvements des corps célestes». Mais c'était trop tard; aucun des savants attaqués dans ce mémoire ne se souciait même de le réfuter.

Il faut cependant se rappeler que presque en même temps que parut le mémoire de VAN DER WILLIGEN, M. KETTELER donna une démonstration du théorème de DOPPLER [1]), peut-être la plus irréprochable qui ait été publiée jusqu'ici. Je me dispense cependant de rendre compte de cette démonstration: elle est d'une telle nature qu'il n'est guère possible d'en faire un extrait succinct et pourtant claire; et de plus elle vient d'être réimprimée dans l'ouvrage bien connu de M. SCHEINER sur l'analyse spectrale des corps célestes.

D'autre part, les évidences en faveur de la théorie de DOPPLER s'accumulaient de plus en plus à mesure que les spectroscopes qu'on construisait gagnaient en force optique. A ce point de vue, les réseaux de MM. RUTHERFURD et ROWLAND et aussi les prismes de M. RUTHERFURD et les prismes au carbone sulfuré de THOLLON méritent d'être nommés. Finalement, l'emploi qu'a fait la science de la photographie, à des plaques de gélatinobromure d'argent, a aussi fourni de précieuses confirmations de la justesse du principe de DOPPLER.

Parmi les très nombreuses observations faites avant le temps où j'ai commencé mon travail, je citerai les suivantes: L'observatoire de Greenwich a publié annuellement de longues séries d'observations sur le déplacement des raies spectrales des étoiles fixes, faites dans le but de trouver la vitesse avec laquelle les étoiles se rapprochent ou s'éloignent de la terre. Les résultats trouvés, dans les différentes années ont en général présenté un accord assez satisfaisant.

En 1876 M. YOUNG réussit, à l'aide d'un spectroscope très puissant à mesurer le déplacement des raies spectrales sur les bords opposés du soleil, entre l'équateur et 15° de latitude héliocentrique. M. YOUNG trouvait ainsi une vitesse de rotation à l'équateur solaire égal à 2,29 kilomètres [2]), tandis que les observations de taches ne donnent que 2,01.

1) KETTELER, *Astronomische Undulationstheorie*, p. 6—16.

2) YOUNG, *The Sun* p. 100.

Toutefois l'observation de M. Young doit être considérée comme une preuve très concluante de la théorie de Doppler. L'année suivante, M. Langley [1]) en faisant à l'aide d'un mécanisme inventé par lui entrer simultanément dans la fente de son spectroscope des rayons venant des bords opposés du soleil, trouvait qu'un déplacement tel qu'exige la théorie de Doppler a véritablement lieu.

Nous citerons en outre une observation de Thollon qui est non moins concluante [2]). En examinant un groupe de quatre raies, dont deux telluriques et deux solaires, il trouvait des variations très sensibles dans les distances des deux couples, les deux raies d'un couple se confondant même de façon à n'en former qu'une seule.

Enfin il y a un mémoire remarquable de M. Cornu [3]) qui serait réduit à néant si la théorie de Doppler n'était pas juste; car M. Cornu a distingué les raies atmosphériques des raies solaires précisément par les déplacements que celles-ci subissent quand on passe d'un bord solaire au bord opposé, tandis que les raies telluriques gardent une position invariable. Sans aucun doute, le travail de M. Cornu mérite toute confiance; il est donc une preuve incontestable de la théorie de Doppler. Pendant ces recherches, M. Cornu a aussi, un seul jour, fait une série de mesures du déplacement des raies spectrales sur les bords opposés du soleil, tandis qu'habituellement il s'est contenté de constater le déplacement sans en déterminer la valeur, et il a obtenu un résultat qui s'accorde très bien avec la valeur théorique.

La vérité de la théorie de Doppler pourrait donc être regardée comme suffisamment prouvée tant par la theorie que par les expériences, soit acoustiques soit optiques.

Cependant, on peut opposer aux expériences optiques une objection; c'est qu'on ne connaît pas en général la vélocité des mouvements dont on voit les effets, dans le déplacement des raies spectrales. Tel est le cas des gaz dans les protubérances et dans les taches solaires, et aussi des mouvements propres des étoiles fixes, dans la direction de la ligne visuelle. Par conséquent, on ne peut se convaincre si les variations qu'on a constatées, dans les longueurs d'onde des raies spectrales,

---

1) *Amer. Journal.* T. XIV p. 140.

2) *Comptes Rendus.* T. CXI p. 368.

4) Cornu, *Étude des Bandes Telluriques α, B et A du spectre solaire.* Paris 1886.

sont bien celles qui correspondent aux variations dans les distances entre les gaz en mouvement et l'observateur. Parmi les observations citées plus haut, les seules qui soient à l'abri de cette objection, sont celles de MM. Vogel, Young, Langley et Cornu sur les déplacements causés par la rotation du Soleil. Cependant, ces observations sont en partie faites avec des instruments dont la force optique n'était pas suffisante pour des recherches aussi délicates, et d'ailleurs elles sont toutes sans exception faites plutôt occasionnellement que comme des recherches approfondies. Puis les résultats qu'elles ont donnés sont tous plus grands que la valeur théorique, et enfin elles se sont portées presque exclusivement sur l'équateur solaire. Personne ne semble encore avoir cru à la possibilité de vérifier, à l'aide du spectroscope, non seulement la vitesse de rotation de la zone équatoriale, mais aussi le décroissement de cette vitesse angulaire, dans les zones à une plus grande latitude héliocentrique, déjà révélé par les observations des taches solaires. C'est pourquoi après avoir reconnu par quelques essais la grande précision avec laquelle on pouvait mesurer, avec mon spectroscope, les distances entre des raies spectrales visibles en même temps, sans qu'on ait besoin de changer l'inclinaison du réseau contre l'axe optique de la lunette, j'ai pris la résolution de faire cette recherche avec toute l'exactitude qu'admet mon instrument.

Dans ce but, il fallait prendre des mesures à des points diamétralement opposés du bord solaire et à des différentes latitudes entre l'équateur et le pôle du Soleil. Pour plus de simplicité à la réduction, j'ai arrangé les mesures de sorte que les observations se sont divisées en six groupes avec les latitudes héliocentriques 0°, 15°, 30°, 45°, 60° et 75°.

Pour diriger approximativement la fente du spectroscope sur ces latitudes et aussi pour trouver la latitude héliocentrique exacte du point sur lequel les mesures s'étaient portées, j'ai d'abord dirigé la lunette sur le point nord ou sud du Soleil, de telle sorte qu'en faisant tourner l'instrument autour de l'axe polaire, le bord supérieur ou inférieur du spectre atteignit précisément une des croix des fils du micromètre, et j'ai lu le cercle de déclinaison. Puis j'ai additionné ou soustrait la différence de déclinaison entre le point nord ou sud du Soleil et le point à observer, et en regardant de nouveau par le microscope, j'ai fait déplacer l'équatorial en déclinaison de cet angle. Après la mesure, j'ai encore une fois pointé sur le bord sud ou nord, et ainsi de suite.

Pour trouver la différence de déclinaison qui vient d'être mentionnée, j'ai employé la méthode suivante [1]). Soit $\Delta\delta$ la différence cherchée, r le rayon du disque solaire et P l'angle de position du point, on a:

$$(8) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \Delta\delta = r - r\,Cos\,P \; .$$

Soit (Fig. 4) AA l'équateur, EE l'écliptique, S le centre du disque solaire, M le point en question, P le pôle de l'équateur et P' celui de l'écliptique. Alors:

$$PSM = P \; .$$

Mettons $P'SM = p$, $PSP' = p - P$, et soit δ la déclinaison, λ, β la longitude et latitude d'un point du sphère céleste et ε l'obliquité de l'écliptique.

Une formule bien connue de l'astronomie sphérique donne:

$$Cos\,\delta\,Cos\,\Pi = Cos\,\varepsilon\,Cos\,\beta - Sin\,\varepsilon\,Sin\,\beta\,Sin\,\lambda \; .$$

Or, dans le cas du Soleil on a $\beta = 0$ et l'angle parallactique Π devient égal à $p - P$, donc:

$$Cos\,(p - P) = \frac{Cos\,\varepsilon}{Cos\,\delta} \; ,$$

d'où:

$$\frac{1 - Cos\,(p - P)}{1 + Cos\,(p + P)} = \frac{1 - \dfrac{Cos\,\varepsilon}{Cos\,\delta}}{1 + \dfrac{Cos\,\varepsilon}{Cos\,\delta}} = \frac{Cos\,\delta - Cos\,\varepsilon}{Cos\,\delta + Cos\,\varepsilon} \; ,$$

ou:

$$\frac{2\,Sin^2\frac{1}{2}(p - P)}{2\,Cos^2\frac{1}{2}(p - P)} = \frac{2\,Sin\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta)\,Sin\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)}{2\,Cos\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta)\,Cos\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)} \; ,$$

et

$$(9) \quad . \quad . \quad tg\,\frac{1}{2}(p \quad P) = \pm\sqrt{tg\,\frac{1}{2}(\varepsilon + \delta)\,tg\,\frac{1}{2}(\varepsilon - \delta)} \; .$$

1) Quelques-unes de ces formules se trouvent dans un mémoire de M. Lorenzoni dans les »*Memorie della Soc. degli Spettroscop. Ital.*». Tome I.

La table suivante donne la quantité $p - P$ avec δ comme argument:

Table I.

δ	$p - P$	δ	$p - P$
$23^0 27'$	$0^0.0$	$19^0 30'$	$13^0.4$
26.5	0.9	0	14.2
26	1.3	18 30	14.7
24	1.6	0	15.3
20	2.4	17 30	15.9
16	3.0	0	16.4
8	4.0	16 30	16.9
0	4.8	0	17.4
22 52	5.4	15 0	18.2
44.	6.0	14 0	19.0
36	6.4	13 0	19.7
24	7.1	12 0	20.3
12	7.8	11 0	20.8
0	8.3	10 0	21.3
21 40	9.2	8 0	22.1
20	10.1	6 0	22.7
0	10.7	4 0	23.1
20 30	11.8	2 0	23.4
0	12.6	0 0	23.5

La quantité $p - P$ connue, on peut calculer p à l'aide de l'équation

$$(10) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad p = P \pm (p - P) \; .$$

Dans cette équation, le signe supérieur doit être choisi pour $270^0 > \odot > 90^0$, et le signe inférieur pour $\odot > 270^0$ et $\odot < 90^0$, $\odot$ étant la longitude du Soleil.

Soit maintenant (Fig. 5) le plan de la figure celui de l'écliptique, $ACBD$ le Soleil et S son centre, soit T la Terre et V la direction du point équinoctial, $D\Omega$ la ligne des noeuds de l'équateur solaire, O la projection du pôle du Soleil, AB celle du bord apparent et M le point qu'on doit observer.

Alors: $VTS = VSC = \odot \; ; \; VS\Omega = A \; ,$ donc:

$$CS\Omega = -(\odot - \Omega) \; .$$

Mais $\Omega SO = 90^0 = CSB$, donc si l'on soustrait des deux côtés CSO:

$$OSB = \Omega SC \quad \text{et}$$

$$OSB = -(\odot - \Omega) \; .$$

Puis si l'on considère le triangle sphérique entre le point nord du Soleil S, son pôle O et le point M, on a:

$$OS = i = \text{l'inclinaison de l'équateur solaire,}$$

$$SM = -p \ , \ OM = \pi \ , \ OSM = -(\odot - \Omega) \ ,$$

et par conséquent:

$$Cos\,\pi = Cos\,i\,Cos\,p - Sin\,p\,Sin\,i\,Cos\,(\odot - \Omega) \ ,$$

ou

$$(11) \qquad Cos\,\pi = Cos\,(p+i) + 2\,Sin\,p\,Sin\,i\,Sin^2\frac{1}{2}(\odot - \Omega) \ .$$

Cette équation donne la distance polaire héliocentrique du point M. Le calcul d'une table de cette quantité peut être abrégé par la considération que

$$Cos\,(p+i) + 2\,Sin\,p\,Sin\,i\,Sin^2\frac{1}{2}(\odot - \Omega) = Cos\,(p+i) +$$

$$+ 2\,Sin\,p\,Sin\,i\,Sin^2\frac{1}{2}[360^0 - (\odot - \Omega)]$$

$$Cos\,i\,Cos\,p - Sin\,p\,Sin\,i\,Cos\,(\odot - \Omega) = -\big[Cos\,i\,Cos\,(180 - p) -$$

$$- Sin\,i\,Sin\,(180 - p)\,Cos\,(180^0 + \odot - \Omega)\big] \ .$$

La première de ces équations apprend que les valeurs de $\pi - p$ sont les mêmes pour $360^0 - (\odot - \Omega)$ que pour $\odot - \Omega$, par conséquent on n'a pas besoin de calculer $\pi - p$ pour des valeurs de $\odot - \Omega > 180^0$.

La seconde équation prouve que les valeurs numériques de $\pi - p$ sont les mêmes mais de signes inverses pour $180^0 - d$ et $180^0 + \odot - \Omega$ que pour p et $\odot - \Omega$. Par conséquent il ne devient pas nécessaire non plus de calculer expressément $\pi - p$ pour les valeurs de p entre 90^0 et 180^0.

Finalement, la valeur maximum de π étant 180^0, il ne faut pas employer les valeurs de p qui dépassent 180^0; il faut leur substituer $p - 180^0$. On obtient ainsi la distance polaire australe.

On voit donc qu'il suffit de calculer $\pi - p$ pour les valeurs de p entre 0^0 et 90^0, et pour $\odot - \Omega$ entre 0^0 et 180^0. A ces calculs j'ai employé les valeurs de Ω et i trouvées par M. Spörer. Réduites à l'équinoxe de 1888,5 elles sont:

$$\Omega = 74^0,9 \qquad i = 7^0,0$$

Ainsi j'ai trouvé la table suivante.

Table II. Valeurs de $\pi - p$.

p	$\odot - \Omega$										p
	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	
0°	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	0°
1	+ 7.0	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.9	+ 6.8	+ 6.7	+ 6.6	+ 6.4	+ 6.2	+ 6.1	1
2	+ 7.0	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.8	+ 6.6	+ 6.4	+ 6.2	+ 5.9	+ 5.6	+ 5.3	2
3	+ 7.0	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.7	+ 6.5	+ 6.2	+ 5.9	+ 5.5	+ 5.1	+ 4.6	3
4	+ 7.0	+ 7.0	+ 6.8	+ 6.6	+ 6.4	+ 6.0	+ 5.6	+ 5.2	+ 4.6	+ 4.1	4
5	+ 7.0	+ 7.0	+ 6.8	+ 6.6	+ 6.3	+ 5.9	+ 5.4	+ 4.9	+ 4.3	+ 3.6	5
6	+ 7.0	+ 7.0	+ 6.8	+ 6.6	+ 6.2	+ 5.8	+ 5.3	+ 4.7	+ 4.0	+ 3.2	6
7	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.8	+ 6.5	+ 6.2	+ 5.7	+ 5.1	+ 4.5	+ 3.7	+ 2.9	7
8	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.8	+ 6.5	+ 6.1	+ 5.6	+ 5.0	+ 4.3	+ 3.5	+ 2.6	8
9	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.8	+ 6.5	+ 6.0	+ 5.5	+ 4.9	+ 4.1	+ 3.3	+ 2.4	9
10	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.7	+ 6.4	+ 6.0	+ 5.4	+ 4.8	+ 4.0	+ 3.1	+ 2.2	10
15	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.7	+ 6.3	+ 5.8	+ 5.2	+ 4.4	+ 3.6	+ 2.6	+ 1.5	15
20	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.7	+ 6.3	+ 5.7	+ 5.1	+ 4.2	+ 3.3	+ 2.3	+ 1.1	20
30	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.2	+ 5.6	+ 4.9	+ 4.0	+ 3.0	+ 1.9	+ 0.7	30
40	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.2	+ 5.5	+ 4.8	+ 3.9	+ 2.8	+ 1.7	+ 0.5	40
50	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.1	+ 5.5	+ 4.7	+ 3.8	+ 2.7	+ 1.6	+ 0.4	50
60	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.1	+ 5.5	+ 4.6	+ 3.7	+ 2.6	+ 1.5	+ 0.3	60
70	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.1	+ 5.4	+ 4.6	+ 3.6	+ 2.5	+ 1.4	+ 0.2	70
80	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.1	+ 5.4	+ 4.5	+ 3.5	+ 2.4	+ 1.3	+ 0.1	80
90	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.1	+ 5.4	+ 4.5	+ 3.5	+ 2.4	+ 1.2	0.0	90
100	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.1	+ 5.4	+ 4.5	+ 3.5	+ 2.3	+ 1.2	− 0.1	100
110	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.6	+ 6.0	+ 5.3	+ 4.4	+ 3.4	+ 2.2	+ 1.1	− 0.2	110
120	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.5	+ 6.0	+ 5.2	+ 4.3	+ 3.3	+ 2.2	+ 1.0	− 0.3	120
130	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.5	+ 6.0	+ 5.2	+ 4.3	+ 3.2	+ 2.1	+ 0.9	− 0.4	130
140	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.5	+ 5.9	+ 5.1	+ 4.2	+ 3.1	+ 1.9	+ 0.7	− 0.5	140
150	+ 7.0	+ 6.9	+ 6.5	+ 5.8	+ 5.0	+ 4.0	+ 2.9	+ 1.7	+ 0.5	− 0.7	150
160	+ 7.0	+ 6.8	+ 6.4	+ 5.6	+ 4.7	+ 3.6	+ 2.5	+ 1.2	0.0	− 1.1	160
165	+ 7.0	+ 6.8	+ 6.3	+ 5.4	+ 4.4	+ 3.2	+ 2.0	+ 0.8	− 0.4	− 1.5	165
170	+ 7.0	+ 6.7	+ 5.9	+ 4.7	+ 3.6	+ 2.3	+ 1.1	0.0	− 1.1	− 2.2	170
171	+ 7.0	+ 6.6	+ 5.6	+ 4.4	+ 3.2	+ 2.0	+ 0.8	− 0.3	− 1.4	− 2.4	171
172	+ 7.0	+ 6.4	+ 5.2	+ 4.0	+ 2.8	+ 1.6	+ 0.4	− 0.6	− 1.6	− 2.6	172
173	+ 7.0	+ 5.8	+ 4.6	+ 3.4	+ 2.2	+ 1.1	0.0	− 1.1	− 2.0	− 2.9	173
174	+ 5.0	+ 4.5	+ 3.5	+ 2.5	+ 1.5	+ 0.4	− 0.5	− 1.5	− 2.4	− 3.2	174
175	+ 3.0	+ 2.7	+ 2.1	+ 1.3	+ 0.5	− 0.4	− 1.2	− 2.1	− 2.9	− 3.6	175
176	+ 1.0	+ 0.9	+ 0.5	− 0.1	− 0.7	− 1.4	− 2.1	− 2.8	− 3.4	− 4.1	176
177	− 1.0	− 1.1	− 1.3	− 1.7	− 2.1	− 2.6	− 3.1	− 3.6	− 4.1	− 4.6	177
178	− 3.0	− 3.0	− 3.1	− 3.3	− 3.6	− 3.9	− 4.2	− 4.6	− 4.9	− 5.3	178
179	− 5.0	− 5.0	− 5.1	− 5.2	− 5.3	− 5.4	− 5.6	− 5.7	− 5.9	− 6.1	179
180	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	180
p	360°	350°	340°	330°	320°	310°	300°	290°	280°	270°	p
	$\odot - \Omega$										

p	$\odot - \Omega$										p
	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	
0°	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	+ 7.0	0°
1	+ 6.1	+ 5.9	+ 5.7	+ 5.6	+ 5.4	+ 5.3	+ 5.2	+ 5.1	+ 5.0	+ 5.0	1
2	+ 5.3	+ 4.9	+ 4.6	+ 4.2	+ 3.9	+ 3.6	+ 3.3	+ 3.1	+ 3.0	+ 3.0	2
3	+ 4.6	+ 4.1	+ 3.6	+ 3.1	+ 2.6	+ 2.1	+ 1.7	+ 1.3	+ 1.1	+ 1.0	3
4	+ 4.1	+ 3.4	+ 2.8	+ 2.1	+ 1.4	+ 0.7	+ 0.1	− 0.5	− 0.9	− 1.0	4
5	+ 3.6	+ 2.9	+ 2.1	+ 1.2	+ 0.4	− 0.5	− 1.3	− 2.1	− 2.7	− 3.0	5
6	+ 3.2	+ 2.4	+ 1.5	+ 0.5	− 0.4	− 1.5	− 2.5	− 3.5	− 4.5	− 5.0	6
7	+ 2.9	+ 2.0	+ 1.1	0.0	− 1.1	− 2.2	− 3.4	− 4.6	− 5.8	− 7.0	7
8	+ 2.6	+ 1.6	+ 0.6	− 0.4	− 1.6	− 2.8	− 4.0	− 5.2	− 6.4	− 7.0	8
9	+ 2.4	+ 1.4	+ 0.3	− 0.8	− 2.0	− 3.2	− 4.4	− 5.6	− 6.6	− 7.0	9
10	+ 2.2	+ 1.1	0.0	− 1.1	− 2.3	− 3.6	− 4.7	− 5.9	− 6.7	− 7.0	10
15	+ 1.5	+ 0.4	− 0.8	− 2.0	− 3.2	− 4.4	− 5.4	− 6.2	− 6.8	− 7.0	15
20	+ 1.1	0.0	− 1.3	− 2.5	− 3.6	− 4.7	− 5.7	− 6.4	− 6.8	− 7.0	20
30	+ 0.7	− 0.5	− 1.7	− 2.9	− 4.0	− 5.0	− 5.8	− 6.5	− 6.9	− 7.0	30
40	+ 0.5	− 0.7	− 1.9	− 3.1	− 4.2	− 5.1	− 5.9	− 6.5	− 6.9	− 7.0	40
50	+ 0.4	− 0.9	− 2.1	− 3.2	− 4.3	− 5.2	− 6.0	− 6.5	− 6.9	− 7.0	50
60	+ 0.3	− 1.0	− 2.2	− 3.3	− 4.3	− 5.2	− 6.0	− 6.5	− 6.9	− 7.0	60
70	+ 0.2	− 1.1	− 2.3	− 3.4	− 4.4	− 5.3	− 6.0	− 6.6	− 6.9	− 7.0	70
80	+ 0.1	− 1.2	− 2.4	− 3.5	− 4.5	− 5.4	− 6.1	− 6.6	− 6.9	− 7.0	80
90	0.0	− 1.2	− 2.4	− 3.5	− 4.5	− 5.4	− 6.1	− 6.6	− 6.9	− 7.0	90
100	− 0.1	− 1.3	− 2.4	− 3.5	− 4.5	− 5.4	− 6.1	− 6.6	− 6.9	− 7.0	100
110	− 0.2	− 1.4	− 2.5	− 3.6	− 4.6	− 5.4	− 6.1	− 6.6	− 6.9	− 7.0	110
120	− 0.3	− 1.5	− 2.6	− 3.7	− 4.6	− 5.5	− 6.1	− 6.6	− 6.9	− 7.0	120
130	− 0.4	− 1.6	− 2.7	− 3.8	− 4.7	− 5.5	− 6.1	− 6.6	− 6.9	− 7.0	130
140	− 0.5	− 1.7	− 2.8	− 3.9	− 4.8	− 5.5	− 6.2	− 6.6	− 6.9	− 7.0	140
150	− 0.7	− 1.9	− 3.0	− 4.0	− 4.9	− 5.6	− 6.2	− 6.6	− 6.9	− 7.0	150
160	− 1.1	− 2.3	− 3.3	− 4.2	− 5.1	− 5.7	− 6.3	− 6.7	− 6.9	− 7.0	160
165	− 1.5	− 2.6	− 3.6	− 4.4	− 5.2	− 5.8	− 6.3	− 6.7	− 6.9	− 7.0	165
170	− 2.2	− 3.1	− 4.0	− 4.8	− 5.4	− 6.0	− 6.4	− 6.7	− 6.9	− 7.0	170
171	− 2.4	− 3.3	− 4.1	− 4.9	− 5.5	− 6.0	− 6.5	− 6.8	− 6.9	− 7.0	171
172	− 2.6	− 3.5	− 4.3	− 5.0	− 5.6	− 6.1	− 6.5	− 6.8	− 6.9	− 7.0	172
173	− 2.9	− 3.7	− 4.5	− 5.1	− 5.7	− 6.2	− 6.5	− 6.8	− 6.9	− 7.0	173
174	− 3.2	− 4.0	− 4.7	− 5.3	− 5.8	− 6.2	− 6.6	− 6.8	− 7.0	− 7.0	174
175	− 3.6	− 4.3	− 4.9	− 5.4	− 5.9	− 6.3	− 6.6	− 6.8	− 7.0	− 7.0	175
176	− 4.1	− 4.6	− 5.2	− 5.6	− 6.0	− 6.4	− 6.6	− 6.8	− 7.0	− 7.0	176
177	− 4.6	− 5.1	− 5.5	− 5.9	− 6.2	− 6.5	− 6.7	− 6.9	− 7.0	− 7.0	177
178	− 5.3	− 5.6	− 5.9	− 6.2	− 6.4	− 6.6	− 6.8	− 6.9	− 7.0	− 7.0	178
179	− 6.1	− 6.2	− 6.4	− 6.6	− 6.7	− 6.8	− 6.9	− 6.9	− 7.0	− 7.0	179
180	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	− 7.0	180
p	270°	260°	250°	240°	230°	220°	210°	200°	190°	180°	p
	$\odot - \Omega$										

Les déplacements des raies spectrales mesurées diffèrent cependant des vrais déplacements aussitôt que le pôle du Soleil s'écarte du bord visible. Car si la projection du pôle (v. Fig. 5) n'est pas située

sur la ligne AB, il est évident que le mouvement rotatoire dans le point M ne se dirige pas contre la terre, mais qu'il est perpendiculaire au plan qui passe par le pôle et le centre du Soleil et par le point M. Par conséquent, il faut déduire l'angle entre ce plan et le plan ASB. Cet angle est compris dans le triangle sphérique OSM. Dans ce triangle on a les quantités données:

$$SO = i \; ; \; OM = \pi \; ; \; OSM = (\odot - \Omega)$$

et l'angle cherché: $OMS = \eta$.

On a donc:

$$(12) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Sin\, \eta = - \frac{Sin\, i\, Sin\, (\odot - \Omega)}{Sin\, \pi} \; .$$

Il faut multiplier le déplacement observé par la sécante de l'angle η. A l'aide de cette formule, j'ai calculé la table suivante:

Table III. Valeurs de η.

π	$\odot - \Omega$									π
	10° 170°	20° 160°	30° 150°	40° 140°	50° 130°	60° 120°	70° 110°	80° 100°	90°	
8°	8°.7	17°.4	26°.0	34°.3	42°.1	49°.3	—	—	—	8°
9	7.8	15.5	22.9	30.1	36.6	42.4	—	—	—	9
10	7.0	13.9	20.5	26.8	32.5	37.4	—	—	—	10
11	6.4	12.6	18.6	24.2	29.3	33.6	—	—	—	11
12	5.8	11.6	17.0	22.1	26.7	30.5	33.4	35.3	35.9	12
13	5.4	10.7	15.7	20.4	24.5	28.0	30.6	32.2	32.8	13
14	5.0	9.9	14.6	18.9	22.8	25.9	28.3	29.7	30.2	14
15	4.7	9.3	13.6	17.6	21.1	24.1	26.3	27.6	28.1	15
16	4.4	8.8	12.7	16.5	19.5	22.5	24.5	25.8	26.3	16
20	3.5	7.0	10.3	13.2	15.8	18.0	19.6	20.5	20.9	20
25	2.9	5.7	8.3	10.7	12.8	14.5	15.7	16.5	16.8	25
30	2.4	4.8	7.0	9.0	10.8	12.2	13.2	13.9	14.1	30
40	1.9	3.7	5.4	7.0	8.3	9.5	10.3	10.8	10.9	40
45	1.7	3.4	5.0	6.4	7.6	8.7	9.4	9.8	10.0	45
50	1.6	3.1	4.6	5.9	7.0	7.9	8.6	9.0	9.2	50
60	1.4	2.8	4.0	5.2	6.2	7.0	7.6	8.0	8.1	60
70	1.3	2.5	3.7	4.8	5.7	6.4	7.0	7.3	7.5	70
75	1.2	2.4	3.6	4.7	5.5	6.3	6.8	7.2	7.3	75
80	1.2	2.4	3.6	4.6	5.4	6.2	6.7	7.0	7.1	80
90	1.2	2.4	3.5	4.5	5.4	6.1	6.6	6.9	7.0	90
π	190° 350°	200° 340°	210° 330°	220° 320°	230° 310°	240° 300°	250° 290°	260° 280°	270°	π
	$\odot - \Omega$									

Le calcul de cette table a été considérablement abrégé, *Sin* π étant égal a *Sin* $(180^0 - \pi)$, et les valeurs de *Sin* $(\odot - \Omega)$, *Sin* $[180^0 - (\odot - \Omega)]$, *Sin* $[180^0 + (\odot - \Omega)]$ et *Sin* $[360^0 - (\odot - \Omega)]$ étant les mêmes sauf les signes.

A la rigueur, il faudrait encore prendre en considération que la ligne *TM* n'est pas perpendiculaire au plan *AB*. Mais la différence ne pouvant s'élever qu'à 16′ au plus, on peut la négliger.

Outre ces corrections, il y en a encore une qu'il faut appliquer si l'on veut atteindre l'exactitude la plus grande possible. C'est qu'en faisant les pointés sur les raies spectrales, il est impossible, à moins de perdre beaucoup en exactitude, de faire coïncider le bord du Soleil et par conséquent celui de la bande spectrale avec une des croix des fils du micromètre. Par conséquent, le point observé se trouve à une certaine distance du bord solaire, de sorte qu'une bande spectrale d'une largeur de 3″ à 6″ se forme entre la croix et le bord solaire. Certes, on pourrait placer la fente tangentiellement, et ainsi rapprocher la croix des fils beaucoup plus du bord solaire; mais on sait que sous ces circonstances le spectre devient instable, flamboyant, ce qui nuit à la précision des observations, et si l'on voulait éviter cet inconvénient en faisant entrer la fente un peu plus sur le disque du soleil, on perdrait totalement la possibilité de déterminer la distance entre le bord solaire et le point qu'on observe. Il se pourrait même qu'une irrégularité accidentelle dans la marche de l'horloge de l'équatorial pût occasionner de très graves erreurs. Je crois donc plus prudent de diriger la fente de manière à couper le bord du Soleil sous un angle plus ou moins aigu. Alors on peut évaluer avec une assez grande exactitude, à l'aide des dimensions connues du rhombe formé par les fils, la largeur de la bande spectrale intermédiaire que je viens de mentionner, et puis calculer la correction à appliquer, à l'aide des formules que je vais maintenant développer.

Soit (Fig. 6) *AMBCD* le bord visible du disque solaire, *S* son centre, et *M* le point où le déplacement des raies spectrales doit être mesuré. Soit *MN* la direction de la fente dont nous mettons l'angle de position égal à *S*, et soit enfin *ME* la tangente en *M*. Alors on a

$$ASM = SMO = P\ ;\quad SMN = P - \varphi\ ,\quad \text{et}\quad NME = 90^0 - (P - \varphi)\ .$$

Soient *SS* et *S′S′* (Fig. 7) les deux tranches de la fente, et *BK* son milieu; soit *K* la croix des fils. *HE* la limite supérieure du spectre, et *HC* le bord solaire, et mettons:

$$HE = 2f \; ; \; HA = h \; .$$

On voit que AHC est le même angle que NME dans la figure précédente et que par conséquent

$$AHC = 90^0 - (P - \varphi) \; ;$$

On a donc:

$$HM = f\,tg\,(P - \varphi)$$

et

$$BK = h - f\,tg\,(P - \varphi) \; .$$

Si en outre KC est la même ligne que SE, SKC est le même angle que MSE dans la figure précedente, et par conséquent $DCK = P$. On a donc

$$DK = BK\,Cos\,(P - \varphi) \; ,$$

$$DK = h\,Cos\,(P - \varphi) - f\,Sin\,(P - \varphi) \; ,$$

$$CK = DK\,Cosec\,P \; ,$$

et si l'on met $CK = y$:

$$(13) \qquad y = h\,Cos\,(P - \varphi)\,Cosec\,P - f\,Sin\,(P - \varphi)\,Cosec\,P \; .$$

Soit maintenant $DEMB$ le parallèle sur lequel est situé le point M, et soit B le point sur lequel s'est portée l'observation; alors on a, si s est le sémidiamètre du soleil:

$$SB = SM = s\,Sin\,\pi \; ,$$

$$AM = y \; ; \; SA = s\,Sin\,\pi - y \; .$$

Il est évident que la tangente en M a la même direction que BF, tandis que la tangente en B a la direction BG. Mettons $GBF = \psi$ et l'on obtient, GBF étant égal à ASB:

$$Cos\,\psi = \frac{s\,Sin\,\pi - y}{s\,Sin\,\pi} \; ,$$

$$Cos\,\psi = 1 - \frac{y}{s\,Sin\,\pi}\ ,$$

donc:

$$2\,Sin^2\frac{1}{2}\psi = \frac{y}{s\,Sin\,\pi}\ ,$$

ou en introduisant la valeur de y donnée par l'équation (13):

$$(14)\quad .\ .\ Sin\frac{1}{2}\psi = \left[\frac{h\,Cos\,(P-\varphi) - f\,Sin\,(P-\varphi)}{2\,s\,Sin\,\pi\,Sin\,P}\right]^{\frac{1}{2}}\ .$$

A la réduction des observations on multipliera les déplacements observés par

$$Sec\,\eta\,Sec\,\psi\ ,$$

et on se rendra ainsi indépendant des deux causes d'obliquité entre la ligne visuelle et la tangente dans le point observé.

Pour mesurer le déplacement des raies spectrales solaires, j'ai employé la méthode suivante. On sait que toutes les mesures absolues sont sujettes à de très grandes difficultés, et qu'il est impossible de les faire avec une précision égale, de beaucoup près, à celle qu'on obtient en faisant des mesures différentielles. Ainsi la détermination d'un équinoxe et des positions des étoiles fondamentales est beaucoup plus difficile et plus incertaine que la détermination des positions des autres étoiles rélativement à celles-ci; et d'autre part on peut mesurer, soit au réfracteur, soit à l'héliomètre, soit sur des plaques photographiques, les différences en ascension droite et en déclinaison des étoiles avec une exactitude encore bien plus grande. C'est pour cela que j'ai arrangé mes mesures dans le spectre solaire de manière à les rendre exclusivement différentielles. D'abord, j'ai choisi pour objets de telles parties dans le spectre où, outre des raies solaires suffisamment fortes, on a aussi des raies atmosphériques ni nébuleuses ni trop faibles. Ce choix a été rendu très facile par les excellentes cartes spectrales de quelques parties du spectre solaire riches en raies atmosphériques qui ont été publiées par M. Cornu [1]).

Mon choix des raies à mesurer fait, j'ai mesuré, sur des points diamétralement opposés du bord solaire et à l'aide du micromètre du

1) A. Cornu: *Sur les raies telluriques qu'on observe dans le spectre solaire au voisinage des raies D.* Journal de l'école polytechn. LIII. Paris 1883.

A. Cornu: *Étude des bandes telluriques α, B et A du spectre solaire.* Paris 1886.

spectroscope, la distance entre une raie solaire et une raie tellurique. Si la distance entre ces raies sur le bord oriental est Δ_e et si la mesure de la même distance à un point diamétralement opposé, donc sur le bord occidental, a donné Δ_o, le déplacement mesuré de la raie solaire, dû à la rotation du soleil, devient:

$$(15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d = \frac{1}{2}(\Delta_e - \Delta_o) \ ,$$

ou bien

$$(16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad d = \frac{1}{2}(\Delta_o - \Delta_e) \ .$$

La première de ces formules est valable quand la longueur d'onde de la raie solaire est plus petite que celle de la raie tellurique, la seconde quand le contraire a lieu.

Les formules (15) et (16) ont été employées à la réduction des observations en 1887 et 1888, où je n'ai mesuré que deux raies seulement, dont une atmosphérique et une solaire. Mais en 1889, j'ai, dans chaque série d'observations, mesuré quatre raies, dont la première et la troisième étaient des raies solaires, tandis que la deuxième et la quatrième étaient des raies telluriques. Ces observations ont été réduites de la manière suivante.

Soient a_e, b_e, c_e, d_e les lectures sur le tambour du micromètre pour les quatre raies, sur le bord oriental du soleil; a_o, b_o, c_o, d_o les mêmes lectures sur le bord occidental; supposons enfin ces lectures exemptes des erreurs périodiques et progressives de la vis; on a:

$$\Delta_e = \frac{1}{2}(b_e - a_e + d_e - c_e) \ ,$$

$$\Delta_o = \frac{1}{2}(b_o - a_o + d_o - c_o) \ ,$$

donc selon (15):

$$(17) \qquad d = \frac{1}{4}(a_o - a_e - b_o + b_e + c_o - c_e - d_o + d_e) \ .$$

Dans ce cas, il n'y a pas lieu d'employer la formule (16), la supposition que nous avons faite étant que la longueur d'onde de la raie a est plus petite que celle de b, et la longueur d'onde de c plus petite que celle de d.

La quantité d dans les formules (15), (16) et (17) est exprimée en des parties décimales d'un tour de la vis micrométrique. Pour pouvoir l'exprimer dans des unités d'Ångström (dix millionièmes d'un millimètre de la longueur d'onde), j'ai en outre mesuré au micromètre plusieurs distances entre des raies situées des deux côtés de la raie dont le déplacement fut mesuré, et j'ai choisi de telles raies dont les longueurs d'onde sont très bien déterminées, et qui sont assez distantes entre elles. Soit $\lambda' - \lambda$ la différence des longueurs d'onde de deux raies spectrales, et soit D la distance entre elles exprimée dans des parties décimales d'un tour de la vis, et R le facteur de réduction valable pour le milieu des deux raies, à l'aide duquel on peut réduire à des unités d'Ångström, une distance exprimée en des parties décimales d'un tour de la vis on a:

$$(18) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad R = \frac{\lambda' - \lambda}{D} \; .$$

Si l'on a, de la manière indiquée ci-dessus, mesuré les distances entre plusieurs raies spectrales, et si l'on en déduit le facteur de réduction, les valeurs trouvées seront différentes entre elles, quand même on aurait fait ses mesures avec tant d'exactitude que les erreurs d'observation fussent entièrement négligeables. D'abord, les erreurs des longueurs d'onde acceptées contribuent à ce résultat, mais quand on emploie les meilleures valeurs qu'on connaît actuellement, ces erreurs n'y sont que pour une bien faible part. La cause des plus fortes différences est que les facteurs de réduction varient d'une partie du spectre à l'autre, même quand on emploie des réseaux de diffraction. Heureusement on peut sans aucune difficulté réduire tous les facteurs à un même point du spectre.

En effet quand le spectroscope est construit comme le nôtre, c'est-à-dire quand on emploie un réseau métallique, et si la même lunette sert à la fois de collimateur et de lunette d'observation, on a pour les longueurs d'onde λ et λ' les formules:

$$\left.\begin{aligned} 2\,Sin\,\alpha &= \frac{m\lambda}{e} \\ 2\,Sin\,\alpha' &= \frac{m\lambda'}{e} \end{aligned}\right|$$

où m est l'ordre du spectre, e la distance entre deux traits consécutifs du réseau, α et α' les déviations des raies spectrales dont les longueurs d'onde sont λ et λ' resp. Par conséquent on a:

$$2\,(Sin\,\alpha' - Sin\,\alpha) = \frac{m}{e}\,(\lambda' - \lambda)$$

ou

$$4\,Sin\,\frac{1}{2}\,(\alpha' - \alpha)\,Cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha' + \alpha) = \frac{m}{e}\,(\lambda' - \lambda)\ .$$

Mais quand il s'agit des mesures différentielles, $\alpha' - \alpha$ est une petite quantité. Par conséquent, on peut sans aucune erreur sensible introduire $\frac{1}{2}\,(\alpha' - \alpha)$ au lieu de $Sin\,\frac{1}{2}\,(\alpha' - \alpha)$, donc:

$$2\,(\alpha' - \alpha)\,Cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha' + \alpha) = \frac{m}{e}\,(\lambda' - \lambda)$$

et, $\alpha' - \alpha$ étant égale à D, selon l'équation (18):

$$R = \frac{\lambda' - \lambda}{\alpha' - \alpha} = \frac{2e\,Cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha' + \alpha)}{m}\ .$$

De même manière, on obtient pour une longueur d'onde moyenne λ_o:

$$R_o = \frac{2e\,Cos\,\alpha_o}{m}\ ,$$

et par la division de ces deux équations:

$$\frac{R_o}{R} = \frac{Cos\,\alpha_o}{Cos\,\frac{1}{2}\,(\alpha' + \alpha)}\ ,$$

ou

$$(19)\ .\ .\ .\ .\ R_o = R\,Cos\,\alpha_o\,Séc.\,\frac{1}{2}\,(\alpha' + \alpha)\ .$$

Les quantités α_o et $\frac{1}{2}\,(\alpha' + \alpha)$ peuvent être calculées à l'aide des équations suivantes:

$$(20) \quad \ldots \ldots \quad \begin{cases} 2\,Sin\,\alpha_0 = \dfrac{m\lambda_0}{e} \\ 2\,Sin\,\dfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha) = \dfrac{m(\lambda' + \lambda)}{2e} \end{cases} .$$

Les formules (19) et (20) peuvent servir non seulement à calculer le facteur de réduction pour la raie spectrale dont on mesure le déplacement, mais comme je le montrerai bientôt, on peut avec leur aide trouver des valeurs corrigées des longueurs d'onde des raies spectrales qui ont servi à trouver R_0.

Nous sommes maintenant en état de développer les formules définitives qui donnent la vitesse en kilomètres, avec laquelle se meut un point sur le bord du Soleil dans la direction de la ligne visuelle, en fonction des lectures faites sur le tambour du micromètre.

L'équation (7) donne:

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 - \frac{v}{V}\right) ,$$

donc:

$$v = -\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} V .$$

Dans le cas en question, λ_0 est la longueur d'onde de la raie solaire mesurée, $\lambda - \lambda_0$ le changement de sa longueur d'onde. Par conséquent on a d'après l'équation (18):

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{1}{2} R d .$$

Si l'on introduit la valeur de $\lambda - \lambda_0$ dans l'expression de v, on a:

$$v = -\frac{R V d}{2\lambda_0} ,$$

et finalement en appliquant le facteur de correction, $Séc\,\eta\,Séc\,\psi$

$$(21) \quad \ldots \ldots \quad v = \frac{R V}{2\lambda_0} d\,Séc\,\eta\,Séc\,\psi .$$

Dans cette équation, V est la vitesse de la lumière en kilomètres. J'ai adopté d'après les recherches de MM. Cornu et Michelson:

$$V = 300000 .$$

Après ces déductions théoriques, je passe à l'exposé des opérations par lesquelles j'ai trouvé les valeurs des vitesses de rotation dans les différentes latitudes héliocentriques.

Entre les différents groupes de raies atmosphériques qui se trouvent dans le spectre solaire, il y a un qui se prête avec un avantage tout spécial à ces recherches. Il est situé dans la grande bande atmosphérique, due à l'oxygène et désignée par α. Ce qui rend ce groupe si éminemment convenable, c'est qu'il consiste en des raies étroites et assez fortes et qui, à une hauteur du soleil encore passablement grande, sont d'une intensité presque égale. En outre, les raies dues à l'oxygène ne s'affaiblissent pas à beaucoup près si considérablement, à une grande hauteur du soleil, que les raies dues à l'eau. Et finalement, on a, dans leur voisinage, beaucoup d'autres raies qui se prêtent à merveille à la détermination du facteur de réduction. Les raies que j'ai employées à la détermination de la vitesse de rotation, sont les suivantes:

Longueurs d'onde		Origine des raies
d'après CORNU [1])	*d'après* DUNÉR	
6300.10	6301.72	Fer, solaire,
6300.66	6302.21	Oxygène, tellurique,
6301.11	6302.72	Fer, solaire,
6301.43	6302.97	Oxygène, tellurique.

Dans mes recherches sur la valeur du facteur de réduction, j'ai fait des mesures des raies suivantes:

Longueur d'onde	Longueur d'onde
6252.780 [2])	6301.720 [2])
6256.573 [2])	6302.717 [3])
6261.315 [2])	6314.871 [2])
6265.348 [2])	6318.240 [2])
6270.440 [2])	6322.911 [2])
6278.297 [2])	6335.553 [2])
6291.22 [3])	6337.044 [2])

Les mesures de ces raies ont été faites d'une façon un peu différente, en 1887 et en 1888—1889. Dans la première année on ne pouvait me-

1) CORNU A. »*Étude des bandes telluriques α, B et A du spectre solaire*».

2) ROWLAND H. A. *Standard Wave-lengths in ordinary air at 20° C. and 760 mm. pressure;* dans *John Hopkins University circulars.* Vol. VIII N:o 73, Mai 1889.

3) Déterminée par N. C. DUNÉR.

surer à la fois qu'une étendue de 30 révolutions environ. Par conséquent, ne pouvant faire des mesures qu'entre des raies peu distantes, je n'ai fait porter mes mesures que sur un petit nombre de raies. Les résultats immédiats des observations de cette année sont les suivants:

Jour d'observation		*6252.780 − 6265.348*	*6265.348 − 6291.22*	*6291.22 − 6302.717*	*6318.240 − 6302.717*	*6335.553 − 6318.240*
Juin	17	− 19ᵗ209	—	− 17.717	+ 23.949	+ 26.766
	18	197	− 39.555	695	927	725
	20	201	603	687	888	724
	22	211	584	696	888	716
	30	—	539	670	889	707
Juillet	3	—	633	728	933	755
	4	—	589	720	926	748
	4	—	578	722	—	—
	13	—	552	691	901	714
	15	—	589	705	888	735
	22	187	555	671	862	698
	26	195	526	712	882	711
	28	203	530	685	898	673
	30	143	524	686	836	687
Août	14	166	521	639	838	689
Moyennes		− 19.1902	− 39.5627	− 17.6963	+ 23.8932	+ 26.7177

En 1888 j'ai obtenu les valeurs suivantes des distances entre les raies mesurées:

Jour		*6252.780 − 6278.297*	*6256.573 − 6278.297*	*6261.315 − 6278.297*	*6265.348 − 6278.297*	*6270.440 − 6278.297*	*6278.297 − 6302.717*
Mai	10	− 37ᵗ820	− 34.224	− 25.212	− 19.249	− 11.690	− 36.32
	16	760	141	146	187	646	256
	16	—	—	—	—	—	—
	16	—	—	—	—	—	—
	19	769	178	170	216	660	233
	29	783	166	180	200	656	272
	29	801	—	—	—	—	—
	29	781	171	177	220	675	—
Juin	10	824	212	198	216	653	322
	10	835	—	—	—	—	—
	21	859	219	232	285	740	303
	21	825	—	—	—	—	—
Juillet	20	786	187	178	209	673	280
	20	803	—	—	—	—	—
Août	3	841	208	224	224	675	344

Jour		*6252.780* − *6278.297*	*6256.573* − *6278.297*	*6261.315* − *6278.297*	*6265.348* − *6278.297*	*6270.440* − *6278.297*	*6278.297* − *6302.717*
Août	7	− 37.849	− 32.238	− 25.218	− 19.230	− 11.680	− 36.310
	9	789	184	189	232	700	225
	9	—	—	—	—	—	254
	11	792	191	200	223	692	259
	11	—	—	—	—	—	257
	12	805	200	204	225	694	211
	12	736	—	—	—	—	208
	12	755	158	172	184	630	287
	13	784	188	190	208	651	293
	13	—	—	—	—	—	276
	20	800	196	211	231	691	276
	20	—	—	—	—	—	230
	20	811	211	216	260	694	312
	20	—	—	—	—	—	308
Moyennes		− 37.8004	− 32.1925	− 25.1952	− 19.2235	− 11.6765	− 36.2743

Jour		*6314.871* − *6302.717*	*6318.240* − *6302.717*	*6322.911* − *6302.717*	*6335.553* − *6322.911*	*6337.044* − *6322.911*
Mai	10	+ 18.142	+ 23.181	+ 30.182	+ 18.928	+ 21.165
	16	116	145	134	845	105
	16	—	—	—	—	070
	16	—	—	—	—	172
	19	094	132	116	920	175
	29	139	146	106	894	133
	29	—	—	—	—	—
	29	—	—	—	—	—
Juin	10	156	175	167	942	191
	10	—	—	—	—	—
	21	096	118	112	904	161
	21	—	—	—	—	—
Juillet	20	088	113	103	880	134
	20	—	—	—	—	—
Août	3	120	157	167	931	182
	7	166	189	199	939	194
	9	123	147	140	906	145
	9	—	—	119	—	—
	11	130	147	136	925	156
	11	—	—	144	—	—
	12	146	155	139	916	162
	12	—	—	097	—	—
	12	130	167	137	952	198
	13	140	170	164	917	154

Jour		*6314.871* − *6302.717*	*6318.240* − *6302.717*	*6322.911* − *6302.717*	*6335.553* − *6322.911*	*6336.044* − *632.911*
Août	13	—	—	+ 30.148	—	—
	20	+ 18.123	+ 23.159	148	+ 18.929	+ 21.170
	20	—	—	139	—	—
	20	138	180	172	935	172
	20	—	—	154	—	—
Moyennes		+ 18.1279	+ 23.1551	+ 30.1417	+ 18.9164	+ 21.1577

En 1889 les mesures ont conduit aux resultats suivants:

Jour		*6252.280* − *6278.297*	*6256.573* − *6278.297*	*6261.315* − *6278.297*	*6265.348* − *6278.297*	*6270.440* − *6278.297*	*6278.297* − *6302.717*
Mai	25	− 37.773	− 32.191	− 25.187	− 19.215	− 11.693	− 36.227
	25	—	—	—	—	—	236
Juin	2	737	121	145	194	653	260
	2	—	—	—	—	—	239
	3	747	158	161	197	644	241
	3	—	—	—	—	—	258
	5	772	160	177	227	675	249
	5	—	—	—	—	—	270
	7	807	201	198	227	672	278
	7	—	—	—	—	—	286
	8	774	163	172	216	674	282
	8	—	—	—	—	—	303
	13	789	195	197	234	671	289
	13	—	—	—	—	—	298
	14	790	190	189	215	678	290
	14	—	—	—	—	—	321
	16	773	178	190	222	656	250
	16	—	—	—	—	—	259
	17	756	151	163	186	644	258
	17	—	—	—	—	—	255
Moyennes		− 37.7718	− 32.1708	− 25.1779	− 19.2133	− 11.6660	− 36.2675

Jour		*6301.720* − *6302.717*	*6314.871* − *6302.717*	*6318.240* − *6302.717*	*6322.911* − *6302.717*	*6335.553* − *6322.911*	*6337.068* *6322.911*
Mai	25	− 1.477	+ 18.127	+ 23.130	+ 30.094	+ 18.894	+ 21.143
	25	—	—	—	104	—	—
Juin	2	491	082	116	090	932	183
	2	—	—	—	059	—	—
	3	474	088	108	090	912	147
	3	—	—	—	097	—	—
	5	471	132	153	121	909	168
	5	—	—	—	096	—	—

Jour		*6301.720* − *6302.717*	*6314.871* − *6302.717*	*6318.240* − *6302.717*	*6322.911* − *6302.717*	*6335.553* − *6322.911*	*6337.068* − *6322.911*
Juin	7	− 1.493	+ 18.140	+ 23.150	+ 30.145	+ 18.900	+ 21.142
	7	—	—	—	148	—	—
	8	495	125	144	124	925	156
	8	—	—	—	108	—	—
	13	485	098	119	108	908	155
	13	—	—	—	106	—	—
	14	499	102	143	122	907	146
	14	—	—	—	128	—	—
	16	470	114	138	110	900	162
	16	—	—	—	106	—	—
	17	486	134	164	133	919	169
	17	—	—	—	127	—	—
Moyennes		− 1.4841	+ 18.1142	+ 23.1365	+ 30.1108	+ 18.9106	+ 21.1571

Pour déduire de ces mesures les facteurs de réduction et la longueur d'onde de la raie 6302,717 non mesurée par M. ROWLAND, j'ai employé la méthode suivante.

Soit λ la longueur d'onde d'une raie mesurée, λ_0 celle de la raie 6302,717; soit D la distance mesurée entre ces deux raies; soit R le facteur de réduction, correspondant à $\frac{1}{2}(\lambda + \lambda_0)$ et R_0 celui de λ_0 on a d'abord:

$$\lambda = \lambda_0 + DR \ ,$$

et selon (19)

$$R = R_0 \, Séc \, \alpha_0 \, Cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) \ ,$$

où α_0 et $\frac{1}{2}(\alpha + \alpha)$ sont calculés d'après les équations suivantes (v. équation 20)

$$\left.\begin{aligned} Sin \, \alpha_0 &= \frac{m}{2e} \cdot \lambda_0 \\ Sin \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) &= \frac{m}{2e} \cdot \frac{1}{2}(\lambda + \lambda_0) \end{aligned}\right| \ .$$

On a donc:

$$\lambda - \lambda_0 = DR_0 \, Séc \, \alpha_0 \, Cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) \ .$$

Soit maintenant $d\lambda_0$ l'erreur de la valeur adoptée de λ_0 et dR_0 celle de R_0, on obtient:

$$(22) \qquad \lambda - \lambda_0 = DR_0 \, Séc \, \alpha_0 \, Cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) = d\lambda_0 + dR_0 \cdot D \; ;$$

car dans le second membre on peut, sans faute appréciable, remplacer le coëfficient $Cos \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_0) \, Séc \, \alpha_0$ de la petite quantité dR_0 par 1.

J'ai donc calculé d'abord la distance D entre chacune des raies mesurées et la raie 6302,717 et j'ai trouvé

Raie	*1887*	*1888*	*1889*
6252.780	− 76.4487	− 74.0747	− 74.0393
6256.573	—	− 68.4668	− 68.4383
6261.315	—	− 61.4695	− 61.4454
6265.348	− 57.2585	− 55.4978	− 55.4808
6270.440	—	− 47.9508	− 47.9335
6301.720	—	—	− 1.4841
6314.871	—	+ 18.1279	+ 18.1142
6318.240	+ 23.8931	+ 23.1551	+ 23.1365
6322.911	—	+ 30.1417	+ 30.1108
6335.553	—	+ 49.0581	+ 49.0214
6337.044	+ 50.6108	+ 51.2994	+ 56.2679

J'ai ici négligé les mesures de la raie 6278,30. Car contrairement à toutes les autres raies celle-ci est une raie atmosphérique et par conséquent les distances qui la séparent des autres sont sujettes à des variations dues au mouvement orbital de la terre. Pour prendre ces variations en considération, il eût fallu noter le temps moyen de toutes les mesures, ce que je n'ai pas fait. A vrai dire il eût mieux valu choisir exclusivement pour cette recherche des raies atmosphériques, où l'on n'a pas besoin de se soucier sur quel point du disque solaire est dirigé le spectroscope, mais les listes de M. Rowland ne contiennent pas assez de raies telluriques pour que cela soit possible. J'ai donc tenu aussi exactement que possible la fente dirigée sur le centre du Soleil, dans le voisinage duquel les longueurs d'onde des raies solaires sont à peine sujettes à des variations causées par la rotation du soleil.

En considérant les valeurs D, on observe qu'en 1887 elles ont été considérablement plus grandes qu'en 1888 et 1889. Cela s'explique immédiatement par la circonstance que l'objectif du spectroscope qui a servi cette année-là avait une distance focale plus grande que celui

qui a été employé plus tard. Mais aussi entre les années 1888 et 1889 il y a des différences constantes causées probablement par une autre orientation du réseau dans l'une et dans l'autre année. Par conséquent, il faut traiter séparément les observations de chaque année.

En appliquant donc l'équation (22) aux observations des trois années, j'ai adopté les valeurs approximatives suivantes:

$$\lambda_0 = 6303.716$$

et pour

	1887	*1888*	*1889*
$log\ R_0$	9.813275	9 826689	9.826689

En partant de ces valeurs, j'ai trouvé, par la méthode des moindres carrés, les résultats finals suivants:

	1887	*1888*	*1889*
λ_0	6302.718	6302.714	6302.719
$log\ R_0$	9.813275	9 826902	9.827111

La valeur de λ_0 étant nécessairement la même dans les trois années, j'ai pris la moyenne des trois résultats différents et j'ai trouvé:

$$\lambda_0 = 6302.717$$

Ensuite, j'ai calculé avec cette valeur de λ_0 et les différentes valeurs de R_0, les longueurs d'onde des raies mesurées, et j'ai trouvé les valeurs suivantes, à côté desquelles je cite aussi leur moyenne et, pour comparaison, les longueurs d'onde trouvées par M. le professeur ROWLAND.

1887	*1888*	*1889*	*Moyenne*	*Rowland*
6252.776	6252.785	6252.783	6252.781	6252.780
—	6256.580	6256.577	6256.578	6256.573
—	6261.311	6261.307	6261.309	6261.315
6265.352	6265.346	6265.340	6265.346	6265.343
—	6270.440	6270.438	6270.439	6270.440
—	—	6301.721	6301.721	6301.720
—	6314.873	6314.870	6314.871	6314.871
6318.240	6318.239	6318.235	6318.238	6318.240
—	6322.916	6322.905	6322.911	6322.906
6335.550	6335.556	6335.549	6335.552	6335.555
—	6337.055	6337.050	6357.052	6337.044

On observe que non seulement l'accord entre mes observations est très satisfaisant, mais aussi l'admirable exactitude des longueurs d'onde déterminées par M. Rowland.

A l'aide des valeurs trouvées pour le facteur de réduction R et pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 6302{,}17$ j'ai calculé la quantité

$$r = \frac{VR}{2\lambda_0} ,$$

et j'ai trouvé:

	1887	*1888*	*1889*
log r	1.18983	1.20346	1.20367

Pour la longueur d'onde $\lambda = 6301{,}721$ on obtient en 1889:

$$log\, r = 1.20374 .$$

L'une et l'autre de ces raies ayant été mesurées en 1889, j'ai adopté pour les mesures dans cette année

$$log\, r = 1.20370 .$$

Si l'on introduit la quantité r dans l'équation (21), on obtient:

$$(23) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad v = r\, d\, Séc\, \eta\, Séc\, \psi .$$

Pour réduire les observations sur le déplacement des raies, j'ai d'abord calculé les latitudes héliocentriques des points opposés l'un à l'autre sur lesquels se sont portées les mesures. Soit δ la lecture sur le cercle de déclinaison aux mesures sur l'un des bords solaires, δ_0 la lecture au pointé sur le bord solaire le plus prochain, boréal ou austral, $\delta - \delta_0$ corrigé de la réfraction est la différence en déclinaison entre le point observé et le bord solaire, et si s est le sémidiamètre du Soleil:

$$\delta - \delta_0 \pm s$$

est la différence en déclinaison entre le centre du Soleil et le point en question. Par conséquent, l'angle de position est calculé à l'aide de l'équation

$$(24) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad tg\, P = \frac{\delta - \delta_0 \pm s}{s} .$$

Le signe supérieur est valable, si $\delta - \delta_0$ est négatif; l'inférieur, si $\delta - \delta_0$ est positif. Quant au quadrant auquel appartient P, on voit immédiatement que, pour des observations sur le bord est, on a toujours

$$180^0 > P > 0^0 ,$$

tandis que pour des observations sur le bord ouest

$$180_0 < P < 360_0 .$$

Après avoir calculé P_e pour le bord oriental et P_0 pour le bord occidental on a:

$$(25) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad P = \frac{1}{2}(P_e + P_0 - 180^0) .$$

Puis on calcule $p - P$ à l'aide de la Table I et π à l'aide de la Table II. Pendant les observations sur les raies spectrales, j'ai aussi porté mon attention sur la partie de la bande spectrale qui se trouvait entre la croix des fils qui servit aux mesures et le bord de cette bande qui correspondait au bord solaire, et j'ai évalué la relation entre la largeur de cette partie et une des diagonales des parallélogrammes formés par les fils du micromètre. J'ai en outre déterminé à l'aide du cercle de déclinaison la valeur angulaire de cette diagonale. Enfin, j'ai lu le cercle de position du spectroscope. En général cette lecture du cercle de position a été la même pendant un assez long temps pour toutes les observations sur une même latitude héliocentrique, prises avant midi, et aussi constante mais d'une autre valeur pour les observations du soir. La partie du spectre dont je viens de parler a eu aussi en général une largeur constante, mais un peu variable d'une année à une autre. Par conséquent, j'ai pu faciliter le calcul des ψ par de petites tables.

D'abord, j'ai déduit pour chacune des six distances polaires héliocentriques 15^0, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0 et 90^0 sur lesquelles se sont portées mes mesures, la constante

$$(26) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad z = \frac{h}{2s \operatorname{Sin} \pi} .$$

Puis j'ai calculé pour les valeurs différentes de P, en intervalles de 4^0, l'angle ψ à l'aide de l'équation (14) dans laquelle j'ai mis $f = 0$ et introduit la constante $\varkappa$ par où elle devient:

$$(27) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad Sin \frac{1}{2} \psi = \frac{\varkappa \, Cos \, (P - \varphi)}{Sin \, P} \quad .$$

La détermination de l'angle φ présente quelques difficultés. Je l'ai effectuée en plaçant la fente tangente au bord boréal ou austral du Soleil, et en m'assurant qu'un point donné de la chromosphère se tenait au milieu de la fente entr'ouverte, tandis que je déplaçais l'instrument en angle horaire. A la vérité, cette determination du point zéro du cercle de position ne pouvait être faite que très grossièrement; or une grande exactitude n'est pas nécessaire pour obtenir l'angle ψ avec toute exactitude désirable, et cette circonstance est par conséquent sans influence sur les résultats.

Les différentes séries d'observations ne sont pas d'une valeur tout-à-fait égale. Dans les années 1887 et 1888 je n'ai mesuré, dans la même série, qu'une paire de raies, 6301,72 et 6302,21 ou bien 6302,72 et 6302,97, tandis qu'en 1889 j'ai toujours mesuré toutes les quatre raies. D'ailleurs, chaque série comprend entre 12 et 24 pointés sur chaque raie, dont la moitie sur l'un des bords du soleil, la moitié sur l'autre bord. Jamais je n'ai pris deux séries dans la même latitude héliocentrique pendant le même matin ou le même soir. J'ai ainsi obtenu les valeurs suivantes de la vitesse v avec laquelle le bord oriental s'approche de la terre. Cette vitesse est exprimée en kilomètres; π est la distance polaire héliocentrique sur laquelle se portaient les mesures.

$\pi = 90^0$

1887		v	π	*1887*		v	π
Juin	3	+ 2.25	$89^0.1$	Juillet	1	1.79	$88^0.5$
	3	1.84	89.7		2	1.93	89.5
	4	1.79	88.5		3	1.67	89.6
	4	2.25	89.6		8	1.88	89.0
	11	2.16	89.8		12	1.78	86.3
	18	2.16	90.0		13	1.91	89.6
	19	2.05	89.9		14	1.89	89.3
	23	1.93	89.4		22	1.81	89.5
	24	2.00	89.4		23	1.68	89.8
	25	2.30	89.6		23	1.93	89.7
	29	2.08	89.9		26	1.97	90.0
	30	1.91	88.8		26	2.27	90.0

1887		r	π
Juillet	27	+ 2.18	89.9
	28	1.98	89.8
	30	2.03	89.6
	30	2.08	89.9
	31	1.81	89.0
Août	4	2.07	89.8
	5	2.26	89.7
	5	1.93	90.0
	6	1 84	88.2
	6	2.16	89.6
1888			
Mai	5	2.14	89.4
	10	1.55	90.0
	12	2.12	89.9
	16	1.85	89.8
	19	2.26	89.6
	19	2.06	89.9
	20	1.97	89.9
	22	1.89	89.5
	22	1.98	90.0
	23	1.77	89.6
	23	1.66	89.9
	24	1.79	90.0
	29	1.94	89.4
Juin	6	1.75	89.9
	6	1.73	89.9
	12	1.86	90.0
	13	1.88	89.9
	13	1.68	89.2
	20	1.88	89.3
	21	1.69	89.7
	21	1.95	89.6
	22	2.36	89.4
	24	1.75	89.2
	24	1.88	89.9
	25	1.79	89.8
	26	1.72	89.9
	27	1.59	89.4
Juillet	16	2.24	89.9
	20	2.23	89.2
	20	2.10	90.0
	21	1.84	89.8
	25	1.91	90.0

1888		r	π
Juillet	27	+ 2.01	80.1
	28	2.11	89.7
Août	1	1.74	89.9
	2	1.87	90.0
	3	1.87	89.9
	3	1.85	89.7
	4	1.97	89.4
	7	2.12	89.7
	7	2.07	89.8
	9	1.83	89.2
	11	1 82	89.8
	12	1.54	90 0
	12	1.67	89.9
	13	1.95	90.0
	20	2 01	90.0
	20	2.14	89.7
	21	1.86	89.9
1889			
Mai	23	2.04	89.6
	24	1.90	89.5
	24	2.17	90.0
	25	2.04	89.9
	28	2.09	89 2
Juin	2	1.83	88.5
	2	2.05	90.0
	3	1.98	89.6
	3	1.42	89.8
	4	2.01	89.9
	5	2.15	90.0
	6	2.13	89.4
	7	2.14	89.7
	7	2.25	89.8
	8	1.83	89.5
	11	2.21	89.7
	13	2.05	89.8
	14	2.10	89.7
	14	2.09	89.8
	15	1.88	89.7
	15	2.20	89 9
	16	2.29	89 7
	17	2 37	87.5
	18	2.34	89.5

$\pi = 75^0$

1887		ε	π
Juin	3	+ 2.20	$74^0.1$
	3	2.16	75.5
	3	1.91	75.6
	4	1.42	75.9
	4	2.10	75.9
	15	1.97	80.6
	16	1.97	81.0
	17	1.86	77.7
	18	2.05	75.1
	18	1.50	69.4
	19	2.19	74.9
	24	1.20	72.1
	25	1.97	74.7
	25	1.65	74.2
	29	1.99	74.4
	30	1.74	74.5
Juillet	1	1.87	73.8
	2	1.90	74.5
	3	1.81	74.4
	12	1,95	73.4
	13	1.81	73.2
	14	2.20	74.8
	22	1.93	74.0
	23	1.74	75.6
	23	1.54	75.1
	26	1.97	78.4
	26	1.82	74.5
	27	1.87	75.2
	28	1.84	74.6
	30	1.49	75.1
	30	1.87	75.1
	31	1.82	75.0
Août	4	1.89	75.0
	5	1.60	75.3
	5	1.93	75.1
	6	1.87	74.9
	6	1.89	74.7
1888			
Mai	5	1.99	74.3
	10	1.52	74.9
	12	1.90	74.5
	16	1.97	75.1

1888		ε	π
Mai	19	+ 2.10	$74^0.7$
	19	1.80	75.1
	20	1.87	74.8
	20	1.54	75.3
	22	1.65	74.2
	22	1.53	74.8
	23	1.75	74.8
	24	1.97	74.7
	29	2.02	74.9
Juin	6	1.69	75.1
	6	1.60	75.8
	12	2.14	74.9
	13	1.66	75.1
	13	1.49	75.1
	20	1.72	75.3
	21	1.80	75.2
	21	1.80	75.0
	22	1.81	75.6
	22	1.28	74.3
	24	1.82	75.0
	24	1.76	75.1
	25	1.56	75.1
	26	1.62	74.6
	27	1.37	75.1
Juillet	16	1.97	74.8
	20	1.72	75.3
	20	1 51	74.9
	21	2.10	75.1
	27	1.93	74.7
	28	1.82	71.4
Août	1	1.70	74.9
	3	2.13	73.5
	3	1.57	74.4
	4	2.03	75.0
	7	1.64	74.9
	7	1.66	74.9
	11	1.82	74.9
	12	1.98	75.0
	21	1.99	75.2
1889			
Mai	23	1.92	74.8
	24	1.98	74.7

1889		v	π
Mai	24	+ 1.94	74°9
	25	1.74	75.1
	28	1.86	74.7
Juin	2	1.57	74.7
	2	1.73	75.0
	3	2.03	74.6
	4	1.87	74.9
	4	1.86	75.1
	5	2.05	75.2
	6	1.91	75.7
	7	1.76	74.8

1889		v	π
Juin	7	+ 2.01	75°0
	8	1.84	74.6
	11	1.76	75.0
	13	1.80	75.5
	14	1.86	74.7
	14	1.97	75.0
	15	1.94	75.2
	15	2.21	75.0
	16	1.91	75.0
	17	2.11	74.7
	18	2.27	74 9

$\pi = 60^0$

1887		v	π
Juin	11	+ 1.70	64°2
	17	1 58	60.4
	18	1.42	60 1
	19	1.58	59.7
	24	1.36	60.8
	29	1.32	59.4
	30	1.43	59.6
Juillet	1	2.06	59.0
	2	1.50	59.4
	3	1.48	59.4
	4	1.52	58.9
	12	1.64	58.6
	13	1.66	59.1
	14	1.84	59.7
	22	1.83	60.0
	23	1.54	60.1
	23	1 45	60.0
	26	1.92	60.6
	26	1.48	59.7
	27	1.66	60.1
	28	1.62	61.1
	30	1.58	60.1
	30	1.12	59.8
	31	1.30	60.3
Août	4	1.51	60 1
	5	1.63	60 0
	5	1.65	60.1

1887		v	π
Août	6	+ 1.57	60°2
	6	1.26	59.9
1888			
Mai	10	1.35	59.9
	11	1.52	60.2
	12	1.81	60.0
	16	1.65	60.6
	19	1.89	60 0
	19	1.65	59.8
	20	2.03	59 8
	20	1.70	60.1
	22	1.54	59.9
	22	1.87	60.0
	23	1.59	59.8
	24	1.58	60 0
	24	1.38	61 0
	29	1.71	59.7
Juin	6	1.78	60.1
	6	1.34	60.1
	12	1.46	60.1
	13	1.56	60.1
	13	1.57	60.5
	20	1.22	59.4
	21	1.40	59.9
	21	1.60	59.6
	22	1.43	60.3
	22	1.03	59.3

1888		r	π
Juin	24	+ 1.67	60°2
	24	1.36	60.2
	25	1.72	60.1
	26	1.85	60.0
	27	1.50	60.3
Juillet	16	1.24	59.7
	20	1.89	60.2
	20	1.67	59.9
	21	1.40	59.7
	27	0.99	60.0
	28	1.74	60.1
	30	1.41	60.2
Août	1	1.75	60.2
	3	1.54	60.3
	3	1,54	60.1
	4	1.64	59.9
	7	1.29	60.1
	7	1.48	59.9
	9	1.47	60.6
	11	1 23	59.7
	12	1.50	60.2
	12	1.51	60 2
	13	1.55	60.0
	20	1.50	60.2
	20	1.40	60 2
	21	1.98	60.1
	21	1.53	59.8

1889		r	π
Mai	23	+ 1.42	60°1
	24	1.76	60.0
	24	1.68	60.2
	25	1.53	59.8
	28	1.51	59.6
Juin	2	1.49	60.1
	2	1.63	60.1
	3	1.43	59.6
	4	1.32	60.4
	4	1.66	60.3
	5	1.32	57.7
	6	1.82	59.7
	7	1.87	59.6
	7	1.74	60.2
	8	1.81	60.3
	11	1.70	59.8
	13	1.52	60.4
	14	1.65	59 8
	14	1.81	60.0
	15	1.51	59.9
	15	1.73	61.1
	16	2.12	59.8
	17	1.50	60.0
	18	1.89	59 5

$\pi = 45^0$

1887		r	π
Juin	15	+ 1.31	48°0
	16	0.55	48.4
	18	1.46	45.1
	19	1.38	45.1
	22	1.33	45.2
	24	0.80	45.9
	24	1.33	46.1
	25	1.26	40.5
	25	0.82	44.5
	25	1.23	43.8
	29	1.08	39.5
	30	1.34	44.3

1887		r	π
Juillet	1	+ 1.47	44°1
	2	1.29	44.6
	3	1.18	44.3
	4	1.12	44.2
	9	1.40	45.0
	13	1.22	43.8
	14	1.39	43.0
	22	1.36	44 7
	23	1.29	45.1
	26	1.53	45.6
	26	1.34	45.8
	27	1.18	44.8

1887		r	π
Juillet	28	+ 1.04	44°.8
	30	1.20	45.0
	30	1.24	44.6
	31	0.59	45.2
Août	4	1.63	45.3
	5	0.97	45.2
	5	1.25	44.8
	6	0.95	45.3
	6	1.28	44.6
1888			
Mai	5	0.87	45.5
	10	1.32	45.1
	11	1.46	45.0
	12	1.40	44.8
	16	1.12	45.3
	16	1.26	44.9
	19	1.34	44.9
	19	1.42	45.1
	20	1.42	45.1
	20	1.08	44.9
	22	1.48	44.6
	22	1.16	44.6
	23	1.53	44.9
	24	1.21	45.0
	24	1.45	45.3
	29	1.29	44.9
Juin	6	1.45	45.0
	6	1.23	45.0
	12	1.39	44.8
	13	0.88	45.0
	13	1.30	45.2
	20	0.87	45.6
	21	0.93	45.1
	21	0.91	45.2
	22	1.17	44.5
	22	1.24	44.5
	24	1.12	44.9
	24	1.34	45.0
	25	1.20	45.2
	26	1.09	44.9
	27	1.10	45.0
	27	0.88	45.0

1888		r	π
Juillet	16	+ 0.59	44°.6
	20	1.33	44.8
	20	1.11	45.5
	21	1.32	46.8
	27	0.77	46.0
	30	0.89	45.1
Août	1	1.38	44.8
	3	1.02	45.1
	3	1.00	44.9
	4	1.16	45.3
	4	0.96	45.4
	7	1.26	45.1
	7	1.32	44.2
	11	1.06	44.9
	12	0.73	45.5
	13	1.07	44.9
	20	1.09	44.8
1889			
Mai	23	1.28	44.8
	24	1.19	44.9
	24	1.26	45.1
	25	1.06	44.7
Juin	1	1.14	44.6
	2	1.19	44.8
	2	1.01	44.9
	3	1.12	46.7
	3	1.07	45.0
	4	1.00	45.2
	5	1.16	44.9
	6	1.28	45.0
	7	1.30	44.6
	7	1.30	44.8
	8	1.42	45.1
	11	1.21	45.4
	13	1.31	44.7
	14	1.00	45.1
	14	1.62	45.3
	15	1.03	44.8
	15	1.19	45.3
	17	1.25	45.4
	17	1.47	45.4
	18	0.81	45.2

$\pi = 30^0$

1887		r	π
Juin	3	+ 0.78	$29^0.1$
	4	0.74	30.8
	15	0.79	34.1
	16	0.60	26.6
	17	0.76	30.2
	17	1.24	30.3
	18	0.76	30.2
	19	0.36	31.2
	19	0.77	30.0
	22	0.81	30.2
	24	0.51	33.8
	24	0.60	30.3
	25	0.27	25.8
	25	0.53	30.6
	29	0.41	29.6
	30	0.72	29.7
Juillet	1	0.31	28.6
	2	0.79	29.6
	3	0.80	29.9
	4	0.87	29.6
	9	0.87	29.7
	13	0.67	28.6
	14	0.84	30.1
	20	1.07	30.0
	22	0.53	30 2
	23	0.69	30.0
	26	0.50	29.3
	26	0.83	29.8
	27	1.07	29.6
	28	0.97	29.9
	30	0.48	30.4
	30	0.55	30.1
	31	0.55	30.2
Août	4	0.74	30.5
	5	0.77	30.4
	5	0.71	30.2
	6	0.77	29.9
	6	0 89	30.0
1888			
Mai	5	0 44	30.4
	10	0.59	31.0
	11	0.75	30.1

1888		r	π
Mai	12	+ 0.58	$30^0.5$
	16	0 85	30.7
	19	0.63	30.1
	19	1.17	30.4
	20	0.71	30.6
	20	0 88	30.1
	22	0.53	29.9
	22	0.85	29.5
	23	0.64	30.0
	24	0.81	30.2
	24	0 65	30.1
	29	0.84	29.9
Juin	6	0.67	30.0
	6	0.86	30.1
	12	0.94	29.9
	13	0.49	30.2
	13	0 69	30 2
	20	1.01	31 5
	21	0.58	30 3
	21	0.50	30.0
	22	0.52	29.5
	22	0.66	29.7
	24	0.70	30.0
	24	0.95	30.4
	25	0.65	30.0
	26	0 91	30.0
	26	0.72	30.2
	27	0.66	30.3
Juillet	16	0 44	29.5
	20	0.83	29 6
	20	0.90	29 3
	21	0.49	29 7
	27	0.37	29.6
	30	0.64	29.9
Août	1	0.89	30.4
	3	0.69	30 3
	3	0 77	30.2
	4	0.63	30.3
	4	0.45	30.4
	7	0.55	30.2
	7	0.70	30.1
	11	0.88	30.2
	13	0.67	29.9

1889		v	π
Mai	23	+ 0.64	30°4
	24	0.63	30.3
	24	0.84	29.7
	25	0.77	29.7
Juin	1	0.56	29.5
	2	0.68	30.2
	2	0.76	30.2
	3	1.20	29.3
	3	0.84	29.9
	4	0.60	30.3
	5	0.61	29.7
	6	1 03	30.0

1889		v	π
Juin	7	+ 1.01	29°5
	7	0.91	30.2
	8	0.65	29.7
	11	0.63	30.5
	13	0.74	30.2
	14	0.69	30.2
	14	1.02	29.8
	15	0.51	30.0
	15	0.65	30.2
	17	0 63	29.8
	18	0.52	29.7

$\pi = 15^0$

1887		v	π
Juin	4	+ 0.12	15°9
	4	+ 0.51	15.9
	11	+ 0.12	16.4
	17	− 0.11	15.3
	17	− 0.48	15.3
	17	+ 0.75	15.3
	18	+ 0 54	15.2
	19	+ 0.46	15.3
	22	+ 0 40	14.8
	24	+ 0.24	15.9
	24	+ 0.18	15.8
	25	+ 0.51	17.1
	29	+ 0.43	14.1
	30	+ 1.00	18.1
Juillet	1	+ 0.31	15.8
	2	+ 0.31	15.2
	3	+ 0.23	14.1
	4	+ 0.39	13.1
	9	+ 0.23	15.8
	13	+ 0.41	16.2
	14	+ 0.66	14.4
	20	+ 0.32	14.1
	22	+ 0.55	16.1
	22	+ 0.24	14.9
	23	− 0.14	14.5
	26	+ 0.64	15.7

1887		v	π
Juillet	26	+ 0.60	14°9
	27	+ 0.18	14.8
	28	+ 0.23	14.9
	30	+ 0.31	15.4
	30	+ 0.15	15.1
	31	+ 0.30	15.3
Août	4	+ 0.48	15.0
	5	+ 0.25	15.6
	5	+ 0.41	15.9
	6	+ 0.46	15.0
	6	+ 0.35	15.1
1888			
Mai	5	+ 0.22	15.2
	10	+ 0.50	14.7
	11	+ 0.39	16.7
	12	+ 0.20	15.3
	16	+ 0.47	15.9
	19	+ 0.33	15.2
	19	+ 0.28	15.1
	20	+ 0.50	15.0
	20	+ 0.51	15.1
	22	+ 0.34	14.8
	22	+ 0.59	15.2
	23	+ 0.30	15.3
	24	+ 0.53	15.0

1888		v	π
Mai	24	+ 0.44	15^{0}4
	29	+ 0.39	14.8
Juin	6	+ 0.66	14.8
	6	+ 0.57	15.3
	12	+ 0.58	15.5
	13	+ 0.48	15.7
	13	+ 0.46	15.4
	20	+ 0.55	16.4
	21	+ 0.45	15.3
	21	+ 0.34	15.3
	22	+ 0.34	14.6
	22	+ 0.23	14.9
	24	+ 0.43	15.7
	24	+ 0.81	16.5
	25	+ 0.51	14.4
	26	+ 0.08	15.0
	26	+ 0.41	16.0
	27	+ 0.35	15.3
Juillet	16	+ 0.33	15.0
	20	+ 0.16	15.3
	20	+ 0.25	15.4
	21	+ 0.36	15.0
	27	+ 0.36	15.0
	30	+ 0.41	15.1
Août	1	+ 0.19	14.9
	3	+ 0.43	14.6
	3	+ 0.22	15.2
	4	+ 0.35	15.0
	4	+ 0.33	14.7
	7	+ 0.27	14.5

1888		v	π
Août	7	+ 0.40	14^{0}4
	11	+ 0.25	14.9
	12	+ 0.55	15.7
	13	+ 0.26	14.9
1889			
Mai	23	+ 0.51	14.8
	24	+ 0.49	14.9
	24	+ 0.32	15.2
	25	− 0.04	14.5
Juin	1	+ 0.43	15.0
	2	+ 0.14	14.8
	2	+ 0.31	15.1
	3	+ 0.37	15.3
	3	+ 0.33	15.0
	4	+ 0.32	15.3
	5	+ 0.20	15.5
	6	+ 0.13	15.2
	7	+ 0.36	14.6
	7	+ 0.44	15.0
	8	+ 0.41	14.8
	11	+ 0.48	15.4
	13	+ 0.35	15.3
	14	+ 0.40	14.4
	14	+ 0.32	15.2
	15	+ 0.47	15.0
	15	+ 0.23	15.4
	17	+ 0.57	15.2
	18	− 0.20	14.7

Outre ces observations, j'ai pris en 1888 quelques séries de mesures sur les points, opposés l'un à l'autre, dont les angles de position diffèrent de $+90^{0}$ et de -90^{0} resp. de celui de l'équateur solaire et où, par conséquent, il n'y a pas de déplacement des raies spectrales causé par la rotation du Soleil. J'ai obtenu:

1888		v
Mai	5	− 0.10
	11	+ 0.20
	12	+ 0.02
	16	− 0.07
Août	11	− 0.12
	13	− 0.24
	20	+ 0.01
	21	+ 0.16
	21	− 0.04
	Moyenne	− 0.02

Le résultat de ces 8 séries de mesures est en effet zéro. En examinant les vitesses de rotation trouvées pour les différentes latitudes héliocentriques, on voit qu'en général l'accord en est excellent. Cependant, il y a quelques mesures qui présentent des écarts si considérables de la moyenne des autres qu'on est porté à croire qu'elles ont été altérées par quelque cause particulière. Pour les observations dans le voisinage de l'équateur, on pourrait penser à l'influence des éruptions des gaz de l'intérieur du Soleil. Pour les observations dans le voisinage des pôles, on pourrait au contraire suspecter qu'il y a eu, dans les observations, confusion des bords solaires, de la sorte que des observations qui devaient être prises sur le bord est se sont en effet portées sur le bord ouest ou vice versa, erreur qui ne se trahit pas par l'apparence seule du groupe des raies mesurées que quand on observe dans une latitude de 45° et au dessous. Mais bien qu'il est fort possible que des erreurs de cette espèce puissent avoir arrivé, j'ai cru, cependant, qu'il vaudrait mieux ne pas faire des suppressions ou altérations arbitraires des observations, d'autant moins que le grand nombre des séries d'observations rend peu sensible l'influence de ces erreurs. D'autre part, pour ne pas donner aux observations l'apparence d'avoir une exactitude exagérée, j'ai pris des moyennes séparées des observations de chaque année, et j'ai calculé les erreurs probables de chacune de ces moyennes. J'ai trouvé:

φ	v	e	n	$An.$
0°3	1.90	± 0.018	49	1888
0.4	2.05	± 0.028	24	1889
0.6	1.99	± 0.020	34	1887
14.9	1 85	± 0.024	37	1887
15.0	1.92	± 0.021	24	1889
15.2	1.77	± 0.021	43	1888
29.9	1 55	± 0.020	51	1888
30.0	1.56	± 0.026	29	1887
30.1	1.64	± 0.027	24	1889
44.9	1.16	± 0.021	49	1888
44.9	1.19	± 0.024	24	1889
45.3	1 21	± 0.030	33	1887
59.9	0.70	± 0.017	46	1888
60.0	0 77	± 0.023	38	1887
60.0	0.74	± 0.025	23	1889
74.7	0.32	± 0.029	37	1887
74.8	0.39	± 0.014	47	1888
75.0	0.32	± 0.025	23	1889

Ici φ est la latitude héliocentrique, donc égal à $90^0 - \pi$, e est l'erreur probable des résultats, et n le nombre des séries de mesures que j'ai prises dans les différentes années.

Quand même les erreurs probables de ces moyennes ont des grandeurs assez différentes, je n'ai pas cru devoir les prendre en considération à la formation des positions normales, les erreurs systématiques dans les années particulières étant plus fortes que les erreurs accidentelles. J'ai donc tout simplement pris les moyennes des trois valeurs qui appartiennent à la même latitude héliocentrique. Cela fait, j'ai transformé les vitesses en ξ Cos φ où ξ est l'angle de rotation en 24 heures.

Soit R le rayon équatorial du Soleil en kilomètres,

D un jour moyen exprimé en secondes = 86400 .

Il est donc évident que, $2\pi R$ étant la périphérie de l'équateur solaire, et Dv étant le chemin parcouru en un jour moyen, il faut que pour l'équateur solaire

$$\xi = \frac{Dv}{2\pi R} \cdot 360^0 .$$

Or pour une latitude égale à φ on a:

$$(28) \quad \xi = \frac{Dv}{2\pi R \operatorname{Cos} \varphi} \cdot 360^0 ,$$

où v est la vitesse qui correspond à la latitude φ. C'est par ces calculs que j'ai trouvé les valeurs normales suivantes.

φ	v	ξ Cos φ	ξ	n
$0^0.4$	1.98	$14^0.14$	$14^0.14$	107
15.0	1.85	13.19	13.66	104
30.0	1.58	11.31	13.06	104
45.0	1.19	8.48	11.99	106
60.0	0 74	5.31	10.62	107
74.8	0.34	2.45	9.34	107 .

Il suffit de jeter un coup d'oeil sur les nombres de cette table pour y voir la confirmation de ce qu'avaient révélé les observations sur les taches, à savoir que le temps de rotation des différentes zones de la surface solaire n'est pas le même; que la zone équatoriale fait un tour

entier dans le temps le plus court, et que le temps de rotation augmente avec la latitude. Mais les taches qu'on a pu observer pendant plus d'une révolution, et qui par conséquent se prêtent avec avantage aux recherches sur la rotation du Soleil, ne se sont présentées que très exceptionnellement au delà de 35^0 de latitude et jamais au delà de 45^0; la latitude la plus élevée où l'on a vu une tache n'atteint pas les 55^0. On n'a donc rien su jusqu'à présent sur la rotation des deux calottes entre 55^0 et les pôles. Mes observations étendent notre connaissance de ces faits jusqu'à la latitude de 75^0, donc jusqu'au voisinage immédiat des pôles.

J'ai employé les valeurs de $\xi\, Cos\, \varphi$ pour déduire les formules qui donnent les valeurs de l'angle de rotation en fonction de la latitude héliocentrique. On sait que M. FAYE a adopté, dans les recherches qu'il a faites sur ce sujet, la forme:

$$\xi\, Cos\, \varphi = [a - b\, Sin^2\, \varphi]\, Cos\, \varphi\ ,$$

ou ce qui revient au même:

$$\xi\, Cos\, \varphi = [a' + b'\, Cos^2\, \varphi]\, Cos\, \varphi\ .$$

J'ai d'abord adopté la formule:

$$\xi\, Cos\, \varphi = 9^0{,}35\, Cos\, \varphi + 5^0{,}00\, Cos^3\, \varphi\ ,$$

ce qui donne les équations de condition suivantes:

$$\begin{aligned}
0 &= +\,0^0{,}2094 + [9.99999]\, da' + [9.99997]\, db'\\
0 &= +\,0.3472 + [9.98494]\, da' + [9.95482]\, db'\\
0 &= +\,0.0349 + [9.93753]\, da' + [9.81259]\, db'\\
0 &= -\,0.1007 + [9.84949]\, da' + [9.54847]\, db'\\
0 &= -\,0.0100 + [9.69897]\, da' + [9.09691]\, db'\\
0 &= +\,0.0915 + [9.41861]\, da' + [8.25583]\, db'\ ,
\end{aligned}$$

où les quantités entre crochets sont des logarithmes. Ces équations, traitées d'après la méthode des moindres carrés donnent les formules corrigées suivantes:

(29) . . $\xi\, Cos\, \varphi = 9^0{,}56306\, Cos\, \varphi + 4^0{,}53874\, Cos^3\, \varphi\ ,$

ou bien:

(30) . . . $\xi\, Cos\, \varphi = [14^0{,}10 - 4^0{,}54\, Sin^2\, \varphi]\, Cos\, \varphi\ .$

M. Spörer au contraire donne la préférence à la forme très simple:

$$\xi \, Cos\, \varphi = [a + b \, Cos\, \varphi] \, Cos\, \varphi \ ,$$

déjà proposée par C.-H.-F. Peters.

J'ai d'abord accepté:

$$\xi \, Cos\, \varphi = 7^0{,}1900 \, Cos\, \varphi + 7^0{,}1900 \, Cos^2 \varphi \ .$$

La comparaison de cette formule avec les valeurs normales de $\xi \, Cos\, \varphi$ donnent les équations de condition suivantes:

$$\begin{aligned}
0 &= + 0^0{,}2395 + [9.99999]\, da + [9.99998]\, db \\
0 &= + 0.4633 + [9.98494]\, da + [9.96988]\, db \\
0 &= + 0.3192 + [9.93753]\, da + [9.87506]\, db \\
0 &= - 0.1992 + [9.84949]\, da + [9.69898]\, db \\
0 &= - 0.0825 + [9.69897]\, da + [9.39794]\, db \\
9 &= + 0.0700 + [9.41861]\, da + [8.83722]\, db \ .
\end{aligned}$$

Trois solutions successives de ces équations conduisirent à la formule suivante:

$$(31) \quad . \quad . \quad . \quad \xi = 7^0{,}27538 \, Cos\, \varphi + 6^0{,}72488 \, Cos^2 \varphi \ ,$$

ou bien:

$$(32) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \xi = [7^0{,}275 + 6^0{,}725 \, Cos\, \varphi] \, Cos\, \varphi \ .$$

M. Spörer a aussi proposé la forme un peu plus compliquée:

$$\xi \, Cos\, \varphi = [a + b \, Cos\, \varphi + c \, Sin\, \varphi] \, Cos\, \varphi \ ,$$

ou, ce qui revient au même:

$$\xi \, Cos\, \varphi = [a + b \, Cos\, \varphi] \, Cos\, \varphi + c' \, Sin\, 2\, \varphi \ .$$

J'ai adopté:

$$\xi \, Cos\, \varphi = 8^0{,}596 \, Cos\, \varphi + 5^0{,}522 \, Cos^2 \varphi - 0^0{,}380 \, Sin\, 2\, \varphi \ .$$

Cette formule m'a donné les équations de condition suivantes:

$$\begin{aligned}
0 &= - 0^0{,}0276 + [9.99999]\, da + [9.99998]\, db + [8\ 14495]\, dc \\
0 &= + 0.0752 + [9.98494]\, da + [9.96988]\, db + [9.69897]\, dc \\
0 &= - 0.0532 + [9.93753]\, da + [9.87506]\, db + [9\ 93753]\, dc \\
0 &= - 0.0205 + [9.84949]\, da + [9.69898]\, db + [0.00000]\, dc \\
0 &= + 0.0394 + [9.69897]\, da + [9.39794]\, db + [9\ 93753]\, dc \\
0 &= - 0.0089 + [9.41861]\, da + [8.83722]\, db + [9.70418]\, dc \ .
\end{aligned}$$

La solution de ces équations s'est montrée encore plus incertaine que celle des équations précedentes. Cependant, j'ai trouvé après quelques essais la formule suivante:

$$(33) \qquad \xi \, Cos\, \varphi = 8^0{,}59137 \, Cos\, \varphi + 5^0{,}52544 \, Cos^2 \varphi - 0^0{,}37835 \, Sin\, 2\, \varphi \ ,$$

ou

$$(34) \qquad \xi \, Cos\, \varphi = [8^0{,}591 + 5^0{,}525 \, Cos\, \varphi - 0^0{,}757 \, Sin\, \varphi] \, Cos\, \varphi \ .$$

En comparant les formules 29, 31 et 33 avec les observations, on obtient les erreurs résiduelles suivantes:

φ	e'	e''	e'''
0°.4	+ 0°.04	+ 0°.14	+ 0°.03
15.0	− 0.14	− 0.11	− 0.07
30.0	+ 0.08	− 0.03	+ 0.05
45.0	+ 0.11	− 0.03	+ 0.02
60.0	− 0.04	− 0.01	− 0.04
74.8	− 0.14	+ 0.08	+ 0.01 .

Les carrés des erreurs résiduelles sont resp.

0°.0609 0°.0400 0°.0104 .

L'accord des formules 33 et 34 avec les observations est donc considérablement meilleur que celui des autres formules. Cependant, les erreurs résiduelles e'' et même e' ne surpassent pas les erreurs probables des observations. L'incertitude des coëfficients dans les six formules est très considérable, et il serait possible de représenter les observations par des formules de la même forme mais avec des coëfficients dont les valeurs seraient assez différentes de celles des formules (30), (32) et (34). Il est donc évident que même nos recherches n'ont pas suffi à révéler la vraie forme de la loi de rotation du Soleil, et quant à la forme (34), elle ne me semble nullement plus probable que les deux autres. Car il est évident qu'en introduisant dans le problème trois inconnues, on pourra beaucoup mieux rendre compte des observations.

Cependant le fait déjà révélé par les observations sur les taches semble bien établi par mes observations, à savoir que la rotation du Soleil devient plus lente à mesure qu'on se rapproche de ses pôles. Si l'on calcule une formule de la rotation du Soleil en supposant qu'elle se fasse avec une vitesse uniforme sous toutes les latitudes héliocentriques,

et en se rappelant que les observations des taches contredisent catégoriquement la supposition d'un angle ξ plus petit que $14^0,14$, on obtiendrait

$$\xi \, Cos \, \varphi = 14^0,14 \, Cos \, \varphi \ ,$$

par où l'on obtient:

	0°.4	*15°.0*	*30°.0*	*45°.0*	*60°.0*	*74°.8*
$\xi \, Cos \, \varphi$ Calculé	14°.14	13°.66	12°.25	10°.00	7°.07	3°.71
Observation-Calcul	0.00	− 0.47	− 0.94	− 1.52	− 1.76	− 1.26

ou:

v Calculé	1.98	1.92	1.72	1.41	1.00	0.52
Observation-Calcul	0.00	− 0.07	− 0.14	− 0.22	− 0.26	− 0.18

On voit que ces écarts surpassent de beaucoup les erreurs probables des mesures qui n'atteignent pas en moyen 0,02, même avec les suppositions les plus défavorables. Les séries qui ont donné des valeurs de v plus petites ou plus grandes que les vitesses calculées sont:

	0.4	*15.0*	*30.0*	*45.0*	*60.0*	*74.8*
Plus grandes	50	38	24	14	9	16
Plus petites	57	66	80	92	98	91

Ces nombres prouvent aussi la réalité de l'augmentation du temps de rotation dans les latitudes plus élevées.

Si, enfin, on calcule les temps de rotation, à l'équateur et sous le pôle, on trouve:

φ	*Formule* (30)	*Formule* (32)	*Formule* (34)
0°	25ʲ.53	25ʲ.71	25ʲ.50
90°	37.66	49.45	45.98

Je dois avouer que cette différence entre le temps de rotation dans les différentes latitudes me semble incompréhensible, et constitue un des problèmes les plus difficiles de l'astrophysique, d'autant plus que les recherches sur la rotation du Soleil faites à l'aide des mesures sur les facules semblent contredire ce ralentissement de la rotation.

Fig. 1.

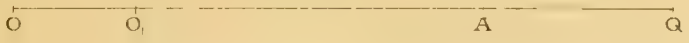


Fig. 2.

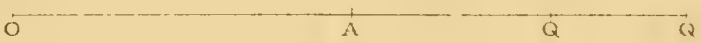


Fig. 3.

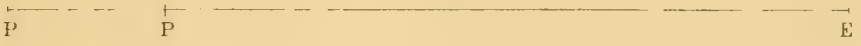


Fig. 5.

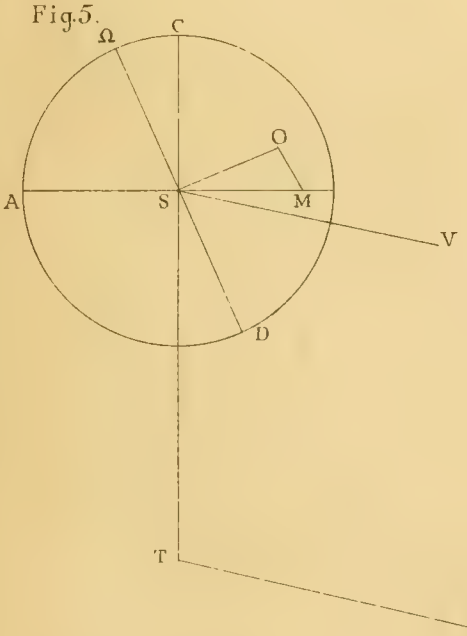


Fig. 4.

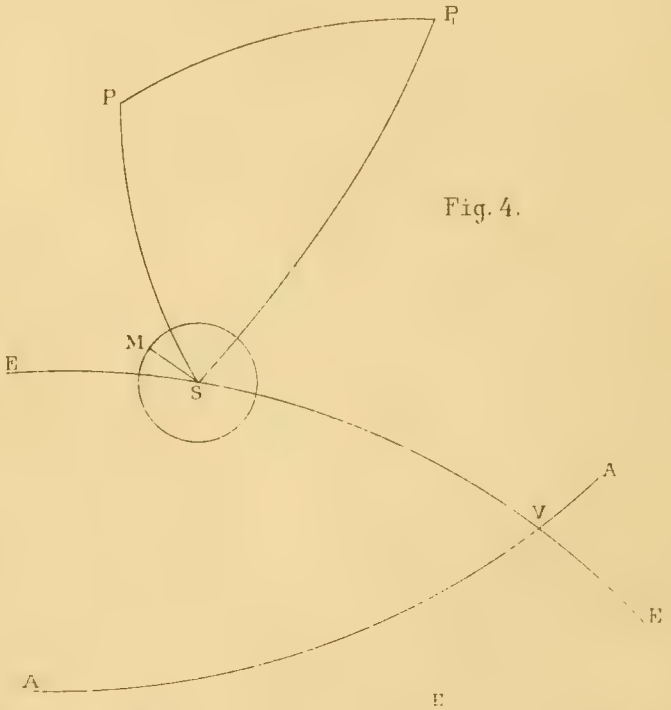
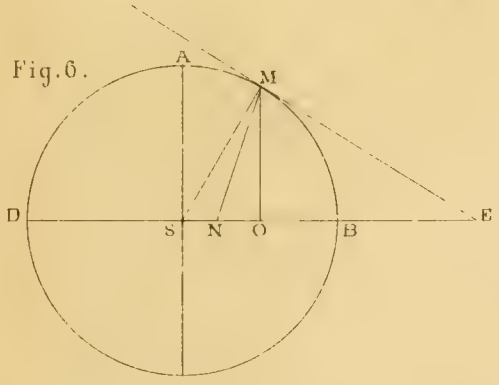


Fig. 6.



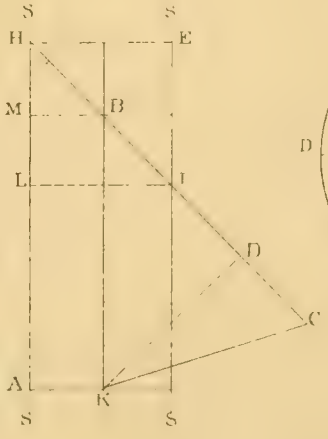
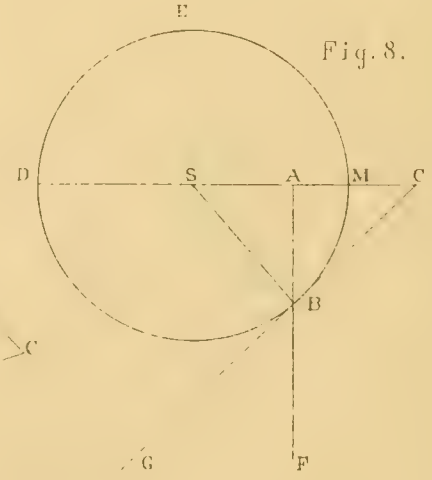


Fig. 7.

Fig. 8.



PROPERTY OF
THE AMERICAN ASSOCIATION
FOR THE ADVANCEMENT OF SCIENCE

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ

VOL. XIV.

FASC. I.

1890.

1890.

NOVA ACTA

REGIÆ SOCIETATIS

SCIENTIARUM

UPSALIENSIS.

SERIEI TERTIÆ

VOL. XIV.

FASC. II.

1891.

LOGICAL
MAR 1917
National Museum

1891.

MBL WHOI Library - Serials
5 WHSE 04139